REGULARITA ŘEŠENÍ NAVIER–STOKESOVÝCH ROVNIC

MILAN POKORNÝ

Obsah

Date: 18. března 2021.

1. Úvod

Cílem tohoto kurzu je seznámit se s dalšími vlastnostmi řešení Navier–Stokesových rovnic. Tento kurz navazuje na přednášku věnované matematické teorii Navier–Stokesových rovnic. Proto všechny důležité pojmy a základní výsledky lze nalézt v učebním textu [7]. V něm se věnujeme především pojmům slabého a Leray–Hopfova řešení (tj. slabé řešení splňující energetickou nerovnost). Nyní se budeme věnovat především tzv. *vhodnému slabému řešení*. Tento pojem je výhodný pro studium částečné regularity a pro lokální výsledky. V druhé části se pak budeme věnovat vybraným novým výsledkům souvisejícím s regularitou řešení. Přesněji, v kapitole 2 zavedeme pojem vhodného slabého řešení, dokážeme jeho existenci a některé základní vlastnosti související s částečnou regularitou řešení. Tato část je založena především na článcích [1], [4] a [6]. Následující kapitola pak vychází z článku [8]. Ukážeme, že pokud je tlak příslušný danému slabému řešení Cauchyovy úlohy omezený zdola, pak je řešení tak hladké, jak umožňují data úlohy. Poslední část, vycházející z [2], ukazuje totéž za předpokladu, že slabé řešení patří navíc do prostoru $L^\infty(0,T;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$.

Nejprve ale připomeneme, co víme o Navier–Stokesových rovnicích. Pro $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ hledáme

$$\mathbf{u}\colon (0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}^N,$$
$$p\colon (0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}$$

takové, že

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}\\ &\operatorname{div}\mathbf{u} = 0\end{aligned}\right\} && \text{v } (0,T)\times\Omega,\\
&\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{u}_0(x) && \text{v } \Omega,\\
&\mathbf{u}(t,x) = 0 && \text{na } (0,T)\times\partial\Omega.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Protože existence klasického řešení není zřejmá, studovali jsme slabé řešení:

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^N) \cap L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$$

takové, že

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^q(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*),\ \ q\geq 1$$

a

$$\Big\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi}\Big\rangle + \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}\rangle$$
$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$$

a s.v. $t\in(0,T)$. Navíc

$$\lim_{t\to 0+} \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{u}_0\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x \qquad \forall\boldsymbol{\varphi}\in(L^2(\Omega))^N.$$

Uvědomme si, že

- $\mathbf{u}\in C([0,T);(L^2(\Omega))^N_w) \Rightarrow$ splnění počáteční podmínky dává smysl
- ze slabé formulace vypadl tlak $\Rightarrow$ je třeba vědět, zda lze tlak rekonstruovat.

Co se týká slabého řešení, dokázali jsme následující výsledek:

Věta 1.1. *Nechť $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ je omezená oblast, $N=2,3$, dále mějme pravou stranu $\mathbf{f}\in L^2((0,T),(W^{-1,2}(\Omega))^N)$ a počáteční podmínku $\mathbf{u}_0\in L^2_{0,div}(\Omega)$. Potom existuje alespoň jedno slabé řešení (1.1); toto řešení navíc splňuje energetickou nerovnost:*

$$\frac12\int_\Omega |\mathbf{u}(t,\cdot)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \leq \frac12\int_\Omega |\mathbf{u}_0(t,\cdot)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^t \langle\mathbf{f},\mathbf{u}\rangle\,\mathrm{d}\tau \tag{1.2}$$

pro s.v. $t \in (0,T)$ *(přičemž změnou na množině míry nula lze dosáhnout toho, aby nerovnost platila* $\forall t \in (0,T)$*).*

Navíc, je-li $N = 2$*, pak toto řešení je jediné na třídě slabých řešení*[1]*. Dále, pro* $N = 2$*, je-li* $\Omega \in C^2$*,* $\mathbf{u}_0 \in W^{1,2}_{0,div}(\Omega)$ *a* $\mathbf{f} \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$*, pak* $\mathbf{u} \in C([0,T];(W^{1,2}(\Omega))^2) \cap L^2(0,T;(W^{2,2}(\Omega))^2)$*,* $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$*.*

Pro případ $N = 3$ jsme analogický výsledek nedostali. Zde

- Platí pouze energetická nerovnost.
- Jednoznačnost není obecně zřejmá, platí jen na třídě slabých řešení splňujících energetickou nerovnost a musíme navíc požadovat
$$\mathbf{u} \in L^t(0,T;(L^s(\Omega))^3) \qquad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} \le 1$$
(dokazovali jsme pouze pro $s > 3$).
- Regularita není zřejmá, platí jen: je-li $\Omega \in C^2$, $\mathbf{f} \in L^2(0,T;(L^2(\Omega)))^3$, $\mathbf{u}_0 \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ a navíc
$$\mathbf{u} \in L^t(0,T;(L^s(\Omega))^3) \qquad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} \le 1,$$
pak
$$\mathbf{u} \in C([0,T);W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)) \cap L^2(0,T;(W^{2,2}(\Omega))^3)$$
(opět jsme dokázali jen pro $s > 3$; případ $s = 3$ bude dokázán v kapitole 4).

Otázka existence tlaku je také značně netriviální. Viděli jsme několik metod, jako nejvýhodnější se ovšem ukázala metoda regularity evolučního Stokesova problému, tzn. uvažujeme úlohu

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{g} \\ &\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ v } (0,T)\times\Omega, \\ &\mathbf{v}(0,x) = \mathbf{u}_0(x) \text{ v } \Omega, \\ &\mathbf{v}(t,x) = 0 \text{ na } (0,T)\times\partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Potom, je-li $\Omega \in C^2$, $\mathbf{g} \in L^t(0,T;(L^s(\Omega))^N)$, $\mathbf{u}_0$ je dostatečně hladká (např. $(W^{1,\infty}(\Omega))^N$), pak $\|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \nabla^2\mathbf{v}, \nabla p\|_{L^t(0,T;L^s(\Omega))} \le C(\|\mathbf{g}\|_{L^t(0,T;(L^s(\Omega))^N)}, \mathbf{u}_0)$.
Pokud položíme $\mathbf{g} = \mathbf{f} - \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$, pak díky jednoznačnosti řešení Stokesova problému máme totéž i pro $\mathbf{u}$ řešení (1.1). Speciálně tedy pro $\mathbf{f}$ a $\mathbf{u}_0$ dostatečně hladkou

$$\|\nabla p\|_{L^t(0,T;(L^s(\Omega))^N)} \le C(\mathbf{f}, \mathbf{u}_0, \|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\|_{L^t(0,T;(L^s(\Omega))^N)}),$$

tj. $\nabla p \in L^t(0,T;(L^s(\Omega))^N)$, kde $\frac{2}{t} + \frac{N}{s} \le N+1$, $1 < s < \frac{N}{N-1}$ a $N = 2,3$.
Pokud navíc nanormujeme tlak tak, aby

$$\int_\Omega p(t,\cdot)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{pro s.v. } t \in (0,T),$$

pak pro $N = 3$ máme

$$p \in L^t(0,T;(L^s(\Omega))^N)$$

pro $\frac{2}{t} + \frac{3}{s} \le 3$, $\frac{3}{2} < s < 3$; speciálně pro $t = s = \frac{5}{3}$

$$p \in L^{\frac{5}{3}}((0,T)\times\Omega).$$

[1] Toto řešení splňuje energetickou rovnost a $\mathbf{u} \in C([0,T];(L^2(\Omega))^2)$.

2. Vhodné slabé řešení

2.1. **Základní pojmy.** Dříve než se pustíme do definice vhodného slabého řešení, provedeme formální odvození. Vezměme $\Phi \in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)$ a formálně násobme (1.1) $2\Phi\mathbf{u}$ a integrujme přes $(0,t)\times\Omega$, $t\le T$. Potom

$$\begin{aligned}
2\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\cdot\mathbf{u}\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}|\mathbf{u}|^2\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
&= -\int_0^t\int_\Omega |\mathbf{u}|^2\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_\Omega |\mathbf{u}|^2(t,\cdot)\Phi(t,\cdot)\,\mathrm{d}x,\\
2\int_0^t\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla|\mathbf{u}|^2\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
&= -\int_0^t\int_\Omega |\mathbf{u}|^2\mathbf{u}\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau,\\
-2\int_0^t\int_\Omega (\Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau &= 2\int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
&\quad +2\int_0^t\int_\Omega (\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
&= 2\int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t\int_\Omega |\mathbf{u}|^2\Delta\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau,\\
2\int_0^t\int_\Omega \nabla p\cdot\mathbf{u}\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau &= -2\int_0^t\int_\Omega p\mathbf{u}\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Celkem tedy máme $\forall\Phi\in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)$ a $\forall t\in(0,T)$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\mathbf{u}|^2(t,\cdot)\Phi(t,\cdot)\,\mathrm{d}x + 2\int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t\int_\Omega |\mathbf{u}|^2\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\Delta\Phi\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
+\int_0^t\int_\Omega (|\mathbf{u}|^2+2p)\mathbf{u}\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau &+ \int_0^t\int_\Omega 2\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Podobně jako u slabého řešení nelze očekávat splnění rovnosti, ale pouze nerovnosti. To nás přivádí k následující definici.

Definice 2.1. Nechť $\mathbf{f}\in L^2(0,T;(L^{\frac{6}{5}}(\Omega))^3)+L^1(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ je omezená oblast. Potom dvojice $(\mathbf{u},p)$ se nazývá vhodným slabým řešením Navier–Stokesových rovnic, jestliže

- $(\mathbf{u},p)$ splňuje rovnice (1.1) ve smyslu distribucí, tj. platí
$$\begin{aligned}
-\int_0^T\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau - \int_0^T\int_\Omega (\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}):\nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau - \int_0^T\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\Delta\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
-\int_0^T\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \int_0^T\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \qquad \forall\boldsymbol{\varphi}\in(C_0^\infty((0,T)\times\Omega))^3
\end{aligned}$$
a
$$\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{pro s.v. } t\in(0,T) \text{ a } \forall\psi\in C_0^\infty(\Omega)$$
- $\mathbf{u}\in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))\cap L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, $p\in L^{\frac{3}{2}}((0,T)\times\Omega)$
- $\forall\Phi\in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)$, $\Phi\ge 0$, je splněna zobecněná energetická nerovnost:

(2.1)
$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\mathbf{u}|^2(t,\cdot)\Phi(t,\cdot)\,\mathrm{d}x + 2\int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau &\le \int_0^t\int_\Omega |\mathbf{u}|^2\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\Delta\Phi\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
+\int_0^t\int_\Omega (|\mathbf{u}|^2+2p)\mathbf{u}\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau &+ 2\int_0^t\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

pro s.v. $t \in (0,T)$.

Poznámka 2.2. Ve formulaci se nevyskytuje počáteční podmínka. Protože na základě prvních dvou bodů víme, že $\mathbf{u} \in C([0,T);(L^2(\Omega))^3_w)$, lze v tomto smyslu předpokládat splnění počáteční podmínky. Protože pro přesnou charakterizaci prostoru, z něhož potřebujeme vzít $\mathbf{u}_0$, by byly potřeba jisté speciální interpolační prostory, budeme nadále předpokládat, že $\mathbf{u}_0$ je dostatečně hladká funkce.

Naším cílem bude dokázat následující dva výsledky:

1) Za jistých předpokladů na $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{f}$, Ω existuje alespoň jedno vhodné slabé řešení.
2) Množina případných singularit řešení ve smyslu Definice 2.1 je dostatečně malá.

Podmínky, za nichž tato tvrzení platí, budeme precizovat později.

Poznámka 2.3. Vše, co jsme dělali na omezené oblasti, lze s trochou práce udělat i pro neomezené oblasti, např. $\mathbb{R}^3$, vnější oblasti, ale i oblasti s nekompaktnímu hranicemi apod. Tím se nebudeme zabývat, stejně jako vynecháme případná zobecnění pro $N \geq 4$.

2.2. **Existence vhodného slabého řešení.** Naším cílem je dokázat následující větu.

Věta 2.4. *Nechť omezená oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je třídy C^2, $\mathbf{u}_0$ je dostatečně hladká, a nechť $\mathbf{f} \in L^2(0,T;(L^{\frac{6}{5}}(\Omega))^3)$. Potom existuje alespoň jedno vhodné slabé řešení Navier–Stokesových rovnic.*

Poznámka 2.5. Předpoklady na $\mathbf{f}$ lze modifikovat, např. $\mathbf{f} \in L^{\frac{5}{3}}(0,T;(L^{\frac{15}{14}}(\Omega))^3) \cap L^1(0,T;(L^2(\Omega))^3)$.

Uvažujme místo (1.1) rovnici

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}^\delta}{\partial t} + (\mathbf{u}^\delta)_\delta \cdot \nabla \mathbf{u}^\delta - \Delta \mathbf{u}^\delta + \nabla p^\delta = \mathbf{f}\\ \operatorname{div} \mathbf{u}^\delta = 0\end{aligned}\right\} \text{ v } (0,T)\times\Omega,\\
&\mathbf{u}^\delta(0,x) = \mathbf{u}_0(x) \text{ v } \Omega,\\
&\mathbf{u}^\delta(t,x) = \mathbf{0} \text{ na } (0,T)\times\partial\Omega,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

kde

$$
(\mathbf{u}^\delta)_\delta(t,x) = (\omega_\delta * \widetilde{\mathbf{u}})(t,x) = \frac{1}{\delta^3}\int_{\mathbb{R}^3} \omega\Big(\frac{x-y}{\delta}\Big)\widetilde{\mathbf{u}}(t,y)\,\mathrm{d}y
$$

pro

$$
\widetilde{\mathbf{u}}(t,y) = \mathbf{u}^\delta(t,y) \quad \text{pro } y \in \Omega, \qquad \widetilde{\mathbf{u}}(t,y) = \mathbf{0} \quad \text{pro } y \notin \Omega,
$$

$\omega(\cdot)$ standardní regularizační jádro, $0 < t < T$. Protože $\mathbf{u}^\delta = \mathbf{0}$ na $\partial\Omega$ ve smyslu stop, je $\widetilde{\mathbf{u}}(t,\cdot) \in (W^{1,2}(\mathbb{R}^3))^3$. Proto také

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{u}^\delta)_\delta(t,x) &= \operatorname{div} \frac{1}{\delta^3}\int_{\mathbb{R}^3} \omega\Big(\frac{x-y}{\delta}\Big)\widetilde{\mathbf{u}}(t,y)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\delta^3}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}\omega\Big(\frac{x-y}{\delta}\Big)\widetilde{u}_i(t,y)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\delta^3}\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i}\omega\Big(\frac{x-y}{\delta}\Big)\widetilde{u}_i(t,y)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\delta^3}\int_{\mathbb{R}^3} \omega\Big(\frac{x-y}{\delta}\Big)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}(t,y)\,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}
$$

To nám zaručuje, že důležitá podmínka pro získání apriorních odhadů je zachována. Navíc je pro

$$
\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3) \cap L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega))^3)
$$

funkce

$$(\mathbf{u}^\delta)_\delta \in L^\infty(0,T;(L^\infty(\Omega))^3) \cap L^2(0,T;(W^{1,\infty}(\Omega))^3),$$

v prostorových proměnných dokonce hladká. Proto máme

Lemma 2.6. *Nechť $\delta > 0$ a nechť jsou splněny předpoklady Věty 2.4. Potom existuje alespoň jedno slabé řešení systému (2.2) ve smyslu definice slabého řešení Navier–Stokesových rovnic.*

Důkaz. Nebudeme ho provádět detailně, protože v podstatě jenom kopírujeme analogický důkaz pro Navier–Stokesovy rovnice. Proto jenom naznačíme základní ideu.

***Krok 1*:** Galerkinova aproximace — je zcela analogická jako u Navier–Stokesových rovnic, jen je mírně modifikovaný nelineární člen, tj. nelinearita je sice kvadratická, ale v jiném tvaru. To ale nic nemění na výsledku lokální existence na $(0,T]$.

***Krok 2*:** • Pokud použijeme jako testovací funkci

$$\mathbf{u}^n(t,x) = \sum_{j=1}^n c_j^n(t)\mathbf{w}^j(x),$$

kde $\{\mathbf{w}^i\}_{i=1}^\infty$ je vhodná báze prostoru $W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, dostaneme

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{u}^n\|_2^2 + \|\nabla\mathbf{u}^n\|_2^2 = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}^n\,\mathrm{d}x \le C\|\mathbf{f}\|_{\frac{6}{5}}\|\nabla\mathbf{u}^n\|_2,$$

zbytek je zřejmý.

• Analogicky jako v případě Navier–Stokesových rovnic lze odhadnout derivaci v čase díky „hladkosti“ konvektivního členu. Dostaneme

$$\Big\|\frac{\partial\mathbf{u}^n}{\partial t}\Big\|_{L^2(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)} \le C(\delta),$$

$$\Big\|\frac{\partial\mathbf{u}^n}{\partial t}\Big\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)} \le C.$$

Co se týká odhadů nezávislých na δ, připomeňme, že

$$\|u_\delta\|_q \le \|u\|_q, \qquad 1 \le q \le \infty,$$

což je důsledek tzv. Hörmander–Youngovy nerovnosti

$$\|u * \omega_\delta\|_q \le \|\omega_\delta\|_1\|u\|_q = \|\omega\|_1\|u\|_q,$$

obecně pak

$$\|u * \omega_\delta\|_r \le \|\omega_\delta\|_p\|u\|_q, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1,$$

a proto se konvektivní člen chová, pokud chceme odhady nezávislé na δ, přesně jako u Navier–Stokesových rovnic.

***Krok 3*:** Limitní přechod — stejně jako u Navier–Stokesových rovnic se použije Aubin–Lionsovo lemma a fakt, že apriorní odhady a silná konvergence v $L^2((0,T)\times\Omega)$ implikují silnou konvergenci v $L^2(0,T;L^q(\Omega))$ pro $1 \le q < 6$ a $L^p(0,T;L^2(\Omega))$ pro $1 \le p < \infty$. (Detaily jsou ponechány čtenáři za cvičení.)

□

Jen pro zdůraznění zopakujme, že předchozí lemma nám dává odhad

$$\|\mathbf{u}^\delta\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)} + \|\nabla\mathbf{u}^\delta\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{3\times 3})} + \Big\|\frac{\partial\mathbf{u}^\delta}{\partial t}\Big\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)} \le C,$$

kde konstanta C nezávisí na δ.

Dalším krokem je přechod $\delta \to 0^+$. Máme následující výsledek.

