Početní část zkoušky 17.1.2023

Jméno:

Skupina:

1. (6b) Nalezněte lokální minimum funkcionálu
$$\Phi[y] = \int_0^1 (y^2 + (y')^2 + y' 2x\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$$
na množině
$$M = \left\{ y \in C^1([0,1]) : y(0) = \frac{3}{2}, y(1) = \frac{1}{\mathrm{e}} \right\}.$$
Nezapomeňte ověřit, že se skutečně jedná o minimum!

2. (5b) V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ studujte charakter konvergence (bodová, stejnoměrná, lokálně stejnoměrná) řady funkcí
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha x}{1 + n^4 x^2}$$
na intervalu $[0, \infty)$ resp. $(0, \infty)$.

   Pokud budete mít čas a chuť, můžete si zkusit rozmyslet, že pro hodnoty α, kde máme bodovou či lokálně stejnoměrnou konvergenci, ale ne stejnoměrnou konvergenci na základě postačujících kritérií, stejnoměrná konvergence nenastává. Toto bude pozitivně hodnoceno v případě nerozhodné známky.

3. (8b) Pro které hodnoty $a \in \mathbb{R}$ konverguje Lebesgueův integrál
$$\varphi(a) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax} \sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$
Pro tyto hodnoty integrál spočtěte pomocí derivace integrálu závislého na parametru. Nezapomeňte zkontrolovat splnění předpokladů odpovídajících vět.

4. (8b) Nalezněte objem tělesa ohraničeného plochami
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = x, \qquad z = 0,$$
a, $b > 0$.

Teoretická část zkoušky 17.1.2023

Jméno:

Skupina:

1. (8b) Uvažujte posloupnost funkcí $\varphi_n(x) = n^2 x \mathrm{e}^{-n^2 x}$ na intervalu $[0, 1]$.
(a) Ukažte, že $\varphi_n(x)$ nekonverguje stejnoměrně na intervalu $[0, 1]$ ke své bodové limitě (použijte například ekvivalentní charakterizaci pomocí limit suprem).
(b) Formulujte v rámci teorie Riemannova integrálu tvrzení, na základě kterého je možno dokázat
$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{R}) \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$
a ukažte, že pro naši posloupnost $\varphi_n(x)$ ho nelze použít.
(c) Výpočtem ověřte, že
$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{R}) \int_0^1 \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
(d) Ukažte, že použitím teorie Lebesgueova integrálu lze rovnost v bodě (c) dokázat. (Pozor, chceme ji dokázat pro Riemannův integrál!) Příslušné věty formulujte a ověřte jejich předpoklady, nemusíte je dokazovat.

2. (7b) (a) Definujte pojmy jednoduchá a zobecněná k-plocha v $\mathbb{R}^N$.
(b) Definujte plošný integrál 1. druhu přes jednoduchou a zobecněnou k-plochu v $\mathbb{R}^N$.
(c) Definujte pojem vnější normála k oblasti Ω.
(d) Formulujte Gauss–Ostrogradského větu.
(e) Formulujte a dokažte (pomocí věty z předchozího bodu) Větu o integraci „per partes pro objemový integrál“ a Větu o výpočtu objemového integrálu pomocí plošného integrálu přes hranici dané množiny.

3. (8b) (a) Definujte pojem ortonormální systém a úplný ortonormální systém na nekonečně dimenzionálním Hilbertově prostoru.

(b) Formulujte a dokažte ekvivalentní charakterizace úplnosti ortonormálního systému.
(c) Ukažte, že nutnou podmínkou existence úplného ortonormálního systému je separabilita Hilbertova prostoru.
(d) Formulujte pojem izometricky izomorfní prostory.
(e) Formulujte větu o vztahu libovolného separabilního Hilbertova prostoru a ℓ_2.