Početní část zkoušky 2.6.2022

Jméno:

Skupina:

1. (8b) Nalezněte řešení ODR

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 20\cos(2x) + 16x\mathrm{e}^{2x}$$

splňující $y(0) = -1$, $y'(0) = -3$ a $y''(0) = -11$.

2. (7b) V závislosti na parametrech $p \in \mathbb{R}^+$ a $q \in \mathbb{R}$ rozhodněte, kdy konverguje číselná řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^q}\right).$$

Pokud používáte nějaké kritérium konvergence řady, vysvětlete. Pozor na jejich správné použití!

3. (7b) Nalezněte (pokud existují) lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + 2x^2 + y^2$$

na $\mathbb{R}^2$. Nalezněte (pokud existují) také body, ve kterých se lokální extrémy nabývají.

4. (5b) Ověřte, že předpisy

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y+z)\right) + \ln(xyz) = -1$$
$$x^3 + y^3 + z^3 - \frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2y-z}{2}\right) = 1$$

definují na jistém okolí bodu $(1,1,1)$ hladké funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$. Spočtěte $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1)$ a $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(1)$.

Teoretická část zkoušky 2.6.2022

Jméno:

Skupina:

1. (8b) (i) Definujte číselnou řadu.
   (ii) Definujte, co to znamená, že číselná řada konverguje/diverguje/osciluje.
   (iii) Definujte pojmy absolutně konvergentní a neabsolutně konvergentní číselná řada.
   (iv) Definujte pojem přerovnání řady.
   (v) Dokažte (včetně pomocného lemmatu), že libovolným přerovnáním absolutně konvergentní řady získáme absolutně konvergentní řadu.

2. (7b) (i) Definujte pojmy prstencové okolí a okolí bodu v metrickém prostoru.
   (ii) Definujte pojmy otevřená a uzavřená podmnožina metrického prostoru.
   (iii) Uveďte příklad podmnožiny metrického prostoru (pokud existuje), která je současně otevřená a uzavřená.
   (iv) Ukažte, že libovolné sjednocení otevřených množin je otevřená množina a konečný průnik otevřených množin je otevřená množina. Jak je to v případě spočetného průniku?
   (v) Formulujte a dokažte analogickou větu pro případ uzavřených množin.

3. (8b) (i) Dokažte, že spojitá funkce $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ nabývá na $M \subseteq \mathbb{R}^N$ svého maxima, jestliže
   (a) M je uzavřená a omezená
   (b) $M = \mathbb{R}^N$ a $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = -\infty$
   (c) $M = \mathbb{R}^N$, $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0$ a $f(0) > 0$.
   (ii) Formulujte Větu o Lagrangeových multiplikátorech.
   (iii) Definujte pojem lokální extrém a formulujte a dokažte nutnou podmínku existence lokálního extrému pro funkce více proměnných.