Lemma 2.7. *Existuje posloupnost $\delta_n \to 0^+$ taková, že*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\delta_n} &\rightharpoonup^* \mathbf{u} \quad &v \quad &L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3), \\ \mathbf{u}^{\delta_n} &\rightharpoonup \mathbf{u} \quad &v \quad &L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega))^3), \\ \mathbf{u}^{\delta_n} &\to \mathbf{u} \quad &v \quad &(L^2((0,T)\times\Omega))^3, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{u}$ *je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic.*

Důkaz. Postupujeme analogicky jako výše. Jediný netriviální člen je člen konvektivní, kde je třeba jisté opatrnosti kvůli nelokálnímu členu. Víme, že $\nabla\mathbf{u}^{\delta_n} \rightharpoonup \nabla\mathbf{u}$ v $(L^2((0,T)\times\Omega))^{3\times 3}$. Proto zbývá ukázat, že

$$(\mathbf{u}^{\delta_n})_{\delta_n} \to \mathbf{u} \text{ v } (L^2((0,T)\times\Omega))^3,$$

neboli

$$\mathbf{u}^{\delta_n} * \omega_{\delta_n} \to \mathbf{u} \text{ v } (L^2((0,T)\times\Omega))^3.$$

Uvědomme si, že víme, že $\mathbf{u}_{\delta_n} \to \mathbf{u}$ v $(L^2((0,T)\times\Omega))^3$, a proto

$$\begin{gathered} \|(\mathbf{u}^{\delta_n})_{\delta_n} - \mathbf{u}\|_{(L^2((0,T)\times\Omega))^3} \\ \leq \|(\mathbf{u}^{\delta_n})_{\delta_n} - \mathbf{u}^{\delta_n}\|_{(L^2((0,T)\times\Omega))^3} + \|\mathbf{u}^{\delta_n} - \mathbf{u}\|_{(L^2((0,T)\times\Omega))^3}. \end{gathered}$$

Zbývá pouze ukázat, že první člen jde k nule. Tedy

$$\begin{aligned} &\|(\mathbf{u}^{\delta_n})_{\delta_n} - \mathbf{u}^{\delta_n}\|^2_{(L^2((0,T)\times\Omega))^3} \\ &= \int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{1}{\delta_n^3} \int_\Omega \omega\Big(\frac{x-y}{\delta_n}\Big)\big(\mathbf{u}^{\delta_n}(t,y) - \mathbf{u}^{\delta_n}(t,x)\big)\,\mathrm{d}y\Big)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \int_\Omega \Big(\int_{B_1(0)} \omega(z)\big(\mathbf{u}^{\delta_n}(t,x-z\delta_n) - \mathbf{u}^{\delta_n}(t,x)\big)\,\mathrm{d}z\Big)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \equiv I_1, \end{aligned}$$

a protože $\mathbf{u}_{\delta_n} \to \mathbf{u}$ v $(L^2((0,T)\times\Omega))^3$, jsou funkce $\{\mathbf{u}^{\delta_n}\}$ stejně spojité v průměru v druhé mocnině, tj.

$$I_1 \leq \int_{B_1(0)} \omega^2(z)\,\mathrm{d}z \int_{B_1(0)} \int_0^T \int_\Omega \big(\mathbf{u}^{\delta_n}(t,x-z\delta_n) - \mathbf{u}^{\delta_n}(t,x)\big)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z \to 0$$

pro $\delta_n \to 0^+$. □

Zbývá se podívat na existenci tlaku a na zobecněnou energetickou nerovnost. Pokud přeneseme konvektivní člen na pravou stranu, dostaneme jak pro limitní Navier–Stokesovy rovnice, tak pro (2.2) následující odhad pro tlak:

$$\begin{aligned} &\|\nabla p\|_{L^t(0,T;(L^s(\Omega))^3)} \\ &\leq C\big(\|\mathbf{f}\|_{L^t(0,T;(L^s(\Omega))^3)} + \|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\|_{L^t(0,T;(L^s(\Omega))^3)}\big) + C_1(\mathbf{u}_0), \\ &\|\nabla p^{\delta_n}\|_{L^t(0,T;(L^s(\Omega))^3)} \\ &\leq C\big(\|\mathbf{f}\|_{L^t(0,T;(L^s(\Omega))^3)} + \|(\mathbf{u}^{\delta_n})_{\delta_n}\cdot\nabla\mathbf{u}^{\delta_n}\|_{L^t(0,T;(L^s(\Omega))^3)}\big) + C_1(\mathbf{u}_0). \end{aligned}$$

Volbou $t = \frac{5}{3}$ a $s = \frac{15}{14}$ dostáváme

$$\begin{aligned} &\|(\mathbf{u}^{\delta_n})_{\delta_n}\cdot\nabla\mathbf{u}^{\delta_n}\|_{L^{\frac{5}{3}}(0,T;(L^{\frac{15}{14}}(\Omega))^3)} \\ &\leq \|(\mathbf{u}^{\delta_n})_{\delta_n}\|_{L^{10}(0,T;(L^{\frac{30}{13}}(\Omega))^3)} \|\nabla\mathbf{u}^{\delta_n}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{3\times 3})} \\ &\leq C\|(\mathbf{u}^{\delta_n})_{\delta_n}\|^{\frac{1}{5}}_{L^2(0,T;(L^6(\Omega))^3)} \|(\mathbf{u}^{\delta_n})_{\delta_n}\|^{\frac{4}{5}}_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)} \|\nabla\mathbf{u}^{\delta_n}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{3\times 3})} \\ &\leq \text{ konst.}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\|\nabla p\|_{L^{\frac{5}{3}}(0,T;(L^{\frac{15}{14}}(\Omega))^3)} \leq C,$$
$$\|\nabla p^{\delta_n}\|_{L^{\frac{5}{3}}(0,T;(L^{\frac{15}{14}}(\Omega))^3)} \leq C,$$

což při normování tlaku

$$\int_\Omega p^{\delta_n}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega p\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall t \in (0,T)$$

dává

$$\|p\|_{L^{\frac{5}{3}}((0,T)\times\Omega)} \leq C_1$$
$$\|p^{\delta_n}\|_{L^{\frac{5}{3}}((0,T)\times\Omega)} \leq C_1,$$

kde C_1 je nezávislá na δ_n. Proto máme pro limitní problém i pro problém (2.2) existenci tlaku; pro (2.2) je tlak stejnoměrně omezen v $L^{\frac{5}{3}}((0,T)\times\Omega)$, a tudíž i v $L^{\frac{3}{2}}((0,T)\times\Omega)$. Tedy limitní dvojice $(\mathbf{u},p)$ je určitě řešením (1.1) ve smyslu distribucí. Zbývá dokázat splnění zobecněné energetické nerovnosti.

Lemma 2.8. *Řešení* $(\mathbf{u},p)$ *splňuje zobecněnou energetickou nerovnost (2.1).*

Důkaz. Protože $(\mathbf{u}^{\delta_n})_{\delta_n}$ je omezená, není těžké si uvědomit, že $\mathbf{u}^{\delta_n}$ je dobrá testovací funkce pro (2.2) s $\delta=\delta_n$. Přesněji, testujeme $2\mathbf{u}^{\delta_n}\Phi$, kde Φ je nezáporná hladká funkce s kompaktním nosičem v $(0,T)\times\Omega$. Pokud budeme opakovat výpočet ze Sekce 2.1, dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\mathbf{u}^{\delta_n}|^2(t,\cdot)\Phi(t,\cdot)\,\mathrm{d}x + 2\int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}^{\delta_n}|^2\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t\int_\Omega |\mathbf{u}^{\delta_n}|^2\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\Delta\Phi\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_\Omega |\mathbf{u}^{\delta_n}|^2(\mathbf{u}^{\delta_n})_{\delta_n}\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \\
&+ 2\int_0^t\int_\Omega p^{\delta_n}\mathbf{u}^{\delta_n}\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + 2\int_0^t\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}^{\delta_n}\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\,.
\end{aligned}$$

Tuto rovnost vynásobíme funkcí $\psi(t)\geq 0$, $\psi(t)\in C_0^\infty(0,T)$, a budeme integrovat přes čas, $t\in(0,T)$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega |\mathbf{u}^{\delta_n}|^2(t,\cdot)\Phi(t,\cdot)\,\mathrm{d}x\psi(t)\,\mathrm{d}t + 2\int_0^T\int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}^{\delta_n}|^2\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\psi(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T\Big[\int_0^t\int_\Omega |\mathbf{u}^{\delta_n}|^2\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\Delta\Phi\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_\Omega |\mathbf{u}^{\delta_n}|^2(\mathbf{u}^{\delta_n})_{\delta_n}\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \\
&\qquad +2\int_0^t\int_\Omega p^{\delta_n}\mathbf{u}^{\delta_n}\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + 2\int_0^t\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}^{\delta_n}\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\Big]\psi(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Nyní provedeme limitu pro $\delta_n\to 0^+$. V prvním členu použijeme fakt, že $\mathbf{u}_{\delta_n}\to\mathbf{u}$ v $(L^2((0,T)\times\Omega))^3$, ve druhém pak Fatouovo lemma. Ve třetím členu se využije silná konvergence (viz Lemma 2.6), ve čtvrtém silná konvergence v $L^3((0,T)\times\Omega)$; ta plyne z odhadu

$$\|\mathbf{u}\|_{(L^{\frac{10}{3}}((0,T)\times\Omega))^3} \leq \|\mathbf{u}\|^{\frac{2}{5}}_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)}\|\mathbf{u}\|^{\frac{3}{5}}_{L^2(0,T;(L^6(\Omega))^3)},$$

a z interpolace L^3 mezi L^2 a $L^{\frac{10}{3}}$. Výpočet pro $(\mathbf{u}^{\delta_n})_{\delta_n}$ je analogický jako dříve, tj. $\|(\mathbf{u}^{\delta_n})_{\delta_n}-\mathbf{u}^{\delta_n}\|_{(L^3((0,T)\times\Omega))^3}\to 0$. V pátém členu použijeme slabou konvergenci

p^{δ_n} v $L^{\frac{5}{3}}((0,T)\times\Omega)$ a silnou konvergenci $\mathbf{u}^{\delta_n}$ v $(L^{\frac{5}{2}}((0,T)\times\Omega))^3$, poslední člen je zřejmý. Proto máme

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega |\mathbf{u}|^2\Phi\,\mathrm{d}x\psi(t)\,\mathrm{d}t + 2\int_0^T\int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\psi(t)\,\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^T\int_0^t\int_\Omega |\mathbf{u}|^2\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\Delta\Phi\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\psi(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_0^t\int_\Omega |\mathbf{u}|^2\mathbf{u}\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\psi(t)\,\mathrm{d}t\\ &+2\int_0^T\int_0^t\int_\Omega p\mathbf{u}\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\psi(t)\,\mathrm{d}t + 2\int_0^T\int_0^t\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\psi(t)\,\mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

tj. díky tomu, že nerovnost platí $\forall\psi\in C_0^\infty(0,T)$, $\psi\ge 0$, dostáváme nerovnost (2.1) s.v. na $(0,T)$. □

Lemma 2.8 dokončuje důkaz Věty 2.4.

2.3. **Částečná regularita vhodného slabého řešení.** Cílem této kapitoly bude charakterizovat množiny případných singularit vhodného slabého řešení. Než se do toho pustíme, musíme nejprve precizovat pojmy jako je singulární a regulární bod, a vyjasnit, co rozumíme pod pojmy k-dimenzionální parabolická míra či k-dimenzionální Hausdorffova míra.

Budeme nadále předpokládat, že $\mathbf{f}=\mathbf{0}$. Pro případ $\mathbf{f}\neq\mathbf{0}$ odkazujeme na článek [4].

Definice 2.9. Nechť $z=(t,x)\in(0,T)\times\Omega$. Řekneme, že z je *regulární bod* vhodného slabého řešení Navier–Stokesových rovnic na $(0,T)\times\Omega$, pokud $\exists U_\delta(z)$ takové, že $\mathbf{u}\in C^{0,\alpha}(U_\delta(z))$ pro jisté $0<\alpha\le 1$. Bod z je *singulární bod* vhodného slabého řešení Navier–Stokesových rovnic na $(0,T)\times\Omega$, pokud není bodem regulárním.

Poznámka 2.10. Hölderovská spojitost rychlosti de facto implikuje i jistou hladkost tlaku, my se ale touto problematikou zabývat nebudeme. Jen zmiňme, že obecně nevíme, zda $\mathbf{u}$ je spojitě diferencovatelné i v čase, a tudíž nemáme plnou regularitu.

Zaveďme následující značení ($z_0=(t_0,x_0)\in(0,T)\times\Omega$):

$$\begin{aligned}Q(z_0,r) &= \big\{z=(t,x)\in(0,T)\times\Omega;\ t\in(t_0-r^2,t_0),\ x\in B_r(x_0)\big\},\\ Q^*(z_0,r) &= \big\{z=(t,x)\in(0,T)\times\Omega;\ t\in\big(t_0-\tfrac{7}{8}r^2,t_0+\tfrac{1}{8}r^2\big),\ x\in B_r(x_0)\big\}.\end{aligned}$$

Definice 2.11. Nechť $X\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, $k\in\mathbb{R}^+$. Potom $\mathcal{P}^k(X)$ definované jako

$$\mathcal{P}^k(X)=\lim_{\delta\to 0}\mathcal{P}^k_\delta(X)=\sup_{\delta>0}\mathcal{P}^k_\delta(X),$$

kde

$$\mathcal{P}^k_\delta(X)=\inf\Big\{\sum_{i=1}^\infty r_i^k;\ X\subset\bigcup_{i=1}^\infty Q(z_i,r_i),\ r_i<\delta\Big\},$$

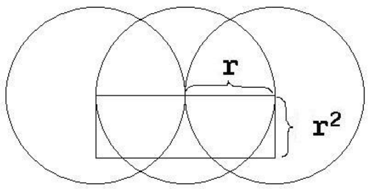
nazýváme *k-dimenzionální parabolická míra* X (tj. pokrýváme X spočetně mnoha parabolickými cylindry) a $\mathcal{H}^k(X)$ definované jako

$$\mathcal{H}^k(X)=\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^k_\delta(X)=\sup_{\delta>0}\mathcal{H}^k_\delta(X),$$

kde

$$\mathcal{H}^k_\delta(X)=\inf\Big\{\sum_{i=1}^\infty r_i^k;\ X\subset\bigcup_{i=1}^\infty B_{r_i}(z_i),\ r_i<\delta\Big\},$$

nazýváme *k-dimenzionální Hausdorffova míra* X (tj. pokrýváme X spočetně mnoha koulemi v $\mathbb{R}^{N+1}$).



Obrázek 1. Pokrytí parabolického válce koulemi

Poznámka 2.12. Platí $\mathcal{H}^k(X) \leq c\mathcal{P}^k(X)$, neboť pro $r < 1$ je situace jako na obrázku 1, tj. množinu pokrytou parabolickým cylindrem pokryji m koulemi o stejném poloměru, m je konečné a nezávislé na δ a k, závisí ale na N. Proto

$$m \sum_i r_i^k = m \sum_i r_i^k = \sum_j r_j^k$$

(neboli $m\times$ pokrytí cylindry = $m\times$ pokrytí koulemi = pokrytí koulemi) a z toho plyne, že

$$\begin{gathered} m \inf \big\{ \textstyle\sum_i r_i^k;\ \text{X pokryto cylindry } Q(z_i, r_i),\ r_i < \delta \big\} \\ \geq \inf \big\{ \textstyle\sum_j r_j^k;\ \ \text{X pokryto koulemi o poloměru } r_j, r_j < \delta \big\} \\ \Rightarrow m\mathcal{P}_\delta^k(X) \geq \mathcal{H}_\delta^k(X), \quad \forall 0 < \delta < 1. \end{gathered}$$

Naším cílem je ukázat následující:

Věta 2.13. *Nechť $D \subset \overline{D} \subset (0,T) \times \Omega$, $S_D = S \cap D$, kde S je množina singulárních bodů, tj. všech bodů z $(0,T) \times \Omega$, které nejsou regulární. Potom $\mathcal{P}^1(S_D) = 0$, tj. jednodimenzionální parabolická míra množiny singulárních bodů ležících uvnitř časoprostorového válce je nulová.*

K důkazu Věty 2.13 budeme potřebovat

Věta 2.14. *Existuje $\epsilon^* > 0$ takové, že pokud*

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{r} \int_{Q^*(z_0, r)} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t < \epsilon^*, \tag{2.3}$$

potom z_0 je regulární bod.

Důkaz Věty 2.14 provedeme v další kapitole. Budeme ještě potřebovat následující pokrývací lemma.

