Matematická analýza I

Milan Pokorný

Přednáška 7.1.2022

6.5 Vlastnosti Riemannova integrálu III

Věta (10 Vztah Riemannova a Newtonova integrálu V 7.5.9)

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a nechť* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Existují-li* $(\mathcal{R}) \int_a^b f \, \mathrm{d}x$ *a* $(\mathcal{N}) \int_a^b f \, \mathrm{d}x$, *pak se rovnají.*

Věta (11 Takzvaná hlavní věta diferenciálního a integrálního počtu V 7.5.15)

Nechť f *a* F *jsou jako výše. Pak*

(i) *funkce* F *je spojitá na* $[a, b]$

(ii) *je-li* f *spojitá v* $x_0 \in (a, b)$, *platí* $F'(x_0) = f(x_0)$ *(analogicky pro jednostrannou spojitost v krajních bodech a jednostranné derivace).*

Speciálně, je-li f *spojitá na* (a, b), *pak* $F' = f$ *na* (a, b).

6.5 Vlastnosti Riemannova integrálu III

Věta (10 Vztah Riemannova a Newtonova integrálu V 7.5.9)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a nechť* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Existují-li* $(\mathcal{R}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x$ *a* $(\mathcal{N}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x$, *pak se rovnají.*

Věta (11 Takzvaná hlavní věta diferenciálního a integrálního počtu V 7.5.15)

Nechť f *a* F *jsou jako výše. Pak*
(i) *funkce* F *je spojitá na* $[a, b]$
(ii) *je-li* f *spojitá v* $x_0 \in (a, b)$, *platí* $F'(x_0) = f(x_0)$ *(analogicky pro jednostrannou spojitost v krajních bodech a jednostranné derivace).*
Speciálně, je-li f *spojitá na* (a, b), *pak* $F' = f$ *na* (a, b).

6.5 Vlastnosti Riemannova integrálu IV

Věta (12 Existence primitivní funkce ke spojité funkci V 7.5.16)

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a, b). Pak zde má primitivní funkci.

Věta (13 Per partes pro Riemannův integrál V 7.5.20)

Nechť $f, g \in C^1([a, b])$. Pak

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f' g \, \mathrm{d}x = [fg]_a^b - (\mathcal{R}) \int_a^b f g' \, \mathrm{d}x.$$

6.5 Vlastnosti Riemannova integrálu IV

Věta (12 Existence primitivní funkce ke spojité funkci V 7.5.16)

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a, b). Pak zde má primitivní funkci.

Věta (13 Per partes pro Riemannův integrál V 7.5.20)

Nechť $f, g \in C^1([a, b])$. Pak

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f' g \, \mathrm{d}x = [fg]_a^b - (\mathcal{R}) \int_a^b f g' \, \mathrm{d}x.$$

Věta (14 O substituci pro Riemannův integrál V 7.5.23)

(i) *Nechť* $\varphi \in C^1([\alpha, \beta])$ *a* $f \in C([a, b])$, *kde* $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$. *Pak*

$$(\mathcal{R}) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (\mathcal{R}) \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) *Nechť* $\varphi \in C^1([\alpha, \beta])$, $\varphi' \neq 0$ *na* $[\alpha, \beta]$, φ *zobrazuje* $[\alpha, \beta]$ *na* $[a, b]$ *a* $f \in C([a, b])$. *Pak*

$$(\mathcal{R}) \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

6.6 Vlastnosti Newtonova integrálu I

Věta (15 Per partes pro Newtonův integrál V 7.6.1)

Nechť $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mají zobecněné primitivní funkce F, G na (a, b). Pak

$$(\mathcal{N}) \int_a^b Fg \,\mathrm{d}x = [FG]_a^b - (\mathcal{N}) \int_a^b fG \,\mathrm{d}x,$$

existuje-li alespoň jeden z Newtonových integrálů a má-li smysl výraz $[FG]_a^b$ (odpovídající limity existují a jsou konečné).

