Matematická analýza I

Milan Pokorný

Přednáška 5.1.2022

6.2 Darbouxova definice Riemannova integrálu I

Definice (3 Dělení intervalu D 7.2.1)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^{n} \subset \mathbb{R}$ je konečná množina. Řekneme, že D je *dělením* intervalu $[a, b]$, jestliže

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Jsou-li D a D' dvě dělení intervalu $[a, b]$ a platí-li $D \subset D'$, řekneme, že D' je *zjemněním* dělení D.

Definice (4 Dolní a horní Riemannův součet D 7.2.2)

Nechť f, $[a, b]$ a D jsou jako výše. *Dolním Riemannovým součtem* (příslušejícím funkci f a dělení D) nazveme číslo

$$s(f, D) := \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}).$$

Horním Riemannovým součtem nazveme

$$S(f, D) := \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{i-j}).$$

6.2 Darbouxova definice Riemannova integrálu I

Definice (3 Dělení intervalu D 7.2.1)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^{n} \subset \mathbb{R}$ je konečná množina. Řekneme, že D je *dělením* intervalu $[a, b]$, jestliže

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Jsou-li D a D' dvě dělení intervalu $[a, b]$ a platí-li $D \subset D'$, řekneme, že D' je *zjemněním* dělení D.

Definice (4 Dolní a horní Riemannův součet D 7.2.2)

Nechť f, $[a, b]$ a D jsou jako výše. *Dolním Riemannovým součtem* (příslušejícím funkci f a dělení D) nazveme číslo

$$s(f, D) := \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}).$$

Horním Riemannovým součtem nazveme

$$S(f, D) := \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{i-j}).$$

6.2 Darbouxova definice Riemannova integrálu II

Tvrzení (2 O monotonii integrálních součtů T 7.2.5)

Nechť f a $[a, b]$ jsou jako výše a D, D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak
(i) *je-li D zjemněním D_1, platí*

$$s(f, D_1) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq S(f, D_1) \tag{1}$$

(ii) *jsou-li D_1 a D_2 libovolná dělení, platí*

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2) \qquad a \qquad s(f, D_2) \leq S(f, D_1).$$

Definice (5 Horní a dolní Riemannův integrál D 7.2.6)

Nechť f a $[a, b]$ jsou jako výše *Dolním Riemannovým integrálem* nazveme číslo

$$(\mathcal{R}) \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x := \sup_D s(f, D)$$

(supremum bereme přes všechna dělení intervalu $[a, b]$) a *horním Riemannovým integrálem* nazveme

$$(\mathcal{R}) \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\, \mathrm{d}x := \inf_D S(f, D).$$

6.2 Darbouxova definice Riemannova integrálu II

Tvrzení (2 O monotonii integrálních součtů T 7.2.5)

Nechť f a $[a, b]$ jsou jako výše a D, D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak
(i) *je-li D zjemněním D_1, platí*

$$s(f, D_1) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq S(f, D_1) \tag{1}$$

(ii) *jsou-li D_1 a D_2 libovolná dělení, platí*

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2) \qquad a \qquad s(f, D_2) \leq S(f, D_1).$$

Definice (5 Horní a dolní Riemannův integrál D 7.2.6)

Nechť f a $[a, b]$ jsou jako výše *Dolním Riemannovým integrálem* nazveme číslo

$$(\mathcal{R}) \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup_D s(f, D)$$

(supremum bereme přes všechna dělení intervalu $[a, b]$) a *horním Riemannovým integrálem* nazveme

$$(\mathcal{R}) \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf_D S(f, D).$$

6.2 Darbouxova definice Riemannova integrálu III

Definice (6 Riemannův integrál D 7.2.6)

Pokud platí $(\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$, tuto společnou hodnotu nazveme *Riemannovým integrálem* a značíme ji

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V tomto případě také říkáme, že f je *riemannovsky integrovatelná* na $[a, b]$.

6.3 Kritéria existence Riemannova integrálu I

Lemma (1 Kritérium existence Riemannova integrálu L 7.3.1)

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená na $[a, b]$. Pak

$$\textit{existuje} \quad (\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0\, \exists D \quad S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Věta (2 O riemannovské integrovatelnosti monotonní funkce V 7.3.3)

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotonní na $[a, b]$. Pak je zde riemannovsky integrovatelná.