Lemma 2.15. *Nechť $\mathcal{J}$ je třída parabolických cylindrů $Q^*(z,r)$, které jsou obsaženy v omezené podmnožině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Potom existuje nejvýše spočetná podtřída $\mathcal{J}' = \{Q_i^*(z_i, r_i)\}_{i=1}^\infty$ taková, že*

$$Q_i^* \cap Q_j^* = \emptyset, \qquad i \neq j, \tag{2.4}$$

$$\forall Q^* \in \mathcal{J} \quad \exists Q_i^*(z_i, r_i) \in \mathcal{J}' \colon \quad Q^* \subset Q_i^*(z_i, 5r_i). \tag{2.5}$$

Důkaz. Položme $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}$ a postupujme indukcí. Mějme zvolené $\{Q_k^*\}_{k=1}^n$ a položme $\mathcal{J}_n = \{Q^* \in \mathcal{J},\, Q^* \cap Q_k^* = \emptyset,\, 1 \leq k \leq n\}$ (tj. pro $n = 0$ neděláme nic). Je-li $\mathcal{J}_n \neq \emptyset$, zvolme $Q_{n+1}^*(z_{n+1}, r_{n+1}) \in \mathcal{J}_n$ tak, že $\forall Q^*(z,r) \in \mathcal{J}_n \colon r \leq \frac{3}{2} r_{n+1}$. Je-li $\mathcal{J}_n = \emptyset$, pak proces ukončíme a $\mathcal{J}' = \bigcup_{i=1}^n Q_i^*$. Je-li proces nekonečný, pak nutně $r_n \to 0$ (jinak spor s omezeností množiny). Z konstrukce je zřejmé, že všechny cylindry v $\mathcal{J}'$ jsou disjunktní. Zbývá ukázat druhou vlastnost. Vezměme libovolný $\widetilde{Q}^* = \widetilde{Q}^*(z,r) \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}'$. Potom existuje $n \in \mathbb{N}_0$ tak, že $\widetilde{Q}^* \in \mathcal{J}_i$ pro $i = 0, ..., n$ a

$\widetilde{Q}^* \notin \mathcal{J}_{n+1}$ (jinak spor s $r_n \to 0$). Tedy $\widetilde{Q}^* \cap Q^*_{n+1} \neq \emptyset$ a $r_{n+1} \geq \frac{2}{3}r$. Provedeme natažení x-krát a

$$x \cdot r_{n+1} \geq \Big(1 + 2 \cdot \frac{3}{2}\Big) r_{n+1} = 4r_{n+1} \qquad \Longrightarrow \qquad x \geq 4,$$

$$\frac{1}{8}(xr_{n+1})^2 \geq \Big(\frac{1}{8} + \frac{9}{4}\Big) r^2_{n+1} = \frac{19}{8} r^2_{n+1} \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 \geq 19.$$

Tedy stačí uvažovat $x = 5$ a $\widetilde{Q}^* \subset Q^*_{n+1}(z_{n+1}, 5r_{n+1})$. □

Důkaz. (Věta 2.13) Nechť $(\mathbf{u}, p)$ je vhodné slabé řešení a nechť S je jeho singulární množina, S_D její průmět do omezené množiny D ležící uvnitř časoprostorového válce. Potom dle Věty 2.14

$$z = (t, x) \in S_D \Rightarrow \limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{r} \int_{Q^*(z,r)} |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geq \epsilon^*.$$

Nechť V je okolí S_D v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ a nechť $\delta > 0$ je dostatečně malé. Pro každé $(t, x) \in S_D$ zvolme $Q^*(z, r)$ s $r < \delta$ tak, že

$$\frac{1}{r} \int_{Q^*(z,r)} |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geq \frac{\epsilon^*}{2} \qquad \text{a } Q^*(z, r) \subset V.$$

Podle Lemmatu 2.15 víme, že existuje disjunktní třída $\{Q^*_i(z_i, r_i)\}_{i=1}^{\infty}$ tak, že $S_D \subset \bigcup_i Q^*_i(z_i, 5r_i)$ a

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i \leq \frac{2}{\epsilon^*} \sum_i \int_{Q^*_i(z_i,r_i)} |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq \frac{2}{\epsilon^*} \int_V |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq \frac{K}{\epsilon^*}.$$

Uvědomme si, že ($\mathcal{L}^4$ značí čtyřdimenzionální Lebesgueovu míru)

$$\mathcal{L}^4(S_D) \leq C \sum_{i=1}^{\infty} (5r_i)^5 \leq C\delta^4 \sum_{i=1}^{\infty} r_i \leq C \frac{\delta^4}{\epsilon^*},$$

kde $\delta > 0$ lze zvolit libovolně malé, a proto $\mathcal{L}^4(S_D) = 0$. Dále, $\mathcal{P}^1(S_D) \leq \sum_{i=1}^{\infty} 5r_i \leq \frac{5}{\epsilon^*} \int_V |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ pro každé okolí V množiny S_D. Protože S_D má čtyřdimenzionální Lebesgueovu míru nulovou a $\nabla \mathbf{u} \in (L^2((0, T) \times \Omega))^{3\times 3}$, můžeme brát V libovolně malé, a díky absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu je $\mathcal{P}^1(S_D) = 0$. □

Důsledek 2.16. *Množina singulárních časů (tedy časů v $(0, T)$, kde se nachází bod ze singulární množiny S) má $\frac{1}{2}$-dimenzionální Hausdorffovu míru nulovou.*

Důkaz. Je-li $X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, Σ_X projekce X na $\mathbb{R}$ a $\mathcal{P}^1(X) = 0$, pak je $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_X) = 0$. Máme-li totiž X pokryto spočetně mnoha válci s poloměrem $r_i \leq \delta$ takovými, že $\sum_i r_i = o(1)$ pro $\delta \to 0^+$, potom je projekce na časovou osu pokryta spočetně mnoha intervaly délky $\rho_i = r_i^2 \leq \delta^2 = \Delta$. Potom $\sum_i \rho_i^{\frac{1}{2}} = \sum_i r_i = o(1)$ pro $\delta \to 0^+$, tedy i pro $\Delta \to 0^+$. □

Důsledek 2.17. *Jestliže řešení splňuje $\nabla \mathbf{u} \in L^4(0, T; (L^2(\Omega))^{3\times 3})$ (tj. je splněno i $\mathbf{u} \in L^4(0, T; (L^6(\Omega))^3)$), pak je S prázdná.*

Důkaz. Nechť $z = (t, x)$ a počítejme

$$\int_{Q^*(z,r)} |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = \int_{t-\frac{7}{8}r^2}^{t+\frac{1}{8}r^2} \Big(\int_{|x-y|<r} |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}y \Big) \,\mathrm{d}\tau$$
$$\leq Cr \Big(\int_{t-\frac{7}{8}r^2}^{t+\frac{1}{8}r^2} \Big(\int_{|x-y|<r} |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}y \Big)^2 \,\mathrm{d}\tau \Big)^{\frac{1}{2}},$$

a tedy

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{r} \int_{Q^*(z,r)} |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}t$$
$$\leq C \limsup_{r\to 0^+} \Big(\int_{t-\frac{7}{8}r^2}^{t+\frac{1}{8}r^2} \Big(\int_{|x-y|<r} |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}y \Big)^2 \mathrm{d}\tau \Big)^{\frac{1}{2}} = 0$$

díky absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu (integrál je konečný a zmenšuji množinu). □

Poznámka 2.18. Poznamenejme, že $\mathbf{u} \in L^4(0,T;(L^6(\Omega))^3)$ odpovídá přesně Prodi–Serrinovým podmínkám, neboť $\frac{2}{4}+\frac{3}{6}=1$. Obecně, je-li $\nabla\mathbf{u} \in L^p(0,T;(L^q(\Omega))^{3\times 3})$, $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}=2$, potom je možno ukázat, že pro libovolné $\infty \geq q > \frac{3}{2}$, tedy $1 \leq p < \infty$, je řešení regulární a jediné na třídě Leray–Hopfových slabých řešení; důkaz je podobný případu Prodi–Serrinových podmínek pro samotnou rychlost. Poznamenejme, že i $\nabla\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;(L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))^{3\times 3})$ implikuje regularitu, neboť $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$. Navíc, pokud předpokládáme, že $\nabla\mathbf{u} \in L^p(0,T;(L^q(\Omega))^{3\times 3})$ pro p i $q \geq 2$ (tedy $q \in [2,3]$), potom stejně jako výše můžeme ukázat, že

$$\int_{Q^*(z,r)} |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}t = \int_{t-\frac{7}{8}r^2}^{t+\frac{1}{8}r^2} \Big(\int_{|x-y|<r} |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}\tau$$
$$\leq C r^{2\frac{p-2}{p}+3\frac{q-2}{q}} \Big(\int_{t-\frac{7}{8}r^2}^{t+\frac{1}{8}r^2} \Big(\int_{|x-y|<r} |\nabla \mathbf{u}|^q \,\mathrm{d}y \Big)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}\tau \Big)^{\frac{2}{p}},$$

proto pro $2\frac{p-2}{p}+3\frac{q-2}{q}$, tedy $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}=2$, máme, že množina singulárních bodů je prázdná. V průběhu výpočtu jsme použili, že p i $q \geq 2$.

2.4. **Důkaz lokálního kritéria regularity.** V této kapitole dokážeme Větu 2.14, která nám v předchozí části umožnila studovat částečnou regularitu. Bez újmy na obecnosti, kvůli zjednodušení notace, budeme brát $z=(0,0)$ a místo Q^* bereme Q. Případ $z \neq (0,0)$ resp. Q^* lze získat analogicky. Budeme nadále psát Q_r místo $Q((0,0),r)$.

Věta 2.19. *Existují konstanty $\epsilon_0 > 0$, $C_0 > 0$ takové, že pokud pro $(\mathbf{u},p)$ vhodné slabé řešení platí*

$$\int_{Q_1} \big(|\mathbf{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}}\big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leq \epsilon_0, \tag{2.6}$$

pak $\|\mathbf{u}\|_{(C^{0,\alpha}(\overline{Q_k}))^3} \leq C_0$ pro jisté $0 < \alpha \leq 1$, $0 < k \leq 1$.

K důkazu budeme potřebovat několik pomocných tvrzení.

Lemma 2.20. *Nechť $(\mathbf{u}_n,p_n)$ je posloupnost vhodných slabých řešení Navier–Stokesových rovnic splňujících*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(-1,0)} \int_{B_1(0)} |\mathbf{u}_n(t,\cdot)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty, \tag{2.7}$$

$$\int_{Q_1} |\nabla \mathbf{u}_n|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t < \infty, \tag{2.8}$$

$$\int_{Q_1} |p_n|^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t < \infty. \tag{2.9}$$

Je-li $(\mathbf{u},p)$ slabá (či slabá-) limita $(\mathbf{u}_n,p_n)$ v prostorech s výše uvedenými normami, pak $(\mathbf{u},p)$ je vhodné slabé řešení Navier–Stokesových rovnic.*

Důkaz. Důkaz je analogický důkazu Věty 1.1. Potřebujeme silnou konvergenci v $L^3(Q_1)$, na to chceme použít Aubin–Lionsovo lemma. Potřebujeme tedy odhad na časovou derivaci. V distributivním smyslu máme

$$\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} = \Delta \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{u}_n - \nabla p_n$$

a z předpokladů máme omezenost posloupností

- $\Delta \mathbf{u}_n$ v $L^2(-1,0;(W^{-1,2}(B_1))^3)$,
- ∇p_n v $L^{\frac{3}{2}}(-1,0;(W^{-1,\frac{3}{2}}(B_1))^3)$,
- $\mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{u}_n$ v $L^{\frac{5}{3}}(-1,0;(L^{\frac{15}{14}}(B_1))^3)$,

přičemž $L^{\frac{15}{14}}(B_1) \hookrightarrow W^{-1,\frac{5}{3}}(B_1) \hookrightarrow W^{-1,\frac{3}{2}}(B_1) = (W_0^{1,3}(B_1))^*$. Nejhorší informace je z tlaku. Máme tedy, že $\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t}$ je omezeno v prostoru $L^{\frac{3}{2}}(-1,0;(W^{-1,\frac{3}{2}}(B_1))^3)$. Použitím Aubin–Lionsova lemmatu ($W^{1,2}(B_1) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(B_1) \hookrightarrow W^{-1,\frac{3}{2}}(B_1)$) dostáváme $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ v $(L^2(Q_1))^3$, což spolu s omezeností $\mathbf{u}_n$ v $(L^{\frac{10}{3}}(Q_1))^3$ dává $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ v $(L^q(Q_1))^3$ pro $1 \le q < \frac{10}{3}$, tj. i pro $q = 3$. Zbytek důkazu je zřejmý.

□

Lemma 2.21. *Existuje $\epsilon_0 > 0$ takové, že pokud $\int_{Q_1} \left(|\mathbf{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \le \epsilon_0$ pro $(\mathbf{u}, p)$ vhodné slabé řešení Navier–Stokesových rovnic, potom*

$$(2.10)\quad \Big(\theta^{-5} \int_{Q_\theta} \frac{|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\theta|^3}{\theta^{\alpha_0}} \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{3}} + \theta\Big(\theta^{-5} \int_{Q_\theta} \frac{|p - p_\theta(t)|^{\frac{3}{2}}}{\theta^{\alpha_0}} \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\Big)^{\frac{2}{3}}$$
$$\le \frac{1}{2}\Big(\Big(\int_{Q_1} |\mathbf{u}|^3 \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{3}} + \Big(\int_{Q_1} |p|^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\Big)^{\frac{2}{3}}\Big)$$

pro jisté $\theta \in (0,1)$ (lze brát $\theta \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$, $\underline{\theta} = \overline{\theta}^2$, $0 < \underline{\theta} < \overline{\theta} < 1$) a $\alpha_0 \in (0, \frac{1}{2})$, kde

$$(2.11)\quad \mathbf{u}_\theta = \theta^{-5} \int_{Q_\theta} \mathbf{u}(\tau, y) \,\mathrm{d}y\, \mathrm{d}\tau, \qquad p_\theta(t) = \theta^{-3} \int_{B_\theta} p(t, y) \,\mathrm{d}y, \quad -\theta^{-2} \le t \le 0.$$

Důkaz. Tvrzení budeme dokazovat sporem. Nechť existuje posloupnost $\epsilon_i \to 0^+$ tak, že $\epsilon_i = \|\mathbf{u}_i\|_{(L^3(Q_1))^3} + \|p_i\|_{L^{\frac{3}{2}}(Q_1)}$, kde $(\mathbf{u}_i, p_i)$ je posloupnost vhodných slabých řešení, a nechť zároveň (2.10) neplatí pro žádné $\theta \in (0,1)$ a pro dvojice $(\mathbf{u}_i, p_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Označme $\mathbf{U}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\epsilon_i}$ a $P_i = \frac{p_i}{\epsilon_i}$. Tyto veličiny splňují ve slabém smyslu

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + \epsilon_i \mathbf{U}_i \cdot \nabla \mathbf{U}_i - \Delta \mathbf{U}_i + \nabla P_i = \mathbf{0},$$
$$\operatorname{div} \mathbf{U}_i = 0;$$

navíc to je zřejmě vhodné slabé řešení, a je tak splněna zobecněná energetická nerovnost pro každé $\Phi \in C_0^\infty((-1,0] \times B_1), \Phi \ge 0$ ve tvaru

$$\int_{B_1} \Phi(t,\cdot)|\mathbf{U}_i(t,\cdot)|^2 \,\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^t \int_{B_1} \Phi |\nabla \mathbf{U}_i|^2 \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$$
$$\le \int_{-1}^t \int_{B_1} |\mathbf{U}_i|^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Delta \Phi\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \int_{-1}^t \int_{B_1} \left(2P_i + \epsilon_i |\mathbf{U}_i|^2\right) \mathbf{U}_i \cdot \nabla \Phi \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}t.$$

Máme $\|\mathbf{U}_i\|_{(L^3(Q_1))^3} \le 1$, $\|P_i\|_{L^{\frac{3}{2}}(Q_1)} \le 1$, tedy také máme, že $\mathbf{U}_i$ je omezeno v $L^\infty_{loc}((-1,0];(L^2_{loc}(B_1))^3)$ a v $L^2_{loc}((-1,0];(W^{1,2}_{loc}(B_1))^3)$; proto též v $(L^{\frac{10}{3}}_{loc}((-1,0] \times B_1))^3$. Použitím podobného postupu jako v důkazu Lemmatu 2.20 dostaneme

$$\mathbf{U}_i \rightharpoonup \mathbf{U} \quad \text{v } (L^3(Q_1))^3,$$
$$P_i \rightharpoonup P \quad \text{v } L^{\frac{3}{2}}(Q_1),$$

a také
$$\mathbf{U}_i \to \mathbf{U} \quad \text{ v } (L^q_{loc}((-1,0] \times B_1))^3 \text{ pro } 1 \le q < \frac{10}{3},$$
kde dvojice $(\mathbf{U}, P)$ řeší ve slabém smyslu
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \Delta \mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{U} = 0. \end{aligned}$$
Ze slabé zdola polospojitosti norem dostáváme $\|\mathbf{U}\|_{(L^3(Q_1))^3} \le 1$, $\|P\|_{L^{\frac{3}{2}}(Q_1)} \le 1$. Nyní můžeme využít znalostí o Stokesově problému, speciálně toho, že $\mathbf{U}$ je hölderovsky spojitá funkce v čase, řekněme s exponentem $2\alpha_0$, a lipschitzovsky spojitá v prostoru. (Důkaz je technický, ale v podstatě standardní a dobře známý.) Proto máme
$$\theta^{-5} \int_{Q_\theta} |\mathbf{U} - \mathbf{U}_\theta|^3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \le C\theta^{-5} \int_{Q_\theta} \big(\theta^{2\alpha_0} + \theta\big)^3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \le \frac{1}{2} \frac{1}{5^3} \theta^{\alpha_0}$$
volbou dostatečně malého $\theta \le \frac{1}{2}$. Navíc máme $\mathbf{U}_i \to \mathbf{U}$ v $(L^3_{loc}((-1,0] \times B_1)^3$, a proto
$$\theta^{-5} \int_{Q_\theta} |\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i,\theta}|^3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \le \frac{1}{5^3} \theta^{\alpha_0} \tag{2.12}$$
pro dostatečně velké i_0, $i \ge i_0$.

Nyní uvažujme tlak. Máme
$$\Delta P_i = -\epsilon_i \operatorname{div} \operatorname{div} (\mathbf{U}_i \otimes \mathbf{U}_i) = -\epsilon_i \frac{\partial U_i^k}{\partial x_l} \frac{\partial U_i^l}{\partial x_k}.$$
Můžeme tedy psát $P_i = h_i + g_i$, kde h_i je harmonická funkce v $B_{\frac{2}{3}}$ pro $t \in (-1,0)$, a g_i splňuje
$$\begin{aligned} \Delta g_i &= -\epsilon_i \frac{\partial U_i^k}{\partial x_l} \frac{\partial U_i^l}{\partial x_k} \quad \text{ v } B_{\frac{2}{3}}, \\ g_i &= 0 \quad \text{ na } \partial B_{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$
Položme
$$\begin{aligned} h_{i,\theta}(t) &= \theta^{-3} \int_{B_\theta} h_i(t,x) \, \mathrm{d}x, \\ g_{i,\theta}(t) &= \theta^{-3} \int_{B_\theta} g_i(t,x) \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$
Potom máme
$$\begin{aligned} \int_{Q_\theta} |P_i - P_{i,\theta}|^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \le C\Big(\int_{Q_\theta} |h_i - h_{i,\theta}|^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ + \int_{Q_\theta} |g_i|^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_{Q_\theta} |g_{i,\theta}|^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \Big). \end{aligned}$$
Nyní
$$\begin{aligned} \int_{Q_\theta} |g_i|^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_{Q_\theta} |g_{i,\theta}|^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \le C\epsilon_i^{\frac{3}{2}} \int_{Q_\theta} |\mathbf{U}_i|^3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ + \int_{Q_\theta} \theta^{-\frac{9}{2}} \left(\int_{B_\theta} |g_i(t,y)|^{\frac{3}{2}} \theta^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \le C\epsilon_i^{\frac{3}{2}} \int_{Q_\theta} |\mathbf{U}_i|^3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$
kde jsme použili Hölderovu nerovnost s jedničkou a také Fubiniho větu. Dále
$$\int_{Q_\theta} |h_i - h_{i,\theta}|^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \le C\theta^3 \theta^{\frac{3}{2}},$$

protože h_i jsou harmonické funkce, tedy hladké v prostorových proměnných. Navíc jsou stejnoměrně omezené v $L^{\frac{3}{2}}(-1,0;L^{\frac{3}{2}}(B_{\frac{2}{3}}))$, protože g_i i P_i jsou takové. Dohromady tak

$$\theta\Big(\theta^{-5}\int_{Q_\theta}|P_i-P_{i,\theta}|^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{2}{3}}\leq C\theta^{\frac{2}{3}}+C\epsilon_i\theta^{-\frac{7}{3}}\leq\frac{1}{5}\theta^{\frac{2}{3}\alpha_0}$$

pro dostatečně malé ϵ_i a vhodné θ. Celkem tedy

$$\Big(\theta^{-5}\int_{Q_\theta}\frac{|U_i-U_{i,\theta}|^3}{\theta^{\alpha_0}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{3}}+\theta\Big(\theta^{-5}\int_{Q_\theta}\frac{|P_i-P_{i,\theta}|^{\frac{3}{2}}}{\theta^{\alpha_0}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{2}{3}}\leq\frac{2}{5},$$

což vede ke sporu. □

Nyní už přistoupíme k důkazu Věty 2.19.

