Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 8.11.2022

Opakování I

Definice (15 Integrál z měřitelné funkce D 15.7.1 a D 15.8.1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Pro $f : X \to [0, \infty]$ měřitelnou definujeme

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \sup\Big\{ \int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu \colon s \text{ je měřitelná jednoduchá funkce splňující } 0 \le s \le f \Big\}.$$

Je-li f je měřitelná numerická funkce, pak definujeme (připomeňme $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$)

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu,$$

má-li pravá strana smysl v $\mathbb{R}^*$ (tedy je-li alespoň jeden z integrálů napravo konečný).

Číslo $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$ se nazývá *abstraktní Lebesgueův integrál* z funkce f podle míry μ přes množinu Ω.

Opakování II

Lemma (8 Lévi či Lebesgueova věta o monotónní konvergenci I V 15.7.7)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\{f_n\}$ *je posloupnost měřitelných nezáporných numerických funkcí definovaných na* X *a platí* $f_n \leq f_{n+1}$ *na* X *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*. Bodovou limitu této posloupnosti označme* f*. Pak* $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ *a*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

14.8 Limitní přechody přes integrační znamení I

Věta (35 Lévi či Lebesgueova věta o monotonní konvergenci II V 15.8.19)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\{f_n\}$ *je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na* X*, platí* $f_n \leq f_{n+1}$ *skoro všude na* X *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu > -\infty$*. Bodovou limitu této posloupnosti označme* f *(je definovaná skoro všude). Pak*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta (36 Fatouovo lemma L 15.7.10)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $\{f_n\}$ *je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na* X *a* g *je měřitelná numerická funkce na* X*. Nechť* $f_n \geq g$ *s.v. na* X *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a nechť*

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu > -\infty.$$

Pak $\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{L}^*(\mu)$ *a*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

14.8 Limitní přechody přes integrační znamení I

Věta (35 Lévi či Lebesgueova věta o monotonní konvergenci II V 15.8.19)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\{f_n\}$ *je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na* X*, platí* $f_n \le f_{n+1}$ *skoro všude na* X *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu > -\infty$*. Bodovou limitu této posloupnosti označme* f *(je definovaná skoro všude). Pak*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta (36 Fatouovo lemma L 15.7.10)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $\{f_n\}$ *je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na* X *a* g *je měřitelná numerická funkce na* X*. Nechť* $f_n \ge g$ *s.v. na* X *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a nechť*

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu > -\infty.$$

Pak $\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{L}^*(\mu)$ *a*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

14.8 Limitní přechody přes integrační znamení II

Věta (37 Lebesgueova věta o majorizované konvergenci V 15.18.21)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na X, platí $f_n \to f$ skoro všude na X a existuje $g \in \mathcal{L}(\mu)$ taková, že $|f_n| \leq g$ skoro všude na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta (35a Lévi či Lebesgueova věta o monotonní konvergenci pro řady funkcí)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\{v_k\}$ je posloupnost měřitelných nezáporných numerických funkcí definovaných na X. Označme $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$. Pak $S(x) \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a

$$\int_X S \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X v_k \, \mathrm{d}\mu.$$

14.8 Limitní přechody přes integrační znamení II

Věta (37 Lebesgueova věta o majorizované konvergenci V 15.18.21)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na X, platí $f_n \to f$ skoro všude na X a existuje $g \in \mathcal{L}(\mu)$ taková, že $|f_n| \leq g$ skoro všude na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta (35a Lévi či Lebesgueova věta o monotonní konvergenci pro řady funkcí)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\{v_k\}$ je posloupnost měřitelných nezáporných numerických funkcí definovaných na X. Označme $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$. Pak $S(x) \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a

$$\int_X S \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X v_k \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta (37a Lebesgueova věta o majorizované konvergenci pro řady)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\{v_k\}$ je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na X. Nechť $|v_k| \leq g_k$ skoro všude na X pro všechna $k \in \mathbb{N}$, přičemž $\sum_{k=1}^{\infty} \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu$ konverguje. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ má s.v. na X konečný součet $S(x)$, kde $S \in \mathcal{L}(\mu)$ a platí

$$\int_X S \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X v_k \, \mathrm{d}\mu.$$

14.9 Vztah Riemannova a Newtonova integrálu k Lebesgueově integrálu I

Věta (38 O vztahu Riemannova a Lebesgueova integrálu V 15.9.1)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *a* f *je riemannovsky integrovatelná na* $[a, b]$. *Pak je* f *lebesgeovsky integrovatelná a oba integrály se rovnají.*

Věta (39 O vztahu Newtonova a Lebesgueova integrálu V 15.9.3)

Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $f \in C((a, b))$, $f \in \mathcal{L}^*(\lambda_1)$ *a* F *značí primitivní funkci k* f *na* (a, b). *Pak*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\lambda_1 = F(b-) - F(a+).$$

Věta (38 O vztahu Riemannova a Lebesgueova integrálu V 15.9.1)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. Pak je f lebesgeovsky integrovatelná a oba integrály se rovnají.

Věta (39 O vztahu Newtonova a Lebesgueova integrálu V 15.9.3)

Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $f \in C((a, b))$, $f \in \mathcal{L}^*(\lambda_1)$ a F značí primitivní funkci k f na (a, b). Pak

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\lambda_1 = F(b-) - F(a+).$$

14.10 Integrály závislé na parametru I

Věta (40 O spojitosti integrálu závislého na parametru V 15.10.1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $A \subset \mathbb{R}$ *a* $\alpha_0 \in A$ *je vnitřní bod množiny* A*. Nechť funkce* $f\colon X \times A \to \mathbb{R}$ *splňuje*
(i) $x \mapsto f(x, \alpha)$ *je měřitelná pro všechna* $\alpha \in A$
(ii) *pro skoro všechna* $x \in X$ *je funkce* $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ *spojitá v bodě* α_0
(iii) *existuje* $g \in \mathcal{L}(\mu)$ *taková, že*

$$|f(x, \alpha)| \leq g(x) \qquad \text{pro skoro všechna } x \in X \text{ a všechna } \alpha \in A.$$

Pak funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ *leží v* $\mathcal{L}(\mu)$ *pro všechna* $\alpha \in A$ *a funkce*

$$\alpha \mapsto \int_X f(x, \alpha) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

je spojitá v α_0*.*