Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 20.3.2023

Opakování I

Věta (36 Reziduová věta V 20.8.17)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka,* $k \in \mathbb{N}$ *a* $a_1, a_2, \dots, a_k \in \operatorname{Int} \Gamma$*. Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Int} \Gamma \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Int} \Gamma} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$*. Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f.$$

Opakování II

Věta (39 První věta o výpočtu reziduí V 20.9.2)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě z_0 izolovanou singularitu a funkce $g, h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou v bodě z_0 holomorfní.
(i) *Má-li f v bodě z_0 odstranitelnou singularitu, pak* $\operatorname{Res}_{z_0} f = 0$.
(ii) *Má-li f v bodě z_0 pól násobnosti nejvýše $k \in \mathbb{N}$, pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{1}{(k-1)!} (z - z_0)^k f(z) \right)^{(k-1)}.$$

(iii) *Má-li f v bodě z_0 pól násobnosti jedna, pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f.$$

Speciálně pokud $g(z_0) = 0$, pak má funkce fg v bodě z_0 odstranitelnou singularitu.
(iv) *Jestliže h má v bodě z_0 jednoduchý kořen, pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{g}{h} \right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Lemma (7 O holomorfním napojení L 20.10.1)

Nechť $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^+$ *a* $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^-$ *jsou neprázdné otevřené množiny. Nechť* $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}$ *je otevřená množina a pro množinu* $M := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z \in \widetilde{M}, \operatorname{Im} z = 0\}$ *platí*

$$\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \overline{M}$$

a pro každé $t \in \widetilde{M}$ *existuje číslo* $r(t) > 0$ *takové, že kruh* $B_{r(t)}(t + \mathrm{i}0)$ *splňuje*

$$B_{r(t)}(t + \mathrm{i}0) \subset \Omega_1 \cup M \cup \Omega_2.$$

Nechť funkce f_1, $f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *splňují*

f_j *jsou holomorfní na* Ω_j *a spojité na* $\Omega_j \cup M$ *vzhledem k* $\Omega_j \cup M$ *pro* $j \in \{1, 2\}$

a platí $f_1 = f_2$ *na* M. *Pak množina* $\Omega_1 \cup M \cup \Omega_2$ *je otevřená a funkce*

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{pro } z \in \Omega_1 \cup M \\ f_2(z) & \text{pro } z \in \Omega_2 \end{cases}$$

je holomorfní na $\Omega_1 \cup M \cup \Omega_2$.

Věta (41 Schwarzův princip zrcadlení V 20.10.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}^+$ *je oblast, neprázdný interval* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *splňuje*

$$L := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z \in (a, b), \operatorname{Im} z = 0\} \subset \partial\Omega$$

a pro každé $z \in L$ *existuje* $r > 0$ *takové, že* $B_r(z) \cap \mathbb{C}^+ \subset \Omega$*. Nechť* $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* Ω*, spojitá na* $\Omega \cup L$ *vzhledem k* $\Omega \cup L$ *a* f *je reálná na* L*. Pak funkce*

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{pro } z \in \Omega \cup L \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{pro } z \in \{w \in \mathbb{C}^- : \overline{w} \in \Omega\} =: \Omega^* \end{cases}$$

je holomorfní na $\Omega \cup L \cup \Omega^*$*.*

19.11 Analytické prodloužení, Γ-funkce III

Věta (42 O holomorfním prodloužení Γ-funkce V 20.10.4)

(i) *Funkce* Γ *zavedená pomocí*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t \qquad \textit{kdykoliv } \operatorname{Re} z > 0$$

je holomorfní na množině $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$.
(ii) *Pro každé* $z \in \Omega$ *platí* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
(iii) Γ*-funkci je možné holomorfně rozšířit na* $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ *vzorcem*

$$\Gamma(z) := \frac{\Gamma(z+k)}{(z+k-1)(z+k-2)\dots z}$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$ *a* $z \in \{w \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} w \in (-k, -k+1], w \neq -k+1\}$.

(iv) *Holomorfní rozšíření z části* (iii) *má v bodech* $0, -1, -2, \dots$ *jednonásobné póly a platí*

$$\operatorname{Res}_m \Gamma = \frac{(-1)^m}{(-m)!} \qquad \textit{pro všechna } m \in \{0, -1, -2, \dots\}.$$

19.11 Analytické prodloužení, Γ-funkce IV

Věta (43 O asymptotickém chování Γ-funkce V 20.10.5)

Pro $s > 0$ platí

$$\Gamma(s) = \left(\frac{s}{\mathrm{e}}\right)^s \frac{1}{s}\sqrt{2\pi s}(1 + \mathrm{o}(1)) \qquad \textit{pro } s \to \infty.$$