Věta (16 O substituci pro Newtonův integrál V 7.6.2)

Nechť $f, \varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f je definovaná na (a, b), φ zobrazuje (α, β) na (a, b) a má vlastní nenulovou derivaci na (α, β). Pak

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = (\mathcal{N}) \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) \,\mathrm{d}x,$$

má-li alespoň jedna strana smysl a uvažovaná zobecněná primitivní funkce má jen konečně mnoho výjimečných bodů stran derivace.

6.6 Vlastnosti Newtonova integrálu I

Věta (15 Per partes pro Newtonův integrál V 7.6.1)

Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mají zobecněné primitivní funkce F, G na (a, b). Pak

$$(\mathcal{N}) \int_a^b Fg \,\mathrm{d}x = [FG]_a^b - (\mathcal{N}) \int_a^b fG \,\mathrm{d}x,$$

existuje-li alespoň jeden z Newtonových integrálů a má-li smysl výraz $[FG]_a^b$ (odpovídající limity existují a jsou konečné).

Věta (16 O substituci pro Newtonův integrál V 7.6.2)

Nechť $f, \varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f je definovaná na (a, b), φ zobrazuje (α, β) na (a, b) a má vlastní nenulovou derivaci na (α, β). Pak

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = (\mathcal{N}) \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) \,\mathrm{d}x,$$

má-li alespoň jedna strana smysl a uvažovaná zobecněná primitivní funkce má jen konečně mnoho výjimečných bodů stran derivace.

6.6.1 Existence Newtonova integrálu I

Věta (17 Vztah omezenosti a existence Newtonova integrálu V 7.6.4)

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na $(a, b) \setminus K$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a K je konečná množina. Je-li f navíc omezená, je newtonovsky integrovatelná.

Věta (18 Srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu V 7.6.6)

Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$. Pak
(i) *jestliže $f \in C([a, b))$, g je nezáporná newtonovsky integrovatelná na (a, b) a platí $f(x) = O(g(x))$ pro $x \to b_-$, pak i f je newtonovsky integrovatelná na (a, b)*
(ii) *jestliže $f, g \in C([a, b))$ jsou nezáporné, $f(x) = O(g(x))$ a $g(x) = O(f(x))$ pro $x \to b_-$, pak f je newtonovsky integrovatelná na (a, b) právě tehdy, když g je newtonovsky integrovatelná na (a, b)*
(iii) *speciálně pokud $f, g, h \in C([a, b))$ jsou nezáporné, $f(x) = O(g(x))$ a $g(x) = O(f(x))$ pro $x \to b_-$, pak fh je newtonovsky integrovatelná na (a, b) právě tehdy, když gh je newtonovsky integrovatelná na (a, b).*

6.6.1 Existence Newtonova integrálu I

Věta (17 Vztah omezenosti a existence Newtonova integrálu V 7.6.4)

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na $(a, b) \setminus K$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a K je konečná množina. Je-li f navíc omezená, je newtonovsky integrovatelná.

Věta (18 Srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu V 7.6.6)

Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$. Pak
(i) *jestliže $f \in C([a, b))$, g je nezáporná newtonovsky integrovatelná na (a, b) a platí $f(x) = O(g(x))$ pro $x \to b_-$, pak i f je newtonovsky integrovatelná na (a, b)*
(ii) *jestliže $f, g \in C([a, b))$ jsou nezáporné, $f(x) = O(g(x))$ a $g(x) = O(f(x))$ pro $x \to b_-$, pak f je newtonovsky integrovatelná na (a, b) právě tehdy, když g je newtonovsky integrovatelná na (a, b)*
(iii) *speciálně pokud $f, g, h \in C([a, b))$ jsou nezáporné, $f(x) = O(g(x))$ a $g(x) = O(f(x))$ pro $x \to b_-$, pak fh je newtonovsky integrovatelná na (a, b) právě tehdy, když gh je newtonovsky integrovatelná na (a, b).*

Věta (19 Kritérium Abel–Dirichletovo V 7.6.12)

Nechť $F, f, g \in C([a, b))$, $F' = f$ *na* (a, b) *a* g *je monotonní na* $[a, b)$.
(Dirichlet) *Je-li* F *omezená na* (a, b) *a* $\lim_{x \to b_-} g(x) = 0$, *pak* fg *je newtonovsky integrovatelná na* (a, b).
(Abel) *Je-li* f *newtonovsky integrovatelná na* (a, b) *a* g *omezená na* $[a, b)$, *pak* fg *je newtonovsky integrovatelná na* (a, b).

