Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 15.11.2022

Definice (19 Řezy množinami D 15.11.1)

Nechť $p, q \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^p$ definujeme množinu

$$M^x := \{y \in \mathbb{R}^q \colon (x, y) \in M\}$$

a nazýváme ji *(svislý) řez množinou M v bodě x*. Analogicky pro každé $y \in \mathbb{R}^q$ definujeme *(vodorovný) řez množinou M v bodě y* jako

$$M_y := \{x \in \mathbb{R}^p \colon (x, y) \in M\}.$$

14.12 Fubiniho věta II

Věta (44 Fubiniho věta V 15.11.2)

Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$ je lebesgueovsky měřitelná množina a $f \in \mathcal{L}^*(M)$. Pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^p$ existuje

$$\int_{M^x} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y),$$

pro skoro všechna $y \in \mathbb{R}^q$ existuje

$$\int_{M_y} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x)$$

a platí

$$\int_M f\,\mathrm{d}\lambda_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{M^x} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{M_y} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x)\,\mathrm{d}\lambda_q(y).$$

14.13 Věta o substituci

Věta (45 Věta o substituci V 15.12.1)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\varphi \in C^1(G; \mathbb{R}^N)$ je prosté zobrazení. Pak pro libovolnou lebesgueovsky měřitelnou funkci $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definovanou na $\varphi(G)$ platí

$$\int_{\varphi(G)} f(y)\,\mathrm{d}\lambda_N(y) = \int_G f(\varphi(x))|\mathrm{J}_{\varphi}(x)|\,\mathrm{d}\lambda_N(x),$$

má-li alespoň jeden z integrálů smysl.

14.14 Zobecnění Lebesgueova integrálu I

Definice (20 Zobecněný Lebesgueův integrál D 15.13.1)

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definováno na $(a, b) \subset \mathbb{R}$, pro všechna $\alpha, \beta \in (a, b)$ existuje vlastní $\int_\alpha^\beta f \,\mathrm{d}\lambda_1$ a existuje vlastní

$$J := \lim_{\substack{\alpha,\beta\in(a,b)\\ \alpha\to a\\ \beta\to b}} \int_\alpha^\beta f \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Potom číslo J nazýváme *zobecněným Lebesgueovým integrálem* a značíme jej $(\mathcal{ZL}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x$.

14.14 Zobecnění Lebesgueova integrálu II

Věta (46 O integrálech závislých na parametru pro zobecněný Lebesgueův integrál 15.13.4)

Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $[c, d] \subset \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *je definováno na* $(a, b) \times [c, d]$ *a platí:*
(i) *pro každé* $\beta \in (a, b)$ *je funkce* $\gamma \mapsto \int_a^\beta f(x, \gamma)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$ *spojitá na* $[c, d]$
(ii) *pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že pro každou dvojici* $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{U}_\delta^-(b)$ *platí*

$$\left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x, \gamma)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \right| < \varepsilon$$

pro všechna $\gamma \in [c, d]$.
Pak pro všechna $\gamma \in [c, d]$ *existuje* $(\mathcal{ZL}) \int_a^b f(x, \gamma)\,\mathrm{d}x$ *a je spojitě závislý na* $\gamma \in [c, d]$.

14.14 Zobecnění Lebesgueova integrálu III

Definice (21 Integrál ve smyslu hlavní hodnoty D 15.13.6)

Nechť $x_0 \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována skoro všude na (a, b). Nechť platí

(i) pro každé $\varepsilon > 0$ existuje vlastní $\int_{(a,b)\setminus(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)} f \,\mathrm{d}\lambda_1$

(ii) existuje vlastní

$$A := \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{(a,b)\setminus(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)} f \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Pak číslo A nazýváme *integrálem funkce f přes interval* (a, b) *ve smyslu hlavní hodnoty (principal value integral)* a píšeme

$$A = \mathrm{p.v.} \int_a^b f \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

15 Lebesgueovy prostory
15.1 Základní vlastnosti Lebesgueových prostorů I

Definice (1 Pomocný prostor $\mathcal{L}^p(\Omega)$ a veličina $\mathcal{N}_p$ D 16.1.1)

Nechť $p \in [1, \infty)$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak $\mathcal{L}^p(\Omega)$ označuje množinu všech měřitelných numerických funkcí na Ω, pro které platí

$$\mathcal{N}_p(f) := \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Dále $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ označuje množinu všech měřitelných numerických funkcí na Ω, pro které platí

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| := \inf_{\substack{P \subset \Omega \\ \lambda_N(P)=0}} \sup_{\Omega \setminus P} |f| < \infty.$$

Veličina ess sup se nazývá *esenciální supremum*.

Definice (2 Lebesgueův prostor $L^p(\Omega)$ D 16.1.5)

Nechť $p \in [1, \infty]$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak *Lebesgueův prostor* $L^p(\Omega)$ je množina všech tříd ekvivalence (vzhledem k rovnosti funkcí skoro všude) na $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

15 Lebesgueovy prostory
15.1 Základní vlastnosti Lebesgueových prostorů I

Definice (1 Pomocný prostor $\mathcal{L}^p(\Omega)$ a veličina $\mathcal{N}_p$ D 16.1.1)

Nechť $p \in [1, \infty)$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak $\mathcal{L}^p(\Omega)$ označuje množinu všech měřitelných numerických funkcí na Ω, pro které platí

$$\mathcal{N}_p(f) := \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Dále $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ označuje množinu všech měřitelných numerických funkcí na Ω, pro které platí

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| := \inf_{\substack{P \subset \Omega \\ \lambda_N(P) = 0}} \sup_{\Omega \setminus P} |f| < \infty.$$

Veličina ess sup se nazývá *esenciální supremum*.

Definice (2 Lebesgueův prostor $L^p(\Omega)$ D 16.1.5)

Nechť $p \in [1, \infty]$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak *Lebesgueův prostor* $L^p(\Omega)$ je množina všech tříd ekvivalence (vzhledem k rovnosti funkcí skoro všude) na $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

15.1 Základní vlastnosti Lebesgueových prostorů II

Lemma (1)

Množiny $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, jsou vektorové prostory s obvyklámi operacemi sčítání funkcí a násobení funkcí reálnými či komplexními čísly.