Věta (3 O riemannovské integrovatelnosti spojité funkce V 7.3.5)

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$. Pak je zde riemannovsky integrovatelná.

6.3 Kritéria existence Riemannova integrálu I

Lemma (1 Kritérium existence Riemannova integrálu L 7.3.1)

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená na $[a,b]$. Pak

$$\textit{existuje} \quad (\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0\,\exists D \quad S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

Věta (2 O riemannovské integrovatelnosti monotonní funkce V 7.3.3)

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotonní na $[a,b]$. Pak je zde riemannovsky integrovatelná.

Věta (3 O riemannovské integrovatelnosti spojité funkce V 7.3.5)

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a,b]$. Pak je zde riemannovsky integrovatelná.

6.3 Kritéria existence Riemannova integrálu I

Lemma (1 Kritérium existence Riemannova integrálu L 7.3.1)

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená na $[a, b]$. Pak

$$\textit{existuje} \quad (\mathcal{R})\int_a^b f \,\mathrm{d}x \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0\, \exists D \quad S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Věta (2 O riemannovské integrovatelnosti monotonní funkce V 7.3.3)

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotonní na $[a, b]$. Pak je zde riemannovsky integrovatelná.

Věta (3 O riemannovské integrovatelnosti spojité funkce V 7.3.5)

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$. Pak je zde riemannovsky integrovatelná.

Věta (4 O riemannovské integrovatelnosti funkce spojité až na konečně bodů V 7.3.6)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je omezená na* $[a, b]$ *a spojitá na* $[a, b] \setminus K$*, kde* K *je konečná množina. Pak je* f *na* $[a, b]$ *riemannovsky integrovatelná.*

Definice (7 Riemannovy integrální součty D 7.4.1)

Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení intervalu $[a, b]$. *Normou dělení D* nazýváme číslo

$$\nu(D) := \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} (x_i - x_{i-1}).$$

Dále definujeme množinu

$$N(D) := \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \colon \xi_j \in [x_{j-1}, x_j] \, \forall j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Nechť $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená na $[a, b]$. *Riemannovým integrálním součtem* (odpovídajícím funkci f, dělení D a sadě význačných bodů $\xi \in N(D)$) nazveme číslo

$$\sigma(f, D, \xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

6.4 Ekvivalentní definice Riemannova integrálu II

Definice (8 Riemannova definice integrálu D 7.4.3)

Nechť $\delta > 0$. Označme

$$\mathcal{U}_\delta := \{(D,\xi)\colon \nu(D) < \delta \wedge \xi \in N(D)\}.$$

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená na $[a,b]$ a $A \in \mathbb{R}$. Pak píšeme, že

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f,D,\xi) = A,$$

jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \quad (D,\xi) \in \mathcal{U}_\delta \implies |\sigma(f,D,\xi) - A| < \varepsilon.$$

Číslo A je potom hodnotou Riemannova integrálu f přes interval $[a,b]$.

Poznámka (P 7.4.4)

Konstrukce veličiny $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi)$ proběhla velmi podobným způsobem jako definice limity, a proto se dá dokázat (udělejte si sami jako užitečné cvičení) drobnou modifikací našich postupů z předchozích kapitol:

(i) verze Heineho věty

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A$$

$$\iff \quad \lim_{k\to+\infty} \sigma(f, D^k, \xi^k) = A \quad \text{kdykoliv posloupnost dělení } \{D^k\}_{k=1}^{\infty}$$

$$\text{splňuje } \nu(D^k) \to 0 \text{ a } \xi^k \in N(D^k)\,\forall k \in \mathbb{N}.$$

(ii) verze B–C podmínky

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) \text{ existuje vlastní}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \quad (D^1, \xi^1), (D^2, \xi^2) \in \mathcal{U}_\delta \Rightarrow |\sigma(f, D^1, \xi^1) - \sigma(f, D^2, \xi^2)| < \varepsilon.$$

6.4 Ekvivalentní definice Riemannova integrálu IV

Poznámka (P 7.4.4)

(iii) verze aritmetiky limit (bez součinu a podílu)
Nechť $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A$, $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(g, D, \xi) = B$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f+g, D, \xi) = A + B \qquad \text{a} \qquad \lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(\lambda f, D, \xi) = \lambda A.$$

(iv) verze zachování nerovnosti při limitním přechodu
Nechť $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A$, $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(g, D, \xi) = B$ a existuje $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f, D, \xi) \le \sigma(g, D, \xi)$ na $\mathcal{U}_\delta$. Pak $A \le B$.