6.7 Věty o střední hodnotě pro Riemannův integrál I

Tvrzení (3 T 7.7.1)

Nechť $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jsou riemannovsky integrovatelné na* $[a, b]$*. Pak i* fg *je riemannovsky integrovatelná na* $[a, b]$*.*

Věta (20 První věta o střední hodnotě integrálního počtu V 7.7.2)

Nechť $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jsou riemannovsky integrovatelné na* $[a, b]$ *a* g *nemění znaménko na* $[a, b]$*. Pak existuje* $c \in [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$ *takové, že*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b fg \, \mathrm{d}x = c(\mathcal{R}) \int_a^b g \, \mathrm{d}x.$$

Je-li dokonce f *spojitá na* $[a, b]$*, existuje* $\xi \in (a, b)$ *takové, že*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b fg \, \mathrm{d}x = f(\xi)(\mathcal{R}) \int_a^b g \, \mathrm{d}x.$$

Speciálně pro f *spojitou na* $[a, b]$ *a* $g \equiv 1$ *máme*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f \, \mathrm{d}x = f(\xi)(b - a).$$

6.7 Věty o střední hodnotě pro Riemannův integrál I

Tvrzení (3 T 7.7.1)

Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou riemannovsky integrovatelné na $[a, b]$. Pak i fg je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$.

Věta (20 První věta o střední hodnotě integrálního počtu V 7.7.2)

Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou riemannovsky integrovatelné na $[a, b]$ a g nemění znaménko na $[a, b]$. Pak existuje $c \in [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$ takové, že

$$(\mathcal{R}) \int_a^b fg \,\mathrm{d}x = c (\mathcal{R}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x.$$

Je-li dokonce f spojitá na $[a, b]$, existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$(\mathcal{R}) \int_a^b fg \,\mathrm{d}x = f(\xi) (\mathcal{R}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x.$$

Speciálně pro f spojitou na $[a, b]$ a $g \equiv 1$ máme

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x = f(\xi)(b - a).$$

Věta (21 Druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu (slabší verze) V 7.7.4)

Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f, g, g' \in C([a, b])$ a g' nemění znaménko. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$(\mathcal{R}) \int_a^b fg \,\mathrm{d}x = g(a)(\mathcal{R}) \int_a^\xi f \,\mathrm{d}x + g(b)(\mathcal{R}) \int_\xi^b f \,\mathrm{d}x.$$

Věta (Druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu V 7.7.7)

Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ a g je monotonní na $[a, b]$. Pak existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že

$$(\mathcal{R}) \int_a^b fg \,\mathrm{d}x = g(a)(\mathcal{R}) \int_a^\xi f \,\mathrm{d}x + g(b)(\mathcal{R}) \int_\xi^b f \,\mathrm{d}x.$$

6.7 Věty o střední hodnotě pro Riemannův integrál II

Věta (21 Druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu (slabší verze) V 7.7.4)

Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f, g, g' \in C([a, b])$ a g' nemění znaménko. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$(\mathcal{R}) \int_a^b fg \,\mathrm{d}x = g(a)(\mathcal{R}) \int_a^\xi f \,\mathrm{d}x + g(b)(\mathcal{R}) \int_\xi^b f \,\mathrm{d}x.$$

Věta (Druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu V 7.7.7)

Nechť f, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ a g je monotonní na $[a, b]$. Pak existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že

$$(\mathcal{R}) \int_a^b fg \,\mathrm{d}x = g(a)(\mathcal{R}) \int_a^\xi f \,\mathrm{d}x + g(b)(\mathcal{R}) \int_\xi^b f \,\mathrm{d}x.$$