Důkaz. (Věta 2.19) Nechť $\int_{Q_1}\big(|\mathbf{u}|^3+|p|^{\frac{3}{2}}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leq\epsilon_0$. Tedy

$$\Big(\int_{Q_1}|\mathbf{u}|^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{3}}+\Big(\int_{Q_1}|p|^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{2}{3}}\leq\widetilde{\epsilon_0}$$

pro $\widetilde{\epsilon_0}$ malé. Definujme

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1(t,x)&=\theta^{-\frac{\alpha_0}{3}}\big(\mathbf{u}(\theta^2t,\theta x)-\mathbf{u}_\theta\big)\\ p_1(t,x)&=\theta^{1-\frac{\alpha_0}{3}}\big(p(\theta^2t,\theta x)-p_\theta(\theta^2t)\big).\end{aligned}$$

Přepočítáme jednotlivé diferenciální výrazy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial t}(t,x)&=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau}(\theta^2t,\theta x)\theta^{2-\frac{\alpha_0}{3}}\\ \mathbf{u}_1\cdot\nabla\mathbf{u}_1(t,x)&=\mathbf{u}\cdot\nabla_y\mathbf{u}(\theta^2t,\theta x)\theta^{1-\frac{2\alpha_0}{3}}-\mathbf{u}_\theta\cdot\nabla_y\mathbf{u}(\theta^2t,\theta x)\theta^{1-\frac{2\alpha_0}{3}}\qquad\text{nebo jinak}\\ \mathbf{u}_1\cdot\nabla\mathbf{u}_1(t,x)&=\mathbf{u}\cdot\nabla_y\mathbf{u}(\theta^2t,\theta x)\theta^{1-\frac{2\alpha_0}{3}}-\mathbf{u}_\theta\cdot\nabla_x\mathbf{u}_1(t,x)\theta^{-\frac{\alpha_0}{3}}\\ \Delta\mathbf{u}_1(t,x)&=\Delta_y\mathbf{u}(\theta^2t,\theta x)\theta^{2-\frac{\alpha_0}{3}}\\ \nabla p_1(t,x)&=\nabla_yp(\theta^2t,\theta x)\theta^{2-\frac{\alpha_0}{3}}\end{aligned}$$

a z Navier–Stokesových rovnic pro $(\mathbf{u},p)$ dostaneme rovnici pro $(\mathbf{u}_1,p_1)$

$$\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial t}+\theta\Big(\mathbf{u}_\theta+\theta^{\frac{\alpha_0}{3}}\mathbf{u}_1\Big)\cdot\nabla\mathbf{u}_1+\nabla p_1-\Delta\mathbf{u}_1=0\quad\text{v }Q_1.$$

Použijeme Lemma 2.21 pro dvojici $(\mathbf{u},p)$:

$$\Big(\theta^{-5}\int_{Q_\theta}\frac{|\mathbf{u}(t,x)-\mathbf{u}_\theta|^3}{\theta^{\alpha_0}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{3}}+\theta\Big(\theta^{-5}\int_{Q_\theta}\frac{|p(t,x)-p_\theta(t)|^{\frac{3}{2}}}{\theta^{\alpha_0}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{2}{3}}\leq\frac{1}{2}\widetilde{\epsilon_0}.$$

Substitucí $x=\theta y$, $t=\theta^2\tau$ máme $(\tau,y)\in Q_1$ a

$$\Big(\int_{Q_1}|\mathbf{u}_1(\tau,y)|^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau\Big)^{\frac{1}{3}}+\theta\Big(\int_{Q_1}|p_1(\tau,y)|^{\frac{3}{2}}\theta^{-\frac{3}{2}+\frac{\alpha_0}{2}-\alpha_0}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau\Big)^{\frac{2}{3}}\leq\frac{1}{2}\widetilde{\epsilon_0};$$

protože je mocnina u θ záporná a $\theta<1$, je také

$$\Big(\int_{Q_1}|\mathbf{u}_1(\tau,y)|^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau\Big)^{\frac{1}{3}}+\Big(\int_{Q_1}|p_1(\tau,y)|^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau\Big)^{\frac{2}{3}}\leq\frac{1}{2}\widetilde{\epsilon_0}.$$

Nyní chceme použít podobné lemma jako Lemma 2.21 pro $(\mathbf{u}_1,p_1)$ a pro $\theta\in(\underline{\theta},\overline{\theta})$, $\underline{\theta}=\overline{\theta}^2$. Limitní problém je zde

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{U}_2}{\partial t}+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{U}_2-\Delta\mathbf{U}_2+\nabla P_2&=\mathbf{0},\\ \operatorname{div}\mathbf{U}_2&=0\end{aligned}$$

pro $\mathbf{b} = \theta(\mathbf{u})_\theta$ konstantní vektor. Není to tedy Stokesův problém, ale máme stejné vlastnosti řešení, speciálně také hölderovskou spojitost. Poznamenejme, že máme též $\operatorname{div}(\mathbf{u}_\theta \cdot \nabla \mathbf{u}_i) = 0$. Nyní

$$\theta^{-5} \int_{Q_\theta} \frac{|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1,\theta}|^3}{\theta^{\alpha_0}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \theta^{-10} \int_{Q_{\theta^2}} \frac{|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\theta^2}|^3}{\theta^{2\alpha_0}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$
$$\theta\Big(\theta^{-5} \int_{Q_\theta} \frac{|p_1 - p_{1,\theta}(t)|^{\frac{3}{2}}}{\theta^{\alpha_0}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{2}{3}} = \theta^{2+\frac{\alpha_0}{3}} \Big(\theta^{-10} \int_{Q_{\theta^2}} \frac{|p - p_{\theta^2}(t)|^{\frac{3}{2}}}{\theta^{2\alpha_0}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{2}{3}},$$

a proto iterací dostaneme

$$r^{-5} \int_{Q_r} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_r|^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le C\overline{\epsilon}_0 r^{\alpha_0} \quad \forall r \in (0, \overline{\theta}), \tag{2.13}$$

což implikuje hölderovskou spojitost — viz níže. □

Poznámka 2.22. To, že je $\mathbf{u}$ hölderovsky spojitá, plyne z teorie Morrey–Campanatových prostorů. My je zavádět nebudeme, jen ukážeme, jak se hölderovská spojitost dokáže. Máme

$$\frac{1}{r^{5+\alpha_0}} \int_{Q_{((t_0,x_0);r)}} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{(t_0,x_0);r}|^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le C, \quad \alpha_0 > 0, r \in (0, \overline{\theta}), (t_0, x_0) \in \overline{Q}_\beta,$$
$$0 < \beta \le 1, \quad \mathbf{u}_{(t_0,x_0);r} = \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_{((t_0,x_0),r)}} \mathbf{u} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Pracujme pro jednoduchost s $(t_0, x_0) = (0, 0)$. Pro $R_0 = \frac{\overline{\theta}}{2}$, $R_{i+1} = \frac{R_i}{2}$ máme

$$|\mathbf{u}_{R_i} - \mathbf{u}_{R_{i+1}}|^3 \le C\left(|\mathbf{u}_{R_i} - \mathbf{u}(t,x)|^3 + |\mathbf{u}(t,x) - \mathbf{u}_{R_{i+1}}|^3\right)$$

a po integraci $\int_{Q_{R_{i+1}}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} &|\mathbf{u}_{R_i} - \mathbf{u}_{R_{i+1}}|^3 \\ &\le C R_{i+1}^{-5} \Big(\int_{Q_{R_i}} |\mathbf{u}_{R_i} - \mathbf{u}(t,x)|^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{Q_{R_{i+1}}} |\mathbf{u}(t,x) - \mathbf{u}_{R_{i+1}}|^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big) \\ &\hspace{20em} \le C R_i^{\alpha_0}. \end{aligned}$$

Proto

$$|\mathbf{u}_{R_0} - \mathbf{u}_{R_{n+1}}| \le C \sum_{i=1}^n R_0^{\alpha_0/3} 2^{-i\alpha_0/3} \le C R_0^{\alpha_0/3}.$$

Podobně též

$$|\mathbf{u}_{R_n} - \mathbf{u}_{R_{n+m}}| \le C R_n^{\alpha_0/3}.$$

Odtud vidíme, že $\mathbf{u}_{R_n}$ je cauchyovská posloupnost, a tedy existuje $\lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_{R_n} = \overline{\mathbf{u}}$, která je rovna $\mathbf{u}(0,0)$.[2] Proto

$$|\mathbf{u}(0,0) - \mathbf{u}_{(0,0);R}| \le C R^{\frac{\alpha_0}{3}}.$$

Celou konstrukci lze provést pro skoro všechny body časoprostorového válce, přičemž odhad výše je stejnoměrný vzhledem k $(t,x) \in \overline{Q}_r$. Máme tedy pro $R = |z_1 - z_2| = \max\{|x_1 - x_2|, \sqrt{|t_1 - t_2|}\}$

$$|\mathbf{u}(z_1) - \mathbf{u}(z_2)| \le |\mathbf{u}(z_1) - \mathbf{u}_{z_1;2R}| + |\mathbf{u}_{z_1;2R} - \mathbf{u}_{z_2;2R}| + |\mathbf{u}_{z_2;2R} - \mathbf{u}(z_2)|.$$

[2] Ve skutečnosti je limita pro s.v. $(t,x) \in \overline{Q}_r$ rovna $\mathbf{u}(t,x)$. Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $(0,0)$ je takový bod.

První a třetí člen lze odhadnout shora výrazem $CR^{\frac{\alpha_0}{3}}$, zatímco druhý člen odhadneme pomocí Hölderovy nerovnosti

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{u}_{z_1;2R} - \mathbf{u}_{z_2;2R}| \\
&\le \frac{1}{|S|}\Big(\int_{Q(z_1;2R)} |\mathbf{u}_{z_1;2R} - \mathbf{u}(z)|\,\mathrm{d}z + \int_{Q(z_2,2R)} |\mathbf{u}_{z_2;2R} - \mathbf{u}(z)|\,\mathrm{d}z\Big) \\
&\qquad\qquad \le C\frac{1}{R^5} R^{\frac{1}{3}(5+\alpha_0)} R^{5\frac{2}{3}} = CR^{\frac{\alpha_0}{3}},
\end{aligned}$$

kde $S = Q(z_1, 2R) \cap Q(z_2, 2R)$. Proto

$$|\mathbf{u}(z_1) - \mathbf{u}(z_2)| \le CR^{\frac{\alpha_0}{3}} \le C|z_1 - z_2|^{\frac{\alpha_0}{3}}.$$

Hölderovská spojitost je dokázána.

Zaveďme nyní následující značení:

$$\begin{aligned}
A(r) &= \sup_{-r^2\le t\le 0} \frac{1}{r}\int_{B_r} |\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x, \\
B(r) &= \frac{1}{r}\int_{Q_r} |\nabla \mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
C(r) &= \frac{1}{r^2}\int_{Q_r} |\mathbf{u}|^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
D(r) &= \frac{1}{r^2}\int_{Q_r} |p|^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Lemma 2.23. *Pro* $0 \le r \le \rho$ *platí*

$$C(r) \le K\Big[\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^3 A^{\frac{3}{2}}(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^3 A^{\frac{3}{4}}(\rho) B^{\frac{3}{4}}(\rho)\Big]. \tag{2.15}$$

Důkaz. Označme $\overline{f_\rho} = \frac{1}{|B_\rho|}\int_{B_\rho} f\,\mathrm{d}x$. Potom

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x &\le \int_{B_r} \big(|\mathbf{u}|^2 - \overline{(|\mathbf{u}|^2)_\rho}\big)\,\mathrm{d}x + \int_{B_r} \overline{(|\mathbf{u}|^2)_\rho}\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_{B_\rho} \big||\mathbf{u}|^2 - \overline{(|\mathbf{u}|^2)_\rho}\big|\,\mathrm{d}x + \int_{B_r} \overline{(|\mathbf{u}|^2)_\rho}\,\mathrm{d}x \\
&\le K\rho\int_{B_\rho} |\nabla(|\mathbf{u}|^2)|\,\mathrm{d}x + \Big(\frac{r}{\rho}\Big)^3\int_{B_\rho} |\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x \\
&\le K\rho\int_{B_\rho} |\mathbf{u}||\nabla \mathbf{u}|\,\mathrm{d}x + \Big(\frac{r}{\rho}\Big)^3\int_{B_\rho} |\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

díky Poincarého nerovnosti

$$\int_\Omega |\mathbf{w} - \overline{\mathbf{w}_\Omega}|\,\mathrm{d}x \le (\operatorname{diam}\,\Omega) K \int_\Omega |\nabla \mathbf{w}|\,\mathrm{d}x,$$

kde konstanta nezávisí na Ω. Proto

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x &\le K\rho\Big(\int_{B_\rho} |\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{B_\rho} |\nabla \mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\frac{r}{\rho}\Big)^3\int_{B_\rho} |\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x \\
&\le K\rho^{\frac{3}{2}} A^{\frac{1}{2}}(\rho)\Big(\int_{B_\rho} |\nabla \mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\frac{r}{\rho}\Big)^3 \rho A(\rho).
\end{aligned}$$

Dále

$$\int_{B_r} |\mathbf{u}|^3 \,\mathrm{d}x \le K\Big(\int_{B_r} |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{4}} \Big(\int_{B_r} |\mathbf{u}|^6 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{12}}$$
$$\le K\Big(\int_{B_r} |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{4}} \Big(\int_{B_r} |\nabla\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{4}} + K(r)\Big(\int_{B_r} |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{2}},$$

kde pro kouli $B_r \subset \mathbb{R}^3$ lze konstantu $K(r)$ lze určit pomocí škálování:

$$\int_{B_1} |\mathbf{w}|^3 \,\mathrm{d}x \le K\Big(\int_{B_1} |\mathbf{w}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{4}} \Big(\int_{B_1} |\nabla_x\mathbf{w}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{4}} + K(1)\Big(\int_{B_1} |\mathbf{w}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{2}},$$

$\mathbf{w}(x) = \mathbf{u}(rx)$, $y = rx$, $\nabla_x = r\nabla_y$. Tedy

$$\frac{1}{r^3}\int_{B_r} |\mathbf{u}|^3 \,\mathrm{d}y \le K\Big(\frac{1}{r^3}\Big)^{\frac{3}{4}} \Big(\int_{B_r} |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{3}{4}} \Big(\int_{B_r} |\nabla_y\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{3}{4}} \Big(\frac{1}{r^3}\Big)^{\frac{3}{4}} (r^2)^{\frac{3}{4}}$$
$$+ K(1)\Big(\frac{1}{r^3}\Big)^{\frac{3}{2}} \Big(\int_{B_r} |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{3}{2}},$$

a odtud $K(r) = \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}$. Proto

$$\int_{B_r} |\mathbf{u}|^3 \,\mathrm{d}x \le K\Big(\int_{B_r} |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{4}} \Big(\int_{B_r} |\nabla\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{4}} + \frac{K}{r^{\frac{3}{2}}}\Big(\int_{B_r} |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{2}}$$
$$\le K\Big(\int_{B_\rho} |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{4}} \Big(\int_{B_\rho} |\nabla\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{4}} + \frac{K}{r^{\frac{3}{2}}}\Big(\int_{B_r} |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{2}}$$
$$\le K\rho^{\frac{3}{4}} A^{\frac{3}{4}}(\rho)\Big(\int_{B_\rho} |\nabla\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{4}}$$
$$+ \frac{K}{r^{\frac{3}{2}}}\Big[\Big(\rho^{\frac{3}{2}} A^{\frac{1}{2}}(\rho)\Big(\int_{B_\rho} |\nabla\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^{\frac{3}{2}} + \Big(\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^3 \rho A(\rho)\Big)^{\frac{3}{2}}\Big]$$
$$\le K\Big[\rho^{\frac{3}{4}} A^{\frac{3}{4}}(\rho)\Big(\int_{B_\rho} |\nabla\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{4}} + \frac{\rho^{\frac{9}{4}}}{r^{\frac{3}{2}}} A^{\frac{3}{4}}(\rho)\Big(\int_{B_\rho} |\nabla\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{4}} + \frac{r^3}{\rho^3} A^{\frac{3}{2}}(\rho)\Big].$$

Nyní budeme integrovat přes čas $\int_{-r^2}^0 \cdot \,\mathrm{d}t$:

$$\int_{Q_r} |\mathbf{u}|^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le K\Big[\int_{-r^2}^0 \Big(\int_{B_\rho} |\nabla\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{4}} \mathrm{d}t\Big(\rho^{\frac{3}{4}} A^{\frac{3}{4}}(\rho) + \frac{\rho^{\frac{9}{4}}}{r^{\frac{3}{2}}} A^{\frac{3}{4}}(\rho)\Big) + \frac{r^5}{\rho^3} A^{\frac{3}{2}}(\rho)\Big]$$
$$\le K r^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{Q_\rho} |\nabla\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{3}{4}} \Big(\rho^{\frac{3}{4}} A^{\frac{3}{4}}(\rho) + \frac{\rho^{\frac{9}{4}}}{r^{\frac{3}{2}}} A^{\frac{3}{4}}(\rho)\Big) + K\frac{r^5}{\rho^3} A^{\frac{3}{2}}(\rho).$$

Odtud

$$C(r) \le K\frac{r^3}{\rho^3} A^{\frac{3}{2}}(\rho) + K A^{\frac{3}{4}}(\rho) B^{\frac{3}{4}}(\rho)\Big[\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\frac{3}{2}} + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^3\Big],$$

a protože $\rho \ge r$, je $\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{3}{2}}} \le \frac{\rho^3}{r^3}$, čímž konečně dostáváme

$$C(r) \le K\Big[\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^3 A^{\frac{3}{2}}(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^3 A^{\frac{3}{4}}(\rho) B^{\frac{3}{4}}(\rho)\Big].$$

Důkaz je hotov. □

Lemma 2.24. *Pro* $0 < r \le \rho$ *platí*

$$D(r) \le K\Big[\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^2 A^{\frac{3}{4}}(\rho) B^{\frac{3}{4}}(\rho) + \frac{r}{\rho} D(\rho)\Big]. \tag{2.16}$$

Důkaz. Víme, že tlak lze psát jako $p = p_1 + p_2$, kde

$$\begin{aligned} \Delta p_2 &= 0 \quad \text{v}\, B_\rho \\ \Delta p_1 &= -\operatorname{div}\operatorname{div}\Big(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} - \overline{(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})_\rho}\Big) \quad \text{v}\, B_\rho, \\ p_1 &= 0 \quad \text{na}\, \partial B_\rho. \end{aligned}$$