Věta (5 Ekvivalence Darbouxovy a Riemannovy definice V 7.4.5)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je omezená na* $[a, b]$. *Pak*

$$(\mathcal{R})\int_a^b f \,\mathrm{d}x = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A.$$

Poznámka (P 7.4.4)

(iii) verze aritmetiky limit (bez součinu a podílu)
Nechť $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A$, $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(g, D, \xi) = B$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f+g, D, \xi) = A + B \qquad \text{a} \qquad \lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(\lambda f, D, \xi) = \lambda A.$$

(iv) verze zachování nerovnosti při limitním přechodu
Nechť $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A$, $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(g, D, \xi) = B$ a existuje $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f, D, \xi) \leq \sigma(g, D, \xi)$ na $\mathcal{U}_\delta$. Pak $A \leq B$.

Věta (5 Ekvivalence Darbouxovy a Riemannovy definice V 7.4.5)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je omezená na* $[a, b]$*. Pak*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A.$$

Definice (9 P 7.4.7)

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$, kde $f_1, f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Potom definujeme

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x := (\mathcal{R}) \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x + \mathrm{i} (\mathcal{R}) \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x$$

za předpokladu, že integrály na pravé straně existují.

6.5 Vlastnosti Riemannova integrálu I

Věta (6 O Riemannově integrálu součtu a násobku V 7.5.1)

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ *a* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jsou riemannovsky integrovatelné na* (a, b)*. Pak*
(i) $(\mathcal{R}) \int_a^b (f+g)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^b f\,\mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \int_a^b g\,\mathrm{d}x$
(ii) $(\mathcal{R}) \int_a^b \alpha f\,\mathrm{d}x = \alpha (\mathcal{R}) \int_a^b f\,\mathrm{d}x.$

Věta (7 Monotonie integrálu, integrál z absolutní hodnoty V 7.5.3)

Nechť funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jsou riemannovsky integrovatelné na* (a, b)*. Pak*
(i) *platí-li* $f \leq g$ *na* $[a, b]$*, je* $(\mathcal{R}) \int_a^b f\,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{R}) \int_a^b g\,\mathrm{d}x$
(ii) *funkce* $|f|$ *je riemannovsky integrovatelná na* (a, b) *a platí*
$|(\mathcal{R}) \int_a^b f\,\mathrm{d}x| \leq (\mathcal{R}) \int_a^b |f|\,\mathrm{d}x$*. Toto tvrzení platí i pro* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*.*

6.5 Vlastnosti Riemannova integrálu I

Věta (6 O Riemannově integrálu součtu a násobku V 7.5.1)

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ *a* $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jsou riemannovsky integrovatelné na* (a, b)*. Pak*

(i) $(\mathcal{R}) \int_a^b (f + g) \, \mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^b f \, \mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \int_a^b g \, \mathrm{d}x$

(ii) $(\mathcal{R}) \int_a^b \alpha f \, \mathrm{d}x = \alpha (\mathcal{R}) \int_a^b f \, \mathrm{d}x.$

Věta (7 Monotonie integrálu, integrál z absolutní hodnoty V 7.5.3)

Nechť funkce f, $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jsou riemannovsky integrovatelné na* (a, b)*. Pak*

(i) *platí-li* $f \leq g$ *na* $[a, b]$, *je* $(\mathcal{R}) \int_a^b f \, \mathrm{d}x \leq (\mathcal{R}) \int_a^b g \, \mathrm{d}x$

(ii) *funkce* $|f|$ *je riemannovsky integrovatelná na* (a, b) *a platí*
$|(\mathcal{R}) \int_a^b f \, \mathrm{d}x| \leq (\mathcal{R}) \int_a^b |f| \, \mathrm{d}x$. *Toto tvrzení platí i pro* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

