Otázky ke zkoušce NOFY162 šk. rok 2022/23

1. Definujte pojmy holomorfní funkce v bodě a na otevřené množině. Vysvětlete pojem Cauchy–Riemannovy podmínky a ukažte, že jsou nutnou podmínkou holomorfnosti (vyberte si libovolnou variantu).

   Formulujte a dokažte větu o Fourierově transformaci distribuce s kompaktním nosičem a o Fourierově transformaci konvoluce distribucí, máli jedna distribuce kompaktní nosič.

2. Vysvětlete zavedení funkcí e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ a $\cosh z$. Vysvětlete, proč se jedná o holomorfní funkce na komplexní rovině. Buď proveďte přímý výpočet (alespoň pro jednu funkci), nebo formulujte, dokažte a ověřte předpoklady příslušné potřebné věty.

   Definujte Fourierovu transformaci a zpětnou Fourierovu transformaci na prostoru $L^1(\mathbb{R}^N)$. Formulujte a dokažte větu o inverzi, včetně potřebné pomocné věty.

3. Vysvětlete definici křivky a křivkového integrálu v komplexní rovině.
   (i) Ukažte, že $|\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z| \leq \sup_{\langle\varphi\rangle} |f(z)| l_\varphi$.
   (ii) Dokažte, jak vypadá vztah pro $\int_\eta f(z)\,\mathrm{d}z$, kde $\eta = h \circ \varphi$.

   Definujte konvoluci distribucí a temperovaných distribucí, uveďte a v případě temperovaných distribucí i dokažte věty, kdy konvoluce existuje.

4. Formulujte všechny tři verze Cauchyovy věty. Pomocí vhodné verze dokažte poslední formulaci (odpovídající situaci, kdy uvnitř dané oblasti v konečném počtu množin nemusí být daná funkce holomorfní).

   Vysvětlete zavedení distribucí $x_\pm^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus K$, K spočetná, v bodech K spočtěte rezidua (vysvětlete). Ukažte také vztahy pro derivace a pro násobení funkcí $x \mapsto x$.

5. Formulujte Cauchy–Riemannovy podmínky a ukažte, že za vhodných dodatečných předpokladů jde o podmínku postačující k holomorfnosti funkce. Uveďte všechny potřebné definice.

   Definujte prostory $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{S}^m(\mathbb{R}^N)$ a $\mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)$, včetně definic konvergencí na jednotlivých prostorech. Vysvětlete, v jakém vztahu jsou tyto prostory. Potřebné věty zformulujte, není třeba je dokazovat detailně, stačí hlavní myšlenky důkazu.

6. Definujte pojem holomorfní funkce v bodě a na množině. Definujte pojem harmonická funkce. Ukažte, že reálná a imaginární část holomorfní funkce jsou funkce harmonické. Platí i naopak nějaký vztah harmonických funkcí k funkcím holomorfním? Formulujte!

   Definujte tenzorový součin distribucí a temperovaných distribucí, včetně uvedení a důkazu základních vlastností.

7. Definujte pojem holomorfní funkce v bodě a na množině. Definujte pojem harmonická funkce. Ukažte, že každou harmonickou funkci v $\mathbb{R}^2$ lze chápat jako reálnou (imaginární) složku holomorfní funkce.

   Vysvětlete zavedení derivace libovolného (tedy i komplexního) řádu. Formulujte a dokažte základní vlastnosti této derivace.

8. Definujte primitivní funkci k funkci f na otevřené podmnožině komplexní roviny. Pro funkci f mající primitivní funkci v jisté otevřené podmnožině komplexní roviny dokažte vztah pro $\int_\varphi f\,\mathrm{d}z$, kde φ leží v dané otevřené množině a křivka φ je po částech C^1.

   Vysvětlete normalizaci distribucí x_+^λ, $\lambda \in \mathbb{C}$.

9. Definujte primitivní funkci na otevřené podmnožině komplexní roviny. Ukažte, že pokud křivkový integrál dané funkce nezávisí na jisté otevřené podmnožině na cestě (vysvětlete!), pak má na této otevřené podmnožině primitivní funkci.

   Definujte plošnou míru, co víte o její Fourierově transformaci (včetně důkazu) a jak souvisí s Fourierovou transformací radiálně symetrických funkcí.

10. Formulujte větu o Cauchyových vzorcích. Formulujte a použitím této věty dokažte větu o střední hodnotě a Morerovu větu.