Proto díky Calderón–Zygmundově teorii

$$\int_{B_1} |p_1|^{\frac32}\,\mathrm{d}x \le K\int_{B_1} |\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} - \overline{(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})_1}|^{\frac32}\,\mathrm{d}x \le K\Big(\int_{B_1} |\nabla(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})|\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac32}.$$

Pomocí Poincarého nerovnosti a škálování dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} |p_1|^{\frac32}\,\mathrm{d}x \le K\|\nabla(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\|^{\frac32}_{L^1(B_\rho)} &\le K\Big(\int_{B_\varrho} |\nabla\mathbf{u}||\mathbf{u}|\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac32} \\ &\le K\rho^{\frac34} A^{\frac34}(\rho)\Big(\int_{B_\rho} |\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac34}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\int_{Q_\rho} |p_1|^{\frac32}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le K\rho^{\frac34} A^{\frac34}(\rho)\rho^{\frac12}\Big(\frac{1}{\rho}\int_{Q_\rho} |\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac34}\rho^{\frac34} = K\rho^2 A^{\frac34}(\rho)B^{\frac34}(\rho).$$

Proto

$$\int_{Q_\rho} |p_2|^{\frac32}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le K\Big(\int_{Q_\rho} |p|^{\frac32}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{Q_\rho} |p_1|^{\frac32}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big) \le K\varrho^2\Big[D(\rho) + A^{\frac34}(\rho)B^{\frac34}(\rho)\Big].$$

Protože p_2 je harmonická v B_ρ, máme

$$\frac{1}{r^3}\int_{B_r} |p_2|^{\frac32}\,\mathrm{d}x \le \frac{K}{\rho^3}\int_{B_\rho} |p_2|^{\frac32}\,\mathrm{d}x,$$

kde K nezávisí na ρ a r. Toto plyne z věty o střední hodnotě pro harmonické funkce. Je-li $\frac12\rho \le r \le \rho$, tvrzení je zřejmé. Proto stačí předpokládat, že $r < \frac12\rho$. V tomto případě pro libovolné $x \in B_r$ a $s < \frac12\rho$ máme

$$p_2(x) = \frac{1}{4\pi s^2}\int_{\partial B_s(x)} p_2(y)\,\mathrm{d}S_y,$$

tedy

$$s^2|p_2(x)|^{\frac32} \le C\int_{\partial B_s(x)} |p_2(y)|^{\frac32}\,\mathrm{d}S_y.$$

Integrujeme-li tuto nerovnost přes $s \in (0, \frac12\rho)$, dostáváme

$$|p(x)|^{\frac32} \le \frac{C}{\rho^3}\int_{B_{\frac12\rho}(x)} |p_2|^{\frac32}\,\mathrm{d}y \le \frac{C}{\rho^3}\int_{B_\rho} |p_2|^{\frac32}\,\mathrm{d}y.$$

Pokud tuto nerovnost integrujeme přes B_r, dostáváme dokazované tvrzení. Proto pro $r \le \rho$

$$\frac{1}{r^3}\int_{Q_r} |p_2|^{\frac32}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \frac{K}{\rho^3}\int_{Q_\rho} |p_2|^{\frac32}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
D(r) = \frac{1}{r^2}\int_{Q_r} |p|^{\frac32}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &\le \frac{K}{r^2}\Big(\int_{Q_r}|p_1|^{\frac32}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{Q_r}|p_2|^{\frac32}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)\\
&\le K\Big(\frac{1}{r^2}\int_{Q_r}|p_1|^{\frac32}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{r}{\rho}\frac{1}{\rho^2}\int_{Q_\rho}|p_2|^{\frac32}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)\\
&\le K\Big[\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^2 A^{\frac34}(\rho)B^{\frac34}(\rho) + \frac{r}{\rho}D(\rho) + \frac{r}{\rho}A^{\frac34}(\rho)B^{\frac34}(\rho)\Big],\\
&\le K\Big[\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^2 A^{\frac34}(\rho)B^{\frac34}(\rho) + \frac{r}{\rho}D(\rho)\Big],
\end{aligned}
$$

neboť $0 < r \le \rho$. □

Nyní se můžeme pustit do důkazu Věty 2.14.

Důkaz. (Věty 2.14) Bez újmy na obecnosti uvažujme $z_0 = (0,0)$, Q^* nahradíme Q. Vezměme $r \le \frac{\rho}{2}$ a zobecněnou energetickou nerovnost (2.1) s

$$
\Phi\begin{cases} = 1 & \text{na}\, Q_r,\\ = 0 & \text{na}\, (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^3)\backslash Q_\rho,\\ \in C^\infty & \text{na}\, Q_\rho\backslash Q_r,\end{cases}
$$

kde $0 \le \Phi \le 1$ a $\nabla^k\Phi \le \frac{K}{\rho^k}$, $k = 1,2$, $\frac{\partial\Phi}{\partial t} \le \frac{K}{\rho^2}$. Potom máme

$$
\begin{aligned}
&\sup_{-r^2\le t\le 0}\frac{1}{r}\int_{B_r}|\mathbf{u}|^2(t,\cdot)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{Q_r}|\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \frac{K}{r}\int_{Q_\rho}|\mathbf{u}|^2\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\Delta\Phi\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\frac{K}{r}\int_{Q_\rho}\Big(|\mathbf{u}|^2 - \overline{|\mathbf{u}|^2_\rho}\Big)\mathbf{u}\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{K}{r}\int_{Q_\rho}2p\,\mathbf{u}\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Nalevo máme $A(r)+B(r)$, odhadujeme členy napravo:

$$
|\mathcal{I}_1| \le \frac{K}{r}\frac{1}{\rho^2}\Big(\int_{Q_\rho}|\mathbf{u}|^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac23}\rho^{\frac53} \le K\frac{\rho}{r}C^{\frac23}(\rho).
\tag{2.18}
$$

Pro druhý člen platí (bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $\rho \le 1$)

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{I}_2| &\le \frac{K}{r\rho}\Big(\int_{Q_\rho}|\mathbf{u}|^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac13}\Big(\int_{Q_\rho}\big||\mathbf{u}|^2 - \overline{|\mathbf{u}|^2_\rho}\big|^{\frac32}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac23}\\
&\le \frac{K}{r\rho^{\frac13}}C^{\frac13}(\rho)\int_{Q_\rho}|\nabla|\mathbf{u}|^2|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\le \frac{K}{r\rho^{\frac13}}C^{\frac13}(\rho)\sup_{-\rho^2\le t\le 0}\Big(\int_{B_\rho}|\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac12}\Big(\int_{Q_\rho}|\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\Big(\int_{-\rho^2}^0 1\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\\
&\le \frac{K\rho^2}{r\rho^{\frac13}}C^{\frac13}(\rho)A^{\frac12}(\rho)B^{\frac12}(\rho) \le K\Big(\frac{\rho}{r}\Big)A^{\frac12}(\rho)B^{\frac12}(\rho)C^{\frac13}(\rho).
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Odhadneme poslední člen

$$
|\mathcal{I}_3| \le \frac{K}{r\rho}\Big(\int_{Q_\rho}|\mathbf{u}|^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac13}\Big(\int_{Q_\rho}|p|^{\frac32}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac23} \le K\Big(\frac{\rho}{r}\Big)C^{\frac13}(\rho)D^{\frac23}(\rho).
\tag{2.20}
$$

Dohromady dostáváme

$$
A^{\frac32}(r) \le K\Big[\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\frac32}C(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\frac32}A^{\frac34}(\rho)B^{\frac34}(\rho)C^{\frac12}(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\frac32}C^{\frac12}(\rho)D(\rho)\Big].
\tag{2.21}
$$

Z Lemmatu 2.24 máme

$$D^2(r) \le K\Big[\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^4 A^{\frac{3}{2}}(\rho)B^{\frac{3}{2}}(\rho) + \Big(\frac{r}{\rho}\Big)^2 D^2(\rho)\Big]. \tag{2.22}$$

Proto celkem

$$\begin{aligned} A^{\frac{3}{2}}(r) + D^2(r) \le K\Big\{ &\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\frac{3}{2}} C(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\frac{3}{2}} A^{\frac{3}{2}}(\rho)B^{\frac{3}{2}}(\rho) \\ &+\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\frac{3}{2}} D^2(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^4 A^{\frac{3}{2}}(\rho)B^{\frac{3}{2}}(\rho) + \Big(\frac{r}{\rho}\Big)^2 D^2(\rho)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Nyní použijeme (2.23) s $r := r/2$, $\rho := r$ a dostáváme

$$A^{\frac{3}{2}}\Big(\frac{r}{2}\Big) + D^2\Big(\frac{r}{2}\Big) \le K\Big(C(r) + A^{\frac{3}{2}}(r)B^{\frac{3}{2}}(r) + D^2(r)\Big). \tag{2.24}$$

Dále použijeme Lemma 2.23, (2.21), (2.22) a máme

$$\begin{aligned} A^{\frac{3}{2}}\Big(\frac{r}{2}\Big) + D^2\Big(\frac{r}{2}\Big) \le K\Big\{ &\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^3 A^{\frac{3}{2}}(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^3 A^{\frac{3}{4}}(\rho)B^{\frac{3}{4}}(\rho) \\ +B^{\frac{3}{2}}(r)\Big[&\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\frac{3}{2}} C(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\frac{3}{2}} A^{\frac{3}{2}}(\rho)B^{\frac{3}{2}}(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\frac{3}{2}} D^2(\rho)\Big] \\ &+\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^4 A^{\frac{3}{2}}(\rho)B^{\frac{3}{2}}(\rho) + \Big(\frac{r}{\rho}\Big)^2 D^2(\rho)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Člen $C(\rho)$ odhadneme znovu pomocí Lemmatu 2.23, pro $r = \rho$. Celkem tedy

$$\begin{aligned} A^{\frac{3}{2}}\Big(\frac{r}{2}\Big) + D^2\Big(\frac{r}{2}\Big) \le K\Big\{&\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^3 A^{\frac{3}{2}}(\rho) + \Big(\frac{r}{\rho}\Big)^2 D^2(\rho) \\ +B^{\frac{3}{2}}(r)\Big[\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\alpha} A^{\frac{3}{2}}(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\beta} A^{\frac{3}{2}}(\rho)B^{\frac{3}{2}}(\rho) &+ \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\gamma} D^2(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\delta} B^{\frac{3}{2}}(\rho)\Big] \\ &+\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\varepsilon} A^{\frac{3}{2}}(\rho)B^{\frac{3}{2}}(\rho)\Big\} \end{aligned} \tag{2.26}$$

pro jistá α, β, γ, δ, $\varepsilon > 0$. Volme tedy $r = \theta\rho$, $0 < \theta < 1$ s θ dostatečně malým a použijeme předpoklad z Věty 2.14 pro ϵ^* dostatečně malé. Máme

$$A^{\frac{3}{2}}\Big(\frac{1}{2}\theta\rho\Big) + D^2\Big(\frac{1}{2}\theta\rho\Big) \le \frac{1}{2}\big[A^{\frac{3}{2}}(\rho) + D^2(\rho)\big] + \widetilde{\epsilon}_1^* \tag{2.27}$$

pro pevné $\theta \in (0,1)$, $\widetilde{\epsilon}_1^* \ll 1$ a libovolné $\rho > 0$. Označme $\theta_1 = \frac{\theta}{2}$. Potom iterováním (2.27) dostáváme

$$A^{\frac{3}{2}}\big(\theta_1^{k+1}\rho\big) + D^2\big(\theta_1^{k+1}\rho\big) \le \frac{1}{2^{k+1}}\big[A^{\frac{3}{2}}(\rho) + D^2(\rho)\big] + \epsilon_1^* \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Lemma 2.23 dává

$$C(\theta_1^{k+1}\rho) \le K\Big(A^{\frac{3}{2}}\big(\theta_1^{k+1}\rho\big) + B^{\frac{3}{2}}\big(\theta_1^{k+1}\rho\big)\Big) \le \frac{K}{2^{k+1}}\big[A^{\frac{3}{2}}(\rho) + D^2(\rho)\big] + \epsilon_2^*.$$

Celkem tedy pro jisté $\theta_1 \in (0,1)$ a libovolné $\rho > 0$ platí

$$C\big(\theta_1^{k+1}\rho\big) + D\big(\theta_1^{k+1}\rho\big) \le \epsilon_0,$$

kde ϵ_0 je číslo z Věty 2.19.

Nyní si stačí uvědomit, že je-li $(\mathbf{u}, p)$ řešením Navier-Stokesových rovnic, pak

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\lambda(t,x) &= \lambda\mathbf{u}(\lambda^2 t, \lambda x), \\ p_\lambda(t,x) &= \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x) \end{aligned}$$

řeší tutéž rovnici, přičemž

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{u}}(\rho) &= C_{\mathbf{u}_\rho}(1), \\ D_p(\rho) &= D_{p_\rho}(1), \end{aligned}$$

neboť

$$\int_{Q_1} |\mathbf{u}_\rho(t,x)|^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{\rho^3}{\rho^5}\int_{Q_1} |\mathbf{u}(\rho^2 t,\rho x)|^3 \rho^5 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\rho^2}\int_{Q_\rho} |\mathbf{u}(\tau,y)|^3 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau$$

$$\int_{Q_1} |p_\rho(t,x)|^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{\rho^3}{\rho^5}\int_{Q_1} |p(\rho^2 t,\rho x)|^{\frac{3}{2}} \rho^5 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\rho^2}\int_{Q_\rho} |p(\tau,y)|^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau,$$

a tudíž jsou splněny předpoklady Věty 2.19. Důkaz Věty 2.14 je hotov. □

3. Regularita při tlaku omezeném zdola

Nyní se budeme zabývat Cauchyovou úlohou pro Navier–Stokesovy rovnice a ukážeme, že když je tlak omezený zdola (podmínka bude ještě obecnější), pak je odpovídající řešení Navier–Stokesových rovnic regulární, tedy tak hladké, jak umožňují data úlohy. Připomeňme, že tlak je určen až na aditivní konstantu, tedy de facto můžeme brát v reálných situacích tlak nezáporný, jestliže je zdola omezený. V případě, že tlak je příliš nízký, začnou se v tekutině objevovat bublinky, tj. model tekutiny přestává platit. Proto je tato podmínka fyzikálně rozumná.

V našem výkladu budeme postupovat podle práce [8]. Cílem bude dokázat následující větu.

Věta 3.1. *Nechť* $\mathbf{u}$ *je slabé Leray-Hopfovo řešení a lokálně v prostoru vhodné slabé řešení Navier–Stokesových rovnic s* $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ *a* $\mathbf{u}_0 \in W^{1,2}_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3)$ *a nechť tlak* p *je „normalizovaný" tlak příslušející k* $\mathbf{u}$. *Předpokládejme, že existuje funkce* g: $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ *taková, že* $\forall t_0 > 0\ \exists R_0 = R_0(t_0)$ *tak, že*

$$\mathcal{A}(t_0) = \sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\ \sup_{t\in[t_0-R_0^2,t_0]} \int_{B_{R_0}(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x < +\infty \tag{3.1}$$

a $t \mapsto \int_{B_R(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x$ *je* $\forall x_0 \in \mathbb{R}^3$, $R \in (0,R_0]$ *spojitá v* t_0 *zleva. Buď*

$$|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 2p(t,x) \le g(t,x), \qquad t\in(0,\infty),\ x\in\mathbb{R}^3, \tag{3.2}$$

nebo

$$p(t,x) \ge -g(t,x), \qquad t\in(0,\infty),\ x\in\mathbb{R}^3. \tag{3.3}$$

Potom $\mathbf{u}$ *je hölderovsky spojitá na* $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$, *a proto je hladká a jednoznačně určená na třídě slabých Leray-Hopfových řešení.*

Poznámka 3.2. Speciálně $g = konst$ podmínku (3.1) splňuje, tj. je-li normalizovaný tlak p (viz níže) omezený zdola, pak je řešení hladké. Existují i jiné, méně průhledné podmínky na tlak, které dávají tento výsledek.

Poznámka 3.3. Leray-Hopfovo řešení určitě existuje. My jsme dělali důkaz pro omezenou oblast s homogenní Dirichletovou podmínkou; fakt, že $\Omega = \mathbb{R}^3$, situaci příliš nekomplikuje, spíše naopak. Stačí si například uvědomit, že pro $\Omega_n = B_n(0)$ získáme posloupnost $\mathbf{u}_n$ omezenou v $L^\infty(0,T;(L^2(\mathbb{R}^3))^3) \cap L^2(0,T;(W^{1,2}(\mathbb{R}^3))^3)$ (po prodloužení nulou) a standardním postupem dostaneme řešení na $\mathbb{R}^3$ (důkaz lze dělat i přímo Galerkinovou metodou).

