Sada příkladů 10/11

Distribuce

1. Zjednodušte zápis distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:
   a) $x^k D^n \delta_0, \quad k, n \in \mathbb{N}$ b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\omega} D^n \delta_0, \quad \omega \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

2. Zjednodušte zápis distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:
   a) $|x|^2 \Delta \delta_0$ b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\omega)} \Delta^k \delta_0, \quad \omega \in \mathbb{R}^N, k \in \mathbb{N}$
   c) $\mathrm{e}^{-a|x|^2} \Delta \delta_0, \quad a > 0$

3. Určete distribuce $\Delta T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:
   a) $u(x) = |x|^\lambda, \quad \lambda \geq 2 - N, N \geq 2$ b) $u(x) = \ln |x|$

4. Dokažte: Nechť f je hladká funkce na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A_k = f_+^{(k)}(0) - f_-^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Potom
$$D^n T_f = T_{f^{(n)}} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k D^{n-1-k} \delta_0.$$

5. Ukažte, že posloupnosti
   a) $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2x^2+1}$ b) $g_n(x) = \frac{n}{2\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{n^2x^2}{4}}$ c) $h_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x}$
   konvergují v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ k δ_0 distribuci.

6. Ukažte, že
$$T_{\frac{1}{x-\mathrm{i}0}} = T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}} + \mathrm{i}\pi\delta_0.$$

7. Nalezněte rozvoj do Fourierových řad pro periodické distribuce:
   a) $T_{\mathrm{p.v.cotg}(\pi x)}$ b) $T_{\mathrm{p.v.tg}(\pi x)}$ c) $T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{\sin(\pi x)}}$

8. Dokažte, že:
   a) $\delta_0 \circ (\mathbb{A}x) = \dfrac{1}{|\det \mathbb{A}|} \delta_0$
   b) $\delta_0 \circ (x + \mathbf{b}) = \delta_{\mathbf{b}}$
   c) $\delta_0 \circ (ax) = \dfrac{1}{|a|^N} \delta_0.$

9. Ukažte, že metoda zavedení distribucí $H_{x_+^\lambda}$ pomocí Taylorova rozvoje testovacích funkcí dává totéž co holomorfní rozšiřování.

10. Ukažte, že limity

$$\lim_{\lambda\to -2m} H_{|x|^\lambda} \qquad \lim_{\lambda\to -2m+1} H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}$$

existují v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a tudíž definují distribuce $H_{x^{-2m}}$ resp. $H_{x^{-2m+1}}$.

11. Dokažte pro $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} H_{(x\pm \mathrm{i}0)^{-k}} &= H_{x^{-k}} \mp \frac{\mathrm{i}\pi(-1)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1}\delta_0 \\ H_{x^{-k}} &= \frac{1}{2}\Big(H_{(x+\mathrm{i}0)^{-k}} + H_{(x-\mathrm{i}0)^{-k}}\Big) \\ H_{(x+\mathrm{i}0)^{-k}} - H_{(x-\mathrm{i}0)^{-k}} &= -2\pi\mathrm{i}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1}\delta_0. \end{aligned}$$