    Definujte prostory $\mathcal{D}_C$ a Z a dokažte Paley–Wienerovu větu, která říká, jak spolu skrze Fourierovu transformaci souvisí. Definujte také Fourierovu transformaci na prostorech Z' a $\mathcal{D}'_C$.

11. Formulujte větu o Taylorově rozvoji holomorfní funkce na okolí bodu. Formulujte a použitím této věty dokažte větu o jednoznačnosti holomorfního prodloužení.

Uveďte definici konvergence v $\mathcal{D}'(\Omega)$ (slabá*). Dokažte (včetně příslušné pomocné věty), že existence $\lim_{k\to\infty}\langle T_k, \varphi\rangle$ pro všechny testovací funkce zaručuje tuto konvergenci.

12. Formulujte a vysvětlete důkaz věty o charakterizaci podstatné singularity, formulujte a dokažte větu Weierstrass–Casoratiho a formulujte Picardovu větu. Tu okomentujte na vhodném příkladu.

    Formulujte a dokažte Schwartzovu větu (tedy větu o inverzi Fourierovy transformace na Schwartzově prostoru).

13. Formulujte Cauchyovu větu pro případ křivky ležící uvnitř jednoduše souvislé oblasti, na které je funkce holomorfní. Vyslovte všechny potřebné definice. Dokažte speciální případ této věty, kdy je geometrický obraz křivky obvod trojúhelníka.

    Definujte Schwartzův prostor, dokažte jeho základní vlastnosti. Definujte konvoluci funkcí a ukažte její základní vlastnosti (speciálně, že konvoluce dvou funkcí ze Schwartzova prostoru leží také ve Schwartzově prostoru).

14. Formulujte Cauchyovu větu pro případ křivky ležící uvnitř jednoduše souvislé oblasti, na které je funkce holomorfní. Použitím toho, že věta platí pro speciální případ, kdy je geometrický obraz křivky obvod trojúhelníka (není třeba dokazovat) dokažte tvrzení věty. Pomocná tvrzení stačí vyslovit, není třeba je dokazovat, formulujte ale všechny potřebné definice.

    Definujte řád distribuce, nosič distribuce a uveďte příklad distribuce s bodovým nosičem, s kompaktním nosičem, s konečným řádem a nekonečným řádem.

15. Formulujte a dokažte větu o Cauchyově vzorci. Potřebné pomocné věty pouze zformulujte, není třeba je dokazovat.

    Charakterizujte distribuce s nulovým řádem a nezáporné distribuce (zde i důkaz), včetně potřebných definic.

16. Formulujte větu o střední hodnotě pro holomorfní funkce. Její pomocí dokažte větu o principu maxima a minima modulu.

Ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x} = \delta$$

v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, buď přímo, nebo pomocí věty (tu ale dokažte).

17. Formulujte a dokažte větu o Taylorově rozvoji holomorfní funkce na otevřené množině.

    Definujte $\mathcal{D}(\Omega)$, konvergenci na $\mathcal{D}(\Omega)$, distribuce na Ω a konvergenci na $\mathcal{D}'(\Omega)$. Uveďte a dokažte (není třeba dokazovat pomocné lemma) ekvivalentní charakterizaci spojitosti lineárního funkcionálu nad $\mathcal{D}(\Omega)$.

18. Formulujte a dokažte větu o Laurentově rozvoji funkce holomorfní na mezikruží.

    Definujte derivaci distribuce, násobení distribuce hladkou funkcí, ukažte záměnnost derivací na $\mathcal{D}'(\Omega)$ a spočtěte derivaci Heavisideovy funkce a diferencovatelné funkce až na jeden bod, která je po částech spojitá, na $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

19. Definujte Γ-funkci na množině $\operatorname{Re} z > 0$. Vysvětlete, jak lze tuto funkci holomorfně rozšířit na komplexní rovinu až na spočetně mnoho bodů a ukažte základní vlastnosti tohoto prodloužení.

    Vysvětlete zavedení distribucí r^λ, λ komplexní až na spočetnou množinu (tedy v R^N pro N libovolné přirozené číslo).

20. Definujte pojem index bodu ke křivce. Formulujte a dokažte základní vlastnosti indexu bodu ke křivce. Jeho použitím formulujte zobecnění Cauchyovy věty, reziduové věty a Cauchyova vzorce.