6.5 Vlastnosti Riemannova integrálu II

Věta (8 Aditivita Riemannova integrálu vzhledem k integračnímu oboru V 7.5.4)

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *omezená na* $[a, b]$ *a* $c \in (a, b)$. *Pak*
(i) $(\mathcal{R}) \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \underline{\int_a^c} f \,\mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \underline{\int_c^b} f \,\mathrm{d}x$
(ii) $(\mathcal{R}) \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \overline{\int_a^c} f \,\mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \overline{\int_c^b} f \,\mathrm{d}x$
(iii) $(\mathcal{R}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^c f \,\mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \int_c^b f \,\mathrm{d}x$, *pokud má alespoň jedna strana smysl*
(iv) *pokud* $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ *a* f *je riemannovsky integrovatelná na* $[a, b]$, *je rovněž riemannovsky integrovatelná na* $[\alpha, \beta]$.

Věta (9 Změna v konečném počtu bodů neovlivní Riemannův integrál V 7.5.8)

Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f *je riemannovsky integrovatelná na* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f = g$ *na* $[a, b] \setminus K$, *kde* K *je konečná. Pak*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x.$$

6.5 Vlastnosti Riemannova integrálu II

Věta (8 Aditivita Riemannova integrálu vzhledem k integračnímu oboru V 7.5.4)

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *omezená na* $[a, b]$ *a* $c \in (a, b)$. *Pak*
(i) $(\mathcal{R}) \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \underline{\int_a^c} f \,\mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \underline{\int_c^b} f \,\mathrm{d}x$
(ii) $(\mathcal{R}) \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \overline{\int_a^c} f \,\mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \overline{\int_c^b} f \,\mathrm{d}x$
(iii) $(\mathcal{R}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^c f \,\mathrm{d}x + (\mathcal{R}) \int_c^b f \,\mathrm{d}x$, *pokud má alespoň jedna strana smysl*
(iv) *pokud* $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ *a* f *je riemannovsky integrovatelná na* $[a, b]$, *je rovněž riemannovsky integrovatelná na* $[\alpha, \beta]$.

Věta (9 Změna v konečném počtu bodů neovlivní Riemannův integrál V 7.5.8)

Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f *je riemannovsky integrovatelná na* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f = g$ *na* $[a, b] \setminus K$, *kde* K *je konečná. Pak*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b g \,\mathrm{d}x = (\mathcal{R}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x.$$

6.5 Vlastnosti Riemannova integrálu III

Věta (10 Vztah Riemannova a Newtonova integrálu V 7.5.9)

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a nechť* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Existují-li* $(\mathcal{R}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x$ *a* $(\mathcal{N}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x$, *pak se rovnají.*

Věta (11 Takzvaná hlavní věta diferenciálního a integrálního počtu V 7.5.15)

Nechť f *a* F *jsou jako výše. Pak*
(i) *funkce* F *je spojitá na* $[a, b]$
(ii) *je-li* f *spojitá v* $x_0 \in (a, b)$, *platí* $F'(x_0) = f(x_0)$ *(analogicky pro jednostrannou spojitost v krajních bodech a jednostranné derivace).*
Speciálně, je-li f *spojitá na* (a, b), *pak* $F' = f$ *na* (a, b).

6.5 Vlastnosti Riemannova integrálu III

Věta (10 Vztah Riemannova a Newtonova integrálu V 7.5.9)

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a nechť* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Existují-li* $(\mathcal{R}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x$ *a* $(\mathcal{N}) \int_a^b f \,\mathrm{d}x$, *pak se rovnají.*

Věta (11 Takzvaná hlavní věta diferenciálního a integrálního počtu V 7.5.15)

Nechť f *a* F *jsou jako výše. Pak*
(i) *funkce* F *je spojitá na* $[a, b]$
(ii) *je-li* f *spojitá v* $x_0 \in (a, b)$, *platí* $F'(x_0) = f(x_0)$ *(analogicky pro jednostrannou spojitost v krajních bodech a jednostranné derivace).*
Speciálně, je-li f *spojitá na* (a, b), *pak* $F' = f$ *na* (a, b).