Poznámka 3.4. Mírně delikátní je otázka volby reprezentanta tlaku. Jestliže budeme brát $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, tj.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} \quad & \text{na } (0,T)\times\mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad & \text{na } (0,T)\times\mathbb{R}^3, \\ \mathbf{u}(0,x) = \mathbf{u}_0(x) \quad & \text{na } \mathbb{R}^3, \end{aligned} \tag{3.4}$$

pak můžeme brát

$$p(t,x) = p_0(t,x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \operatorname{div}\operatorname{div}\big(\mathbf{u}(t,y)\otimes\mathbf{u}(t,y)\big)\,\mathrm{d}y.$$

Důvodem je, že tlak z (3.4) splňuje

$$\Delta p(t,x) = -\operatorname{div}\operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})(t,x).$$

Také $p_0(t,x)$ splňuje tuto rovnici (viz fundamentální řešení Laplaceovy rovnice). Uvědomme si dále, že (s užitím substituce $z = x-y$)

$$\begin{aligned}
4\pi\frac{\partial}{\partial x_i}p_0(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}\operatorname{div}\operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})(t,y)\,\mathrm{d}y\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|}\Big)\operatorname{div}\operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})(t,y)\,\mathrm{d}y\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\epsilon(0)}\Big(\frac{\partial}{\partial z_i}\frac{1}{|z|}\Big)\operatorname{div}\operatorname{div}\big(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\big)(t,x-z)\,\mathrm{d}z\\
&+\int_{B_\epsilon(0)}\Big(\frac{\partial}{\partial z_i}\frac{1}{|z|}\Big)\operatorname{div}\operatorname{div}\big(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\big)(t,x-z)\,\mathrm{d}z\Big) = \mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

Vidíme, že $\mathcal{I}_2 = 0$. Nyní můžeme upravit předposlední člen výrazu (3.5):

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 = \lim_{\epsilon\to 0}\Big(&\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\epsilon(0)}\Big(\frac{\partial^2}{\partial z_j\partial z_i}\frac{1}{|z|}\Big)\Big(u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\Big)(t,x-z)\,\mathrm{d}z\\
&-\int_{\partial B^\epsilon(0)}\Big(\frac{\partial}{\partial z_i}\frac{1}{|z|}\Big)n_j\Big(u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\Big)(t,x-z)\,\mathrm{d}S\Big).
\end{aligned}$$

Nyní ($n_j = \frac{-z_j}{|z|}$)

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B^\epsilon(0)}\Big(\frac{\partial}{\partial z_i}\frac{1}{|z|}\Big)\frac{z_j}{|z|}(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})_j(t,x-z)\,\mathrm{d}S\\
&= -\int_{\partial B^\epsilon(0)}\frac{z_iz_j}{|z|^4}(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})_j(t,x-z)\,\mathrm{d}S \to -\frac{4\pi}{3}(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})_i(t,x),
\end{aligned}$$

dále

$$\begin{aligned}
&-\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\epsilon(0)}\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{z_i}{|z|^3}\Big)(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})_j(t,x-z)\,\mathrm{d}z\\
&= \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\epsilon(0)}\Big(\frac{3z_iz_j}{|z|^5}-\frac{\delta_{ij}}{|z|^3}\Big)(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})_j(t,x-z)\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

kde $\Big(\frac{3z_iz_j}{|z|^5}-\frac{\delta_{ij}}{|z|^3}\Big)$ je Calderón–Zygmundovo jádro, a proto

$$\|\nabla p_0(t,\cdot)\|_{(L^q(\mathbb{R}^3))^3} \le C\|(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})(t,\cdot)\|_{(L^q(\mathbb{R}^3))^3},\quad 1<q<\infty.$$

Například pro $q = \frac{15}{14}$ máme

$$\begin{aligned}
\|\nabla p_0\|_{(L^{\frac{15}{14}}(\mathbb{R}^3))^3} &\le C\|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\|_{(L^{\frac{15}{14}}(\mathbb{R}^3))^3} \le C\|\nabla\mathbf{u}\|_{(L^2(\mathbb{R}^3))^{3\times 3}}\|\mathbf{u}\|_{(L^{\frac{30}{13}}(\mathbb{R}^3))^3}\\
&\le C\|\nabla\mathbf{u}\|^{\frac{6}{5}}_{(L^2(\mathbb{R}^3))^{3\times 3}}\|\mathbf{u}\|^{\frac{4}{5}}_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3},
\end{aligned}$$

tj. $\nabla p_0 \in (L^{\frac{15}{14}}(\mathbb{R}^3))^3$ pro s.v. $t\in(0,T)$. Nyní, z nám již známých důvodů (viz minulý semestr — omezená oblast)[3] víme, že tlak z (3.4) splňuje

$$\nabla p \in L^t(0,T;(L^s(\mathbb{R}^3))^3)\quad \text{pro } \frac{2}{t}+\frac{3}{s}\le 4 \text{ tj. } s = \frac{15}{14} \Rightarrow \frac{2}{t} = 4-\frac{42}{15} = \frac{18}{15} \Rightarrow t = \frac{5}{3},$$

[3]Důkaz je pro celý prostor analogický, v lecčems dokonce jednodušší.

tj. $\nabla p \in L^{\frac{5}{3}}(0,T;(L^{\frac{15}{14}}(\mathbb{R}^3))^3)$, a proto také funkce $q(t,\cdot) := p(t,\cdot) - p_0(t,\cdot)$ je harmonická na $\mathbb{R}^3$ a splňuje

$$\nabla q(t,\cdot) \in (L^{\frac{15}{14}}(\mathbb{R}^3))^3,$$

z čehož plyne, že $q(t,x) = C(t)$, tedy q je prostorová konstanta. Proto budeme (jak je tomu i ve Větě 3.1) po celou dobu předpokládat, že tlak $p = p_0$.

Uvědomme si, že každé hladké slabé řešení je zároveň i vhodným slabým řešením. Proto na chvíli uvažujme, že pracujeme s vhodnými slabými řešeními. Zvolíme si takového reprezentanta, že

(3.6)

$$\text{(i)} \quad \liminf_{t\to t_0} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x \geq \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(t_0,x)|^2 \,\mathrm{d}x, \quad t_0 \in (0,\infty)$$

$$\text{(ii)} \quad t \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(t,x)\cdot \boldsymbol{w}(x)\,\mathrm{d}x \text{ je spojitá funkce} \,\forall t \in (0,\infty),\ \forall \boldsymbol{w} \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3.$$

Důkaz. (Předpokladu (3.6)) Připomeňme, že v omezené podmnožině $\mathbb{R}^3$ je množina singulárních bodů malá (má 1-dimenzionální parabolickou i Hausdorffovu míru nulovou a díky Větě 2.19 jsou vně dostatečně velké koule pouze regulární body).

V regulárních bodech (tj. s.v.) máme

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{u}(t,x) = \mathbf{u}(t_0,x), \tag{3.7}$$

a proto z Fatouova lemmatu plyne (i). Dále z (i) plyne

$$\|\mathbf{u}(t_0,\cdot)\|_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathbb{R}^3))^3)} \quad \forall t_0.$$

Díky Vitaliho větě máme, že $t \mapsto \|\mathbf{u}(t,\cdot)\|_{(L^r(B_R))^3}$ je spojitá funkce pro $r \in [1,2)$. Tedy

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(t,\cdot)\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(t_0,\cdot)\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}x\Big|\\ &\leq \Big|\int_{\mathbb{R}^3} \big(\mathbf{u}(t,\cdot)-\mathbf{u}(t_0,\cdot)\big)\cdot\mathbf{w}_n\,\mathrm{d}x\Big| + \Big|\int_{\mathbb{R}^3} \big(\mathbf{u}(t,\cdot)-\mathbf{u}(t_0,\cdot)\big)\cdot(\mathbf{w}-\mathbf{w}_n)\,\mathrm{d}x\Big|,\end{aligned}$$

kde $\mathbf{w}_n \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^3))^3$ je posloupnost aproximující funkci $\mathbf{w}$ v $(L^2(\mathbb{R}^3))^3$. Volbou dostatečně velkého n je druhý integrál dostatečně malý, zatímco první integrál je pro dané n malý, pokud je t dostatečně blízko t_0. Odtud plyne, opět díky Vitaliho větě a (3.7), nejen (ii), ale i to, že $\mathbf{u} \in C([0,T],(L^r_{loc}(\mathbb{R}^3))^3)$ pro $r < 2$. □

Lemma 3.5. *Nechť* $\mathbf{u}$ *splňuje (3.6),* $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ *je omezená oblast,* $t_0 < \infty$*,* $0 < \delta_0 < \sqrt{t_0}$*. Nechť*

(3.8)

$$\begin{aligned}&a(\Omega_0,t_0,\delta_0)\\ &= \sup\Big\{\frac{1}{R}\int_{B_R(x_0)} |\mathbf{u}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x,\ x_0\in\Omega_0,\ t\in[t_0-\delta_0^2,t_0],\ 0<R\leq\delta_0\Big\} < +\infty.\end{aligned}$$

Potom

$$\lim_{t\to t_0^-} \int_{\Omega_0} |\mathbf{u}(t,x)-\mathbf{u}(t_0,x)|^2\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.9}$$

Důkaz. Uvědomme si, že nám díky (3.6) (ii) stačí ukázat, že

$$\lim_{t\to t_0^-} \int_{\Omega_0} |\mathbf{u}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_0} |\mathbf{u}(t_0,x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.10}$$

Zjevně, je-li každý bod (t_0, x), $x \in \Omega_0$ regulární, pak (3.10) platí. Označme Σ množinu singulárních bodů. Víme, že $\mathcal{P}^1(\Sigma) = \mathcal{H}^1(\Sigma) = 0$. Proto $\forall \gamma > 0$ existuje spočetná třída množin tvaru

$$b_i^{\gamma, t_0} = B_{\gamma R_i}(x_i^\gamma) \times \{t = t_0\}$$

tak, že ${}_\gamma R_i \le d_0$, $\Sigma \cap (\overline{\Omega_0} \times \{t = t_0\}) \subset \bigcup b_i^{\gamma, t_0}$, $\sum_i {}_\gamma R_i \le \gamma$. Fixujme $\epsilon > 0$ a položme

$$\gamma = \frac{\epsilon}{8a(\Omega_0, t_0, \delta_0)}.$$

Potom pro $t \in [t_0 - \delta_0^2, t_0]$

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\bigcup_i B_{\gamma R_i}(x_i^\gamma)} \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 - |\mathbf{u}(t_0,x)|^2\big)\,\mathrm{d}x \Big| \\
&\le \sum_i \Big(\int_{B_{\gamma R_i}(x_i^\gamma)} \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 + |\mathbf{u}(t_0,x)|^2\big)\,\mathrm{d}x \Big) \\
&\le 2a(\Omega_0, t_0, \delta_0) \sum_i {}_\gamma R_i \le 2\gamma a(\Omega_0, t_0, \delta_0) = \frac{\epsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Položme $\omega^\gamma = \overline{\Omega}_0 \times \{t = t_0\} \backslash \bigcup_i b_i^{\gamma, t_0}$. Pro každé $z = (t, x) \in \omega^\gamma$ existuje neprázdné okolí $\mathcal{O}_z$ v $\mathbb{R}^4$ takové, že funkce $\mathbf{u}(t, x)$ je na $\mathcal{O}_z$ hölderovsky spojitá. Protože ω^γ je kompaktní, existuje neprázdné okolí $\mathcal{O}_\omega^\gamma$ množiny ω^γ tak, že $\omega^\gamma \subset \overline{\mathcal{O}_\omega^\gamma} \subset \bigcup \mathcal{O}_z$ a funkce $z \mapsto \mathbf{u}(z)$ je hölderovsky spojitá na $\overline{\mathcal{O}_\omega^\gamma}$. Proto

$$\Big| \int_{\omega^\gamma} \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 - |\mathbf{u}(t_0,x)|^2\big)\,\mathrm{d}x \Big| \le \frac{\epsilon}{2},$$

pokud $t - t_0$ je dostatečně malé, abychom zůstali v $\mathcal{O}_\omega^\gamma$. Celkem máme

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\Omega_0} \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 - |\mathbf{u}(t_0,x)|^2\big)\,\mathrm{d}x \Big| &\le \Big| \int_{\omega_\gamma} \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 - |\mathbf{u}(t_0,x)|^2\big)\,\mathrm{d}x \Big| \\
&+ \Big| \int_{\bigcup_i B_{\gamma R_i}(x_i^\gamma)} \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 - |\mathbf{u}(t_0,x)|^2\big)\,\mathrm{d}x \Big| < \epsilon \quad 0 \le t_0 - t \le \delta_0^2.
\end{aligned}$$

□

Připomeňme si značení ($z_0 = (t_0, x_0)$):

$$\begin{aligned}
A(z_0, r) &= \sup_{t_0 - r^2 \le t \le t_0} \frac{1}{r} \int_{B_r(x_0)} |\mathbf{u}(t, \cdot)|^2\,\mathrm{d}x, \\
B(z_0, r) &= \frac{1}{r} \int_{Q(z_0, r)} |\nabla \mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
C(z_0, r) &= \frac{1}{r^2} \int_{Q(z_0, r)} |\mathbf{u}|^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\
D(z_0, r) &= \frac{1}{r^2} \int_{Q(z_0, r)} |p|^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Nyní dokažme jinou verzi podmínky, že daný bod je regulární.

Lemma 3.6. *Nechť $(\mathbf{u}, p)$ je vhodné slabé řešení Navier–Stokesových rovnic na Q_T. Potom existuje $\epsilon_* > 0$ takové, že pokud pro jisté $r^* > 0$*

$$\sup_{0 < r < r^*} A(z_0, r) < \epsilon_*, \tag{3.12}$$

pak $\mathbf{u}$ je hölderovsky spojitá na $\overline{Q(z_0, r_0)}$ pro jisté $0 < r_0 < r^*$.

Důkaz. Připomeňme, že pro $0 < r \leq \rho$ díky (2.15) a (2.16) máme (bod z_0 budeme nadále ve značení vynechávat):

$$\begin{aligned} C(r) \leq\ & K\Big[\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^3 A^{\frac{3}{2}}(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^3 A^{\frac{3}{4}}(\rho) B^{\frac{3}{4}}(\rho)\Big], \\ D(r) \leq\ & K\Big[\frac{r}{\rho} D(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^2 A^{\frac{3}{4}}(\rho) B^{\frac{3}{4}}(\rho)\Big]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Dále, pokud ve vztahu (2.17) odhadneme člen

$$|\mathcal{I}_2| = \frac{K}{\rho}\Big|\int_{Q_\rho} |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \nabla\Phi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big| \leq \frac{K}{\rho^2}\int_{Q_\rho} |\mathbf{u}|^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq KC(\rho),$$

místo (2.21) dostáváme

$$A\Big(\frac{\rho}{2}\Big) + B\Big(\frac{\rho}{2}\Big) \leq K\Big[C^{\frac{2}{3}}(\rho) + C^{\frac{1}{3}}(\rho) D^{\frac{2}{3}}(\rho) + C(\rho)\Big]. \tag{3.14}$$

Definujme nový funkcionál

$$F(r) := C(r) + D(r).$$

Z nerovnosti (3.14) máme

$$A\Big(\frac{\rho}{2}\Big) + B\Big(\frac{\rho}{2}\Big) \leq K\Big(F^{\frac{2}{3}}(\rho) + F(\rho)\Big). \tag{3.15}$$

Dále pro $r \leq \frac{\rho}{2}$ máme z $(3.13)_1$ a (3.15) nerovnost

$$\begin{aligned} C(r) &\leq K\Big[\Big(\frac{2r}{\rho}\Big)^3 A^{\frac{3}{2}}\Big(\frac{\rho}{2}\Big) + \Big(\frac{\rho}{2r}\Big)^3 A^{\frac{3}{4}}\Big(\frac{\rho}{2}\Big) B^{\frac{3}{4}}\Big(\frac{\rho}{2}\Big)\Big] \\ &\leq K\Big[\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^3 A^{\frac{3}{2}}(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^3 A^{\frac{3}{4}}(\rho)\big(F^{\frac{1}{2}}(\rho) + F^{\frac{3}{4}}(\rho)\big)\Big]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Analogickým postupem dostaneme z $(3.13)_2$ a (3.15)

$$\begin{aligned} D(r) &\leq K\Big[\Big(\frac{2r}{\rho}\Big) D\Big(\frac{\rho}{2}\Big) + \Big(\frac{\rho}{2r}\Big)^2 A^{\frac{3}{4}}\Big(\frac{\rho}{2}\Big) B^{\frac{3}{4}}\Big(\frac{\rho}{2}\Big)\Big] \\ &\leq K\Big[\Big(\frac{r}{\rho}\Big) F(\rho) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^2 A^{\frac{3}{4}}(\rho)\big(F^{\frac{1}{2}}(\rho) + F^{\frac{3}{4}}(\rho)\big)\Big]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Položme $\theta = \frac{r}{\rho}$ a z nerovností (3.16) a (3.17) máme pro $\theta < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} F(\theta\rho) \leq K\Big[\theta F(\rho) + \theta^3 A^{\frac{3}{2}}(\rho) + (\theta^{-3} + \theta^{-2}) A^{\frac{3}{4}}(\rho)\big(F^{\frac{1}{2}}(\rho) + F^{\frac{3}{4}}(\rho)\big)\Big] \\ \leq K\Big[\theta F(\rho) + \theta^{-15}\big(A^3(\rho) + A^{\frac{3}{2}}(\rho)\big)\Big]. \end{aligned}$$

Fixujme $\underline{\theta} < \overline{\theta}$, $0 < \underline{\theta} < \overline{\theta} < \frac{1}{2}$, tak, aby $K\overline{\theta} \leq \frac{1}{2}$ a $\overline{\theta}^2 = \underline{\theta}$. Potom pro $\theta \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$

$$F(\rho\theta) \leq \frac{1}{2} F(\rho) + C\epsilon_*.$$

Iterací dostáváme

$$F(\rho\theta^k) \leq \frac{1}{2^k} F(\rho) + 2C\epsilon_* \leq 4C\epsilon_*.$$

Proto na $0 < r < r^*$ platí

$$F(r) \leq 4C\epsilon_*,$$

tj. díky Větě 2.19 dostáváme pro ϵ_* dostatečně malé tvrzení Lemmatu 3.6. □

Lemma 3.7. *Nechť* $\mathbf{u}$ *je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic jako ve Větě 3.1 a nechť* p *je normalizovaný tlak. Potom* $\forall x_0 \in \mathbb{R}^3$, $t > 0, R > 0$ *platí*

(3.18)
$$\int_{B_R(x_0)} \frac{1}{|y-x_0|}\big(2p(t,y) + |\widehat{\mathbf{u}}^{x_0}(t,y)|^2\big)\,\mathrm{d}y = \int_{B_R(x_0)} \frac{1}{R}\big(3p(t,y) + |\mathbf{u}(t,y)|^2\big)\,\mathrm{d}y$$
$$= R^2 \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(x_0)} \nabla_y^2\Big(\frac{1}{|y-x_0|}\Big) : \big(\mathbf{u}(t,y)\otimes\mathbf{u}(t,y)\big)\,\mathrm{d}y,$$

kde
$$\widehat{\mathbf{u}}^{x_0}(t,y) = \mathbf{u}(t,y) - \frac{\mathbf{u}(t,y)\cdot(y-x_0)(y-x_0)}{|y-x_0|^2}.$$

Důkaz. Mějme dostatečně hladkou funkci $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Potom díky Fubiniho větě
$$\int_{B_R(x_0)} g(|x_0 - x|)p(t,x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}\operatorname{div}\big(\mathbf{u}(t,y)\otimes\mathbf{u}(t,y)\big)\Big(\int_{B_R(x_0)} \frac{g(|x_0-x|)}{|x-y|}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y.$$

Nyní
$$\int_{B_R(x_0)} g(|x_0 - x|)\frac{1}{|x-y|}\,\mathrm{d}x$$

(3.19)
$$= 4\pi\begin{cases} \dfrac{1}{|y-x_0|}\displaystyle\int_0^{|y-x_0|} \rho^2 g(\rho)\,\mathrm{d}\rho + \int_{|y-x_0|}^R \rho g(\rho)\,\mathrm{d}\rho, & |y-x_0| \le R \\ \dfrac{1}{|y-x_0|}\displaystyle\int_0^R \rho^2 g(\rho)\,\mathrm{d}\rho & |y-x_0| > R, \end{cases}$$

viz Lemma 3.8 níže. Proto máme
$$\int_{B_R(x_0)} g(|x_0-x|)p(t,x)\,\mathrm{d}x =$$
$$\int_{B_R(x_0)} \big(\mathbf{u}(t,y)\otimes\mathbf{u}(t,y)\big) : \nabla_y^2\Big(\frac{1}{|y-x_0|}\int_0^{|y-x_0|} \rho^2 g(\rho)\,\mathrm{d}\rho + \int_{|y-x_0|}^R \rho g(\rho)\,\mathrm{d}\rho\Big)\,\mathrm{d}y$$
$$+ \int_0^R \rho^2 g(\rho)\,\mathrm{d}\rho \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(x_0)} \big(\mathbf{u}(t,y)\otimes\mathbf{u}(t,y)\big) : \nabla_y^2\Big(\frac{1}{|y-x_0|}\Big)\,\mathrm{d}y.$$