    Definujte Fourierovu transformaci na Schwartzově prostoru. Dokažte vztahy pro Fourierovu transformaci derivace, derivaci Fourierovy transformace a to, že Fourierova transformace zobrazuje Schwartzův prostor do sebe.

21. Definujte primitivní funkce k funkci komplexní proměnné. Ukažte (stačí idea důkazu), že pro její existenci stačí, že křivkový integrál nezávisí na cestě pro křivky tvořené lomenými čarami. Pro případ konvexní otevřené množiny ukažte, že dokonce stačí, aby integrál přes libovolný trojúhelník byl nulový.

Definujte Fourierovu transformaci na $L^1(\mathbb{R}^N)$. Ukažte, že Fourierova transformace zobrazuje tento prostor do $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, ale ne do $L^1(\mathbb{R}^N)$. Ukažte, že Fourierův obraz integrovatelné funkce je spojitá funkce s nulovou limitou v nekonečnu.

22. Vysvětlete zavedeni komplexního logaritmu a obecné mocniny komplexního čísla. Vysvětlete pojmy víceznačná funkce, hlavní větev logaritmu.

    Definujte konvoluci distribucí a temperovaných distribucí, včetně uvedení vět, kdy konvoluce existuje.

23. Formulujte větu o Cauchyově vzorci. Její pomocí dokažte větu o Cauchyových nerovnostech a Liouvilleovu větu.

    Formulujte a dokažte charakterizaci distribucí s kompaktním nosičem a větu o charakterizaci distribucí s bodovým nosičem.

24. Formulujte Liuovilleovu větu. Její pomocí dokažte základní větu algebry (v obou formulacích).

    Vysvětlete definici Fourierovy transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$. Ukažte, že Fourierova transformace i zpětná Fourierova transformace zobrazují tento prostor na sebe a složení Fourierovy transformace a zpětné Fourierovy transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$ je identita (i v opačném pořadí).

25. Formulujte a dokažte obě Weierstrassovy věty o posloupnostech holomorfních funkcí.

    Vysvětlete definici Fourierovy transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$ a na $L^1(\mathbb{R}^N)$. Ukažte, že pro funkce z průniku těchto prostorů dávají obě definice totéž a že Fourierova transformace je spojité zobrazení z $L^2(\mathbb{R}^N)$ do $L^2(\mathbb{R}^N)$. Dokažte, jaký vztah nám tyto věty umožňují použít pro výpočet Fourierovy transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$.

26. Definujte pojmy izolovaná singularita, odstranitelná singularita, pól, podstatná singularita. Formulujte a dokažte (včetně Riemannovy věty) větu o charakterizaci odstranitelné singularity. Ostatní pomocné věty stačí formulovat.

    Ukažte, že
    $$\frac{1}{x + \mathrm{i}\,0} = \mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x} - \mathrm{i}\,\pi\delta.$$
    Vše nejprve definujte.

27. Definujte pojmy izolovaná singularita, odstranitelná singularita, pól, podstatná singularita. Formulujte a dokažte větu o charakterizaci k-násobného pólu, včetně pomocných lemmat.

    Definujte Fourierovu transformaci na Schwartzově prostoru. Dokažte, že Fourierova transformace sudé resp. liché funkce (v jedné dimenzi) je sudá resp. lichá funkce a nalezněte pro ni vztah. Ukažte, že Fourierova transformace radiálně symetrické funkce je radiálně symetrická a nalezněte vztah pro její výpočet ve třech dimenzích.

28. Formulujte a dokažte větu o Schwarzově principu symetrie. Pomocné lemma stačí zformulovat.

    Formulujte a dokažte větu o Poissonově sumační formuli (stačí pro distribuce).

29. Definujte pojem izolované singularity a rezidua v bodě komplexní roviny a v nekonečnu. Ukažte vztah pro součet reziduí a důsledek o korektní definici rezidua v nekonečnu (nezávislost na zvoleném kruhu).

    Definujte Fourierovu transformaci temperované distribuce. Vysvětlete, proč je definice korektní, spočtěte Fourierovu transformaci derivace distribuce a derivace Fourierovy transformace derivace a ukažte, že Fourierova transformace je spojité zobrazení z prostoru temperovaných distribucí (ve smyslu slabé* konvergence) na prostor temperovaných distribucí. Ukažte, že složením přímé a zpětné Fourierovy transformace (v libovolném pořadí) na tomto prostoru dostaneme identitu.