Volbou $g(\rho) = \frac{2}{\rho}$ dostáváme
$$\int_{B_R(x_0)} \frac{2p(t,y)}{|x_0-y|}\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{B_R(x_0)} \big(\mathbf{u}(t,y)\otimes\mathbf{u}(t,y)\big) : \nabla_y^2\Big(|y-x_0| + 2R - 2|y-x_0|\Big)\,\mathrm{d}y$$
$$+ R^2\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(x_0)} \big(\mathbf{u}(t,y)\otimes\mathbf{u}(t,y)\big) : \nabla_y^2\Big(\frac{1}{|y-x_0|}\Big)\,\mathrm{d}y.$$

Nyní
$$\nabla_y^2(|y-x_0|)_{ij} = \frac{\partial}{\partial y_j}\frac{(y-x_0)_i}{|y-x_0|} = \frac{\delta_{ij}}{|y-x_0|} - \frac{(y-x_0)_i(y-x_0)_j}{|y-x_0|^3}.$$

Tedy
$$\big(\mathbf{u}(t,y)\otimes\mathbf{u}(t,y)\big) : \nabla_y^2(|y-x_0|) = \Big(\frac{|\mathbf{u}(t,y)|^2}{|y-x_0|} - \frac{\big(\mathbf{u}(t,y)\cdot(y-x_0)\big)^2}{|y-x_0|^3}\Big)$$
$$= \frac{1}{|y-x_0|}|\widehat{\boldsymbol{u}}^{x_0}(t,y)|^2,$$

což dává první identitu. Volbou $g(\rho) = 1$ v (3.19) máme

$$\int_{B_R(x_0)} p(t,y)\,\mathrm{d}y = \int_{B_R(x_0)} \big(\mathbf{u}(t,y)\otimes\mathbf{u}(t,y)\big) : \nabla_y^2\Big(\frac{|y-x_0|^2}{3} + \frac{R^2}{2} - \frac{|y-x_0|^2}{2}\Big)$$
$$+\frac{R^3}{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(x_0)} \big(\mathbf{u}(t,y)\otimes\mathbf{u}(t,y)\big) : \nabla_y^2\Big(\frac{1}{|y-x_0|}\Big)\,\mathrm{d}y,$$

podělením $\frac{R}{3}$ a díky tomu, že $\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\Big(\frac{|y-x_0|^2}{2}\Big) = \delta_{ij}$, dostáváme

$$\frac{1}{R}\int_{B_R(x_0)} 3p(t,y)\,\mathrm{d}y = R^2 \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(x_0)} \big(\mathbf{u}(t,y)\otimes\mathbf{u}(t,y)\big) : \nabla_y^2\Big(\frac{1}{|y-x_0|}\Big)\,\mathrm{d}y$$
$$-\frac{1}{R}\int_{B_R(x_0)} |\mathbf{u}(t,y)|^2\,\mathrm{d}y,$$

čímž je dokázána druhá identita v (3.18). □

Lemma 3.8. *Pro dostatečně hladké funkce g platí identita (3.19).*

Důkaz. Počítejme

$$I = \int_{B_R(x_0)} g(|x_0 - x|)\frac{1}{|x-y|}\,\mathrm{d}x.$$

Uvědomme si, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $(y - x_0) = (0,0,a)$, $a = |y - x_0|$. Proto při použití souřadnic

$$x^1 - x_0^1 = \rho\cos\varphi\sin\theta,$$
$$x^2 - x_0^2 = \rho\sin\varphi\sin\theta,$$
$$x^3 - x_0^3 = \rho\cos\theta$$

máme

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} g(\rho)\frac{\rho^2\sin\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + (\rho\cos\theta - a)^2}}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi\int_0^R\int_0^\pi \frac{g(\rho)\rho^2\sin\theta}{\sqrt{\rho^2+a^2-2a\rho\cos\theta}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_0^R g(\rho)\rho^2\left[\frac{\sqrt{\rho^2+a^2-2a\rho\cos\theta}}{a\rho}\right]_0^\pi\,\mathrm{d}\rho,$$

kde

$$\left[\frac{\sqrt{\rho^2+a^2-2a\rho\cos\theta}}{a\rho}\right]_0^\pi = \frac{1}{a\rho}\left(\sqrt{\rho^2+a^2+2a\rho} - \sqrt{\rho^2+a^2-2a\rho}\right)$$
$$= \frac{1}{a\rho}\left(\sqrt{(\rho+a)^2} - \sqrt{(\rho-a)^2}\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{\rho}, & \rho > a,\\[1ex] \dfrac{2}{a}, & \rho < a.\end{cases}$$

Proto

$$I = \frac{4\pi}{|y-x_0|}\int_0^R g(\rho)\rho^2\,\mathrm{d}\rho \qquad \text{pro } R \le |y-x_0|,$$
$$I = \frac{4\pi}{|y-x_0|}\int_0^{|y-x_0|} g(\rho)\rho^2\,\mathrm{d}\rho + 4\pi\int_{|y-x_0|}^R g(\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho \qquad \text{pro } R > |y-x_0|.$$

□

Nyní přejdeme k důkazu Věty 3.1

Důkaz. (Věty 3.1) Předpokládejme, že t_0 je okamžik, kdy se objeví první singularita. Víme, že $t_0 > 0$, a dále víme, že pro každé $T < t_0$ je řešení hladké na $(0,T)$. Speciálně na $(\delta,T)\times\Omega$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, $0<\delta<T$ je toto řešení vhodné slabé řešení a na $(0,T)\times\mathbb{R}^3$ je slabé řešení.

Máme tedy současně splněno (připomeňme, že $\mathbf{f}=\mathbf{0}$)

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\mathbf{u}(\tau,x)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_0(x)|^2\,\mathrm{d}x,\ \ 0<t<T$$

a

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(t,x)|^2\Psi(x)\,\mathrm{d}x + 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\mathbf{u}(\tau,x)|^2\Psi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_0(x)|^2\Psi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(\tau,x)|^2\Delta\Psi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_{\Omega}\big(|\mathbf{u}(\tau,x)|^2+2p(\tau,x)\big)\mathbf{u}(\tau,x)\cdot\nabla\Psi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau$$

$$\forall\Psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3),\ \ 0<t<T.$$

Uvědomme si totiž, že naše řešení je hladké a tudíž můžeme testovat rovnici $\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{u}\Psi$, $\Psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Tedy

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(t,x)|^2\big(1-\Psi(x)\big)\,\mathrm{d}x + 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\mathbf{u}(\tau,x)|^2\big(1-\Psi(x)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_0(x)|^2(1-\Psi(x))\,\mathrm{d}x - \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(\tau,x)|^2\Delta\Psi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\ &\quad-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\big(|\mathbf{u}(\tau,x)|^2+2p(\tau,x)\big)\mathbf{u}(\tau,x)\cdot\nabla\Psi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Dále víme, že $\mathbf{u}\in L^\infty(0,T;(L^2(\mathbb{R}^3))^3)\cap L^2(0,T;(W^{1,2}(\mathbb{R}^3))^3)$. Pak

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^3_{L^3(0,t_0;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)} &\le \int_0^{t_0}\|\mathbf{u}\|^{\frac32}_{(L^6(\mathbb{R}^3))^3}\|\mathbf{u}\|^{\frac32}_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3}\,\mathrm{d}\tau\\ &\le Ct_0^{\frac14}\|\mathbf{u}\|^{\frac32}_{L^\infty(0,t_0;(L^2(\mathbb{R}^3))^3)}\|\mathbf{u}\|^{\frac32}_{L^2(0,t_0;(W^{1,2}(\mathbb{R}^3))^3)} \le Ct_0^{\frac14}\|\mathbf{u}_0\|^3_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3}.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Pokud ve druhé identitě $(3.18)_2$ Lemmatu 3.7 podělíme obě strany $\frac43\pi R^2$ a provedeme $\lim_{R\to0^+}$, dostaneme

$$3p(t,x_0)+|\mathbf{u}(t,x_0)|^2 = \frac{3}{4\pi}\lim_{R\to0^+}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(x_0)}\nabla_y^2\left(\frac{1}{|y-x_0|}\right):\big(\mathbf{u}(t,y)\otimes\mathbf{u}(t,y)\big)\,\mathrm{d}y.\tag{3.22}$$

Proužitím Calderón-Zygmundovy teorie singulárních integrálních operátorů získáme z (3.22) a z (3.21)

$$\|p\|_{L^{\frac32}((0,t_0)\times\mathbb{R}^3)} \le C\|\mathbf{u}\|^2_{(L^3((0,t_0)\times\mathbb{R}^3))^3} \le Ct_0^{\frac16}\|\mathbf{u}_0\|^2_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3}.\tag{3.23}$$

Nyní zvolíme

$$\Psi(x)=1\quad \text{v } B_{\frac R2}(0),$$

$$\Psi(x)=0\quad \text{v } \mathbb{R}^3\setminus B_R(0),$$

$$\nabla\Psi(x)\sim\frac1R,\quad \nabla^2\Psi(x)\sim\frac{1}{R^2}.$$

Díky této volbě testovací funkce plyne z (3.20)

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{0\le t<t_0} \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)} |\mathbf{u}(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

Protože máme zvoleného reprezentanta, aby

$$\liminf_{t\to t_0^-} \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)} |\mathbf{u}(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x \ge \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)} |\mathbf{u}(t_0,x)|^2 \,\mathrm{d}x,$$

dostáváme

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{0\le t\le t_0} \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)} |\mathbf{u}(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0, \tag{3.24}$$

tj. tvrzení platí i pro $t = t_0$.

I) Předpokládejme, že $|\mathbf{u}|^2 + 2p \le g$, tj. podmínka (3.2) ve Větě 3.1. Označme

$$\widetilde{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x) = \frac{\mathbf{u}(t,x)\cdot(x-x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|^2}.$$

Potom použitím (3.18) v Lemmatu 3.7

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2R}\int\limits_{B_R(x_0)} |\mathbf{u}(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{3}{2R}\int\limits_{B_R(x_0)} \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 2p(t,x)\big)\,\mathrm{d}x \\
= \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 2p(t,x)\big)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{|\widetilde{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x \\
= R^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(x_0)} K(x,x_0)\big(\mathbf{u}(t,x)\otimes\mathbf{u}(t,x)\big)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

kde $K(x,x_0) = \nabla_x^2\big(\frac{1}{|x-x_0|}\big)$.

Proto máme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2R}\int\limits_{B_R(x_0)} |\mathbf{u}(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{3}{2R}\int\limits_{B_R(x_0)} \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 2p(t,x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&+ \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}|\widetilde{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x - \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 2p(t,x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{3}{2R}\int\limits_{B_R(x_0)} g(t,x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{|\widetilde{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x \\
&+ \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[g(t,x) - \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 2p(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x \qquad (3.25) \\
&\le \frac{1}{2}\int\limits_{B_R(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{|\widetilde{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x \\
&+ \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[g(t,x) - \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 2p(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Z Lemmatu 3.7 dále plyne

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_{B_R(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{|\widetilde{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x \\
&+ \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[g(t,x) - \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 2p(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\int\limits_{B_R(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x - R^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(x_0)} K(x,x_0)\big(\mathbf{u}(t,x)\otimes\mathbf{u}(t,x)\big)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Proto použitím předchozí rovnosti máme pro všechna $R \le R_0(t_0)$ a $0 \le t_0 - R_0^2(t_0) \le t \le t_0$ z Věty 3.1

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2R}\int\limits_{B_R(x_0)} |\mathbf{u}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x &\le \frac{1}{2}\int\limits_{B_R(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{|\widetilde{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x \\
&+ \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\underbrace{\Big[g(t,x) - \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 2p(t,x)\big)\Big]}_{\ge 0}\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{2}\int\limits_{B_{R_0}(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{B_{R_0}(x_0)} \frac{|\widetilde{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x \\
&+ \int\limits_{B_{R_0}(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[g(t,x) - \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 2p(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x \\
= \frac{3}{2}\int\limits_{B_{R_0}(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x &- R_0(t_0)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_{R_0}(x_0)} K(x,x_0)\big(\mathbf{u}(t,x)\otimes\mathbf{u}(t,x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{3}{2}\mathcal{A}(t_0) + \frac{C}{R_0(t_0)}\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,t_0;(L^2(\mathbb{R}^3))^3)}.
\end{aligned}$$

Nyní použijeme Lemma 3.5. Výše uvedená nerovnost implikuje, že máme (také díky tomu, že pro $t < t_0$ je řešení hladké)

$$\sup_{0<R\le R_0(t_0)}\ \sup_{0\le t\le t_0} \frac{1}{R}\int_{B_R(x_0)} |\mathbf{u}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x \le C < \infty, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^3.$$

Proto pro $r > 0$ libovolné platí

$$\lim_{t\to t_0^-} \int\limits_{B_r(0)} |\mathbf{u}(t,x) - \mathbf{u}(t_0,x)|^2\,\mathrm{d}x = 0,$$

stačí použít předchozí odhad pro libovolné x_0, libovolnou kouli pokryjeme konečně mnoha koulemi o poloměru R_0, tvrzení plyne tedy z Lemmatu 3.5.

Protože platí (viz (3.24))

$$\lim_{R\to\infty}\ \sup_{0\le t\le t_0} \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)} |\mathbf{u}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x = 0,$$

dostáváme

$$\lim_{t\to t_0^-} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(t,x) - \mathbf{u}(t_0,x)|^2\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.26}$$

Fixujme nyní libovolný bod $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Nechť ϵ_* je z Lemmatu 3.6. Potom existuje $R_\star \leq R_0(t_0)$ takové, že (uvědomme si, že integrály jsou konečné)

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\int\limits_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{g(t_0,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x - R_\star^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_{R_\star}(x_0)} K(x,x_0)\big(\mathbf{u}(t_0,x)\otimes\mathbf{u}(t_0,x)\big)\,\mathrm{d}x \\ = \frac{1}{2}\int\limits_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{g(t_0,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{|\widetilde{\mathbf{u}}^{x_0}(t_0,x)|^2}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x \\ + \int\limits_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[g(t_0,x) - \big(|\mathbf{u}(t_0,x)|^2 + 2p(t_0,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x < \frac{\epsilon_*}{2}.\end{aligned}$$

Díky (3.26) a vlastnostem g je funkce

$$t \mapsto \frac{3}{2}\int\limits_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x - R_\star^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_{R_\star}(x_0)} K(x,x_0)\big(\mathbf{u}(t,x)\otimes\mathbf{u}(t,x)\big)\,\mathrm{d}x$$

spojitá zleva v bodě t_0. Existuje tedy $\delta_\star \leq \sqrt{\frac{t_0}{2}}$ taková, že

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\limits_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{|\widetilde{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x \\ + \int\limits_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[g(t,x) - \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 2p(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x < \epsilon_*\end{aligned}$$

pro všechna $t \in [t_0 - \delta_\star^2, t_0]$. Použitím nerovnosti (3.25) dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2R}\int\limits_{B_R(x_0)} |\mathbf{u}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{2}\int\limits_{B_R(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{|\widetilde{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int\limits_{B_R(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[g(t,x) - \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 2p(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2}\int\limits_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{|\widetilde{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int\limits_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[g(t,x) - \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 2p(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x < \epsilon_*\end{aligned}$$

pro všechny $R \in (0, R_\star)$ a $t \in [t_0 - \delta_\star^2, t_0]$. Proto je bod $z = (t_0, x_0)$ regulární bod, viz Lemma 3.6. Jelikož x_0 byl libovolný bod, funkce $\mathbf{u}$ je hölderovsky spojitá na $\mathbb{R}^3 \times [\frac{t_0}{2}, t_0]$. Proto je také $\nabla\mathbf{u} \in C([\frac{t_0}{2}, t_0]; (L^2(\mathbb{R}^3))^{3\times 3})$ a $\exists t_1 > t_0$ tak, že $\nabla\mathbf{u} \in C([t_0, t_1]; (L^2(\mathbb{R}^3))^{3\times 3})$. Tedy v bodě t_0 nemůže nastat žádná singularita, což odporuje definici bodu t_0.

II) Předpokládejme, že platí $p(t,x) \geq -g(t,x)$. Budeme postupovat obdobně. Z Lemmatu 3.7 máme

$$\frac{1}{R}\int_{B_R(x_0)} \Big[|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 3\big(p(t,x)+g(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{R}\int_{B_R(x_0)} g(t,x)\,\mathrm{d}x - 2\int_{B_R(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{B_R(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[|\widehat{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2 + 2\big(p(t,x)+g(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x$$

$$\leq \int_{B_R(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + \int_{B_R(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[|\widehat{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2 + 2\big(p(t,x)+g(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x.$$

Opětovným použitím Lemmatu 3.7 máme

$$\int_{B_R(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + \int_{B_R(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[|\widehat{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2 + 2\big(p(t,x)+g(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\int_{B_R(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + R^2\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(x_0)} K(x,x_0)\big(\mathbf{u}(t,x)\otimes\mathbf{u}(t,x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Protože $p(t,x) \geq -g(t,x)$, máme pro $0 < R \leq R_0(t_0)$ a $0 \leq t_0 - R_0^2(t_0) \leq t \leq t_0$ z Věty 3.1

$$\frac{1}{R}\int_{B_R(x_0)} |\mathbf{u}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{R}\int_{B_R(x_0)} \Big[|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 3\big(p(t,x)+g(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x$$

$$\leq \frac{1}{R}\int_{B_{R_0}(x_0)} \Big[|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 3\big(p(t,x)+g(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x \leq \int_{B_{R_0}(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{B_{R_0}(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[|\widehat{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2 + 2\big(p(t,x)+g(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\int_{B_{R_0}(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + R_0^2\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{R_0}(x_0)} K(x,x_0)\big(\mathbf{u}(t,x)\otimes\mathbf{u}(t,x)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$\leq 3\mathcal{A}(t_0) + \frac{C}{R_0(t_0)}\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,t_0;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)}.$$

Proto díky Lemmatu 3.5 podobně jako výše dostáváme, že

$$\lim_{t\to t_0^-}\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(t,x)-\mathbf{u}(t_0,x)|^2\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.27}$$

Fixujme libovolný bod $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Nechť $\epsilon_\star$ je z Lemmatu 3.6. Potom existuje $R_\star \leq R_0(t_0)$ takové, že

$$\frac{\epsilon_*}{2} > \int_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{g(t_0,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[|\widehat{\mathbf{u}}^{x_0}(t_0,x)|^2 + 2\big(p(t_0,x)+g(t_0,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\int_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{g(t_0,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + R_\star^2\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{R_\star}(x_0)} K(x,x_0)\big(\mathbf{u}(t_0,x)\otimes\mathbf{u}(t_0,x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Podobně jako v minulém případě použijeme argument, že funkce

$$t \mapsto 3\int_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x + R_\star^2\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{R_\star}(x_0)} K(x,x_0)\big(\mathbf{u}(t,x)\otimes\mathbf{u}(t,x)\big)\,\mathrm{d}x$$

je spojitá zleva v bodě t_0. Tedy existuje $\delta_\star \leq \sqrt{\frac{t_0}{2}}$ takové, že

$$\frac{1}{R}\int_{B_R(x_0)} |\mathbf{u}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x \leq \int_{B_R(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x$$
$$+\int_{B_R(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[|\widehat{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2 + 2\big(p(t,x)+g(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x \leq \int_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{g(t,x)}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}x$$
$$+\int_{B_{R_\star}(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|}\Big[|\widehat{\mathbf{u}}^{x_0}(t,x)|^2 + 2\big(p(t,x)+g(t,x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x < \epsilon_*$$

pro všechny $R \in (0, R_\star)$, $t \in [t_0 - \delta_\star^2, t_0]$. Pomocí Lemmatu 3.6 a argumentů podobných jako v bodu I) získáme spor s tím, že t_0 je okamžik první singularity. Tím je důkaz Věty 3.1 hotov.

□

4. Hraniční případ Prodi–Serrinových podmínek

Cílem této kapitoly je ukázat, že pokud slabé (Leray–Hopfovo) řešení navíc patří do $L^\infty(0,T;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$, pak je řešení hladké. Připomeňme, že slabé řešení patřící do $L^\infty(0,T;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$ je současně i v prostoru $L^4(0,T;(L^4(\mathbb{R}^3))^3)$ a tudíž splňuje dokonce energetickou rovnost, je to tedy řešení Leray–Hopfovo. Tento výsledek řeší hraniční případ Prodi–Serrinových podmínek, tj. dokazuje tvrzení, že je-li slabé řešení Navier–Stokesových rovnic prvkem prostoru $L^t(0,T;(L^s(\mathbb{R}^3))^3)$, $\frac{2}{t}+\frac{3}{s} \leq 1$, $s \geq 3$, potom je toto řešení tak hladké, jak umožňují data úlohy. Případ $s > 3$ je možno nalézt v [7]. Naším cílem tedy bude ukázat následující

Věta 4.1. *Necht' $\mathbf{u}_0 \in (L^3(\mathbb{R}^3))^3 \cap L^2_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3)$ a $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Necht' $\mathbf{u}$ je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic odpovídající těmto datům. Necht' navíc máme, že pro jisté $T > 0$ naše řešení $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$. Potom $\mathbf{u} \in (L^5((0,T)\times\mathbb{R}^3))^3$, a tudíž je na tomto intervalu hladké, tj. patří do $(C^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^3))^3$.*

V důkazu budeme postupovat následovně. Nejprve ukážeme, že pro počáteční podmínku $\mathbf{u}_0 \in (L^3(\mathbb{R}^3))^3 \cap L^2_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3)$ existuje lokálně v čase hladké řešení Navier–Stokesových rovnic, které je tudíž jednoznačné na třídě Leray–Hopfových slabých řešení, a proto je na svém intervalu existence totožné s řešením z Věty 4.1. Druhá část pak obsahuje důkaz toho, že Věta 4.2 níže implikuje Větu 4.1:

Věta 4.2. *Necht' $(\mathbf{u},p)$ jsou definovány v časoprostorovém válci $Q_1 = (-1,0)\times B_1$. Necht' $(\mathbf{u},p)$ splňují Navier–Stokesovy rovnice ve smyslu distribucí a necht'*

$$\mathbf{u} \in L^\infty(-1,0;(L^2(B_1))^3)\ \cap L^2(-1,0;(W^{1,2}(B_1))^3), \quad p \in L^{\frac{3}{2}}(Q_1).$$

Dále předpokládejme, že

$$\mathbf{u} \in L^\infty(-1,0;(L^3(B_1))^3).$$

Potom je $\mathbf{u}$ hölderovsky spojitá na $\overline{Q_{\frac{1}{2}}}$.

Třetí část pak obsahuje důkaz jednoho technického lemmatu souvisejícího s regularitou řešení, který je rozšířením Věty 2.19. Čtvrtá a pátá část pak obsahují důkaz lemmat, která souvisí s důležitou myšlenkou důkazu Věty 4.2, totiž s jednoznačným prodlužováním a zpětnou jednoznačností řešení rovnice vedení tepla. Poslední část pak obsahuje samotný důkaz Věty 4.2.

4.1. **Lokální existence silného řešení s počáteční podmínkou z** $(L^3(\mathbb{R}^3))^3 \cap L^2_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3)$**.** Nejprve dokažme dvě pomocná lemmata.

Lemma 4.3. *Mějme Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \ \ v\ (0,T) \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = a(x) \ \ v\ \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Potom

$$\|u(t,\cdot)\|_s \le C(s,s_1) t^{-l} \|a\|_{s_1} \tag{4.2}$$

pro libovolné $t > 0$*,* $s \ge s_1 \ge 1$ *a* $l = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s}\right)$.

Důkaz. Řešení můžeme psát pomocí konvoluce

$$u(t,\cdot) = \Gamma(t,\cdot) * a,$$

kde konvoluční jádro je definováno vztahem

$$\Gamma(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{4t}}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0, \end{cases}$$

a tedy

$$\|u(t,\cdot)\|_s \le \|a\|_{s_1} \|\Gamma(t,\cdot)\|_r, \qquad \text{pro } \frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{r} - 1.$$

Máme

$$\|\Gamma(t,\cdot)\|_r^r = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \right)^r \mathrm{d}x.$$

Substitucí $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$ konečně dostáváme

$$\|\Gamma(t,\cdot)\|_r^r \le \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} t^{-\frac{3}{2}r + \frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{-r|y|^2}{4}} \,\mathrm{d}y = C t^{\frac{3}{2}r(\frac{1}{r}-1)} = C t^{\frac{3r}{2}(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_1})}.$$

□

Lemma 4.4. *Uvažujme Cauchyovu úlohu pro Stokesův systém*

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{f} - \nabla q \\ &\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{aligned}\right\} \ v\ Q_T = (0,T) \times \mathbb{R}^3, \\ &\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{a}(x) \ \ v\ \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Nechť $\mathbf{f} \in (L^{5/2}(Q_T))^{3\times 3} \cap (L^2(Q_T))^{3\times 3}$, $\mathbf{a} \in L^2_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3) \cap (L^3(\mathbb{R}^3))^3$*. Pak pro každé* $T > 0$ *existuje* $(\mathbf{u}, q)$ *řešící Stokesův problém (4.3) takové, že*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in C([0,T]; (L^2(\mathbb{R}^3))^3) \cap L^2(0,T; W^{1,2}_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3)) \cap C([0,T]; (L^3(\mathbb{R}^3))^3) \cap \\ \cap (L^4(Q_T))^3 \cap (L^5(Q_T))^3, \\ q \in L^2(Q_T) \cap L^{5/2}(Q_T). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Navíc

$$\lim_{t \to 0^+} \|\mathbf{u}(t,\cdot) - \mathbf{a}\|_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3} = 0, \tag{4.5}$$

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)} + \|\mathbf{u}\|_{(L^5(Q_T))^3} \le C\big(\|\mathbf{f}\|_{(L^{5/2}(Q_T))^{3\times 3}} + \|\mathbf{a}\|_{(L^3(Q_T))^3}\big), \tag{4.6}$$

$$\|\mathbf{u}\|_{(L^4(Q_T))^3} \le C\big(\|\mathbf{f}\|_{(L^{5/2}(Q_T))^{3\times 3} \cap L^2(Q_T))^{3\times 3}} + \|\mathbf{a}\|_{(L^3(Q_T))^3 \cap L^2(Q_T))^3}\big). \tag{4.7}$$

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathbf{f} \in (C_0^\infty(Q_T))^{3\times 3}$ a $\mathbf{a} \in C^\infty_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3)$, obecný případ získáme pomocí aproximací. Je zřejmé, že řešení $(\mathbf{u}, q)$ existuje a je hladké. Současně použitím energetické metody máme odhady

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathbb{R}^3))^3)} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{(L^2(Q_T))^{3\times 3}} + \Big\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\Big\|_{L^2(0,T;(W^{1,2}_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3))^*)} \\ \leq C\big(\|\mathbf{a}\|_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3} + \|\mathbf{f}\|_{(L^2(Q_T))^{3\times 3}}\big),\end{aligned}$$

což také dává $\mathbf{u} \in C([0,T];(L^2(\mathbb{R}^3))^3)$. Z rovnice

$$\Delta q = \mathrm{div}\,\mathrm{div}\,\mathbf{f} \tag{4.8}$$

získáme odhad

$$\|q\|_{L^{5/2}(Q_T)} \leq C\|\mathbf{f}\|_{(L^{5/2}(Q_T))^{3\times 3}}. \tag{4.9}$$

Otestujme rovnici funkcí $|\mathbf{u}|\mathbf{u}$. Dostáváme

$$\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^3_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3} + 2\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}||\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \big(q\,\mathrm{div}(|\mathbf{u}|\mathbf{u}) - \mathbf{f} : \nabla(|\mathbf{u}|\mathbf{u})\big)\,\mathrm{d}x.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^3_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3} + \|\nabla|\mathbf{u}|^{\frac{3}{2}}\|^2_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3} \\ \leq C\big(\|q\|_{L^{5/2}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{(L^{5/2}(\mathbb{R}^3))^{3\times 3}}\big)\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{u}|^{\frac{5}{3}}|\mathbf{u}|^{\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}x\Big)^{3/5}.\end{aligned}$$

Odhadujme poslední člen

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{u}|^{\frac{5}{3}}|\mathbf{u}|^{\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}x &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{u}|^2|\mathbf{u}|\,\mathrm{d}x\Big)^{5/6}\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^5\,\mathrm{d}x\Big)^{1/6} \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{u}|^2|\mathbf{u}|\,\mathrm{d}x\Big)^{5/6}\|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{3}}_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3}\|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}}_{(L^9(\mathbb{R}^3))^3}.\end{aligned}$$

Proto celkem díky (4.9)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^3_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3} + \|\nabla|\mathbf{u}|^{\frac{3}{2}}\|^2_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3} \\ \leq C\|\mathbf{f}\|_{(L^{5/2}(\mathbb{R}^3))^{3\times 3}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{u}|^2|\mathbf{u}|\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{5}}_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3}\|\mathbf{u}\|^{\frac{3}{10}}_{(L^9(\mathbb{R}^3))^3} \\ \leq C(\varepsilon)\|\mathbf{f}\|^{\frac{5}{2}}_{(L^{5/2}(\mathbb{R}^3))^{3\times 3}}\|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}}_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3} + \varepsilon\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{u}|^2|\mathbf{u}|\,\mathrm{d}x + \varepsilon\|\mathbf{u}\|^3_{(L^9(\mathbb{R}^3))^3}\end{aligned} \tag{4.10}$$

pro ε libovolně malé. Tento odhad dává

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)} \leq C\big(\|\mathbf{f}\|_{(L^{5/2}(Q_T))^{3\times 3}} + \|\mathbf{a}\|_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3}\big)$$

a také

$$\||\mathbf{u}|^{\frac{3}{2}}\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(0,T;W^{1,2}(\mathbb{R}^3))} \leq C\big(\|\mathbf{f}\|_{(L^{5/2}(Q_T))^{3\times 3}} + \|\mathbf{a}\|_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3}\big).$$

Protože

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|_{(L^5(Q_T))^3} &\leq C\|\mathbf{u}\|^{2/5}_{L^\infty(0,T;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)}\|\mathbf{u}\|^{3/5}_{L^3(0,T;(L^9(\mathbb{R}^3))^3)}, \\ \|\mathbf{u}\|_{(L^4(Q_T))^3} &\leq C\|\mathbf{u}\|^{1/2}_{L^\infty(0,T;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)}\|\mathbf{u}\|^{1/2}_{L^2(0,T;(L^6(\mathbb{R}^3))^3)},\end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|_{(L^5(Q_T))^3} &\leq C\big(\|\mathbf{f}\|_{(L^{5/2}(Q_T))^{3\times 3}} + \|\mathbf{a}\|_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3}\big), \\ \|\mathbf{u}\|_{(L^4(Q_T))^3} &\leq C\big(\|\mathbf{f}\|_{(L^{5/2}(Q_T))^{3\times 3}\cap(L^2(Q_T))^{3\times 3}} + \|\mathbf{a}\|_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3\cap(L^2(\mathbb{R}^3))^3}\big).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Ukažme nyní, že $\mathbf{u} \in C([0,T];(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$. Zřejmě díky (4.10) máme, že $\|\mathbf{u}\|_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3}$ je spojitá na $[0,T]$. Navíc, díky Lemmatu 2.2.5 z [7] ($\mathbf{u} \in C([0,T];(L^2(\mathbb{R}^3))^3)$, $L^3(K) \hookrightarrow L^2(K)$, hustě) je $\mathbf{u} \in C([0,T];((L^3(K))^3)_w)$ $\forall K$, omezené, což díky odhadu v $L^\infty(0,T;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$ dává $\mathbf{u} \in C([0,T];((L^3(\mathbb{R}^3))^3)_w)$. Dohromady tedy $\mathbf{u} \in C([0,T];(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$. $\square$

Nyní můžeme přistoupit k důkazu lokální existence silného řešení Navier–Stokesových rovnic pro počáteční podmínku z $(L^3(\mathbb{R}^3))^3 \cap L^2_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3)$.

Věta 4.5. *Nechť* $\mathbf{a} \in (L^3(\mathbb{R}^3))^3 \cap L^2_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3)$. *Potom existuje* $T^* > 0$ *tak, že na* $[0,T^*)$ *existuje dvojice* $(\mathbf{u}, q)$ *řešení*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} + \operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = -\nabla q \\ &\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{na } (0,T^*)\times\mathbb{R}^3,$$

$$\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{a}(x) \quad \text{na } \mathbb{R}^3.$$

Toto řešení splňuje (4.4), (4.5) a je tudíž na $(0,T^*)$ *hladké.*

Důkaz. Položme $\mathbf{u}^1(t,\cdot) = \Gamma(t,\cdot) * \mathbf{a}(\cdot)$, $\kappa(T^*) = \|\mathbf{u}^1\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^1\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3}$. Protože $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$, máme též $\operatorname{div}\mathbf{u}^1 = 0$. Dále položíme pro $k \geq 1$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{w}^k + \mathbf{u}^1,$$

kde $\mathbf{w}^k$ řeší Cauchyovu úlohu pro Stokesův problém

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{w}^k}{\partial t} - \Delta \mathbf{w}^k = -\operatorname{div}(\mathbf{u}^k\otimes\mathbf{u}^k) - \nabla q^k \\ &\operatorname{div}\mathbf{w}^k = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{na } (0,T^*)\times\mathbb{R}^3, \tag{4.12}$$

$$\mathbf{w}(0,\cdot) = \mathbf{0} \text{ na } \mathbb{R}^3.$$

Má-li posloupnost $\mathbf{u}^k$ limitu $\mathbf{U}$, bude $\mathbf{U} = \mathbf{w} + \mathbf{u}^1$, kde

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \Delta\mathbf{w} = -\operatorname{div}(\mathbf{U}\otimes\mathbf{U}) - \nabla q, \qquad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0, \qquad \mathbf{w}(0,\cdot) = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - \Delta\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u}_1 = 0, \qquad \mathbf{u}^1(0,\cdot) = \mathbf{a},$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \Delta\mathbf{U} &= -\operatorname{div}(\mathbf{U}\otimes\mathbf{U}) - \nabla q, \\ \operatorname{div}\mathbf{U} &= 0, \\ \mathbf{U}(0,x) &= \mathbf{a}, \end{aligned}$$

tj. $\mathbf{U}$ řeší naší úlohu. Ukažme, že zobrazení $\mathbf{u}^k \mapsto \mathbf{u}^{k+1}$ je kontrakce na vhodném prostoru. Označme

$$\mathbf{W}^k = \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k = \mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k-1},$$

tj.

$$\frac{\partial \mathbf{W}^k}{\partial t} - \Delta\mathbf{W}^k = -\operatorname{div}(\mathbf{u}^k\otimes\mathbf{u}^k) + \operatorname{div}(\mathbf{u}^{k-1}\otimes\mathbf{u}^{k-1}) - \nabla(q^k - q^{k-1}).$$

Označíme-li pravou stranu v rovnici výše $\mathbf{F}$, máme

$$\mathbf{F} = \operatorname{div}((\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^k)\otimes\mathbf{u}^{k-1}) + \operatorname{div}(\mathbf{u}^{k-1}\otimes(\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^k)),$$

a proto použitím odhadů z Lemmatu 4.4 (viz (4.11)) dostáváme

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3} \\ &\leq C\big(\|(\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^k)\otimes(\mathbf{u}^{k-1} + \mathbf{u}^k)\|_{(L^{\frac52}(Q_{T^*}))^{3\times3}} \\ &\quad + \|(\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^k)\otimes(\mathbf{u}^{k-1} + \mathbf{u}^k)\|_{(L^2(Q_{T^*}))^{3\times3}}\big) \\ &\leq C\big(\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3}\big)\times \\ &\times\big(\|\mathbf{u}^k\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^{k-1}\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^k\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^{k-1}\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3}\big). \end{aligned}$$

Ukažme, že můžeme volit T^* tak, aby

$$\|\mathbf{u}^{k+1}\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3} \leq 2\kappa(T^*) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{4.13}$$

Pro $k = 0$ je (4.13) důsledkem definice $\kappa(T^*)$. Dále postupujeme indukcí. Máme, díky (4.11) a (4.12),

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^1\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^1\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3} \\ \leq C\big(\|\mathbf{u}^k\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^k\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3}\big)^2.\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}^{k+1}\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3} \\ \leq C\big(\|\mathbf{u}^k\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^k\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3}\big)^2 + \|\mathbf{u}^1\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^1\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3}.\end{aligned}$$

Tedy využitím indukčního předpokladu

$$\|\mathbf{u}^{k+1}\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3} \leq 4C\kappa^2(T^*) + \kappa(T^*) = \kappa(T^*)(1 + 4C\kappa(T^*)).$$

Stačí tedy ověřit, že lze volit T^* tak, že

$$\kappa(T^*) < \frac{1}{4C}.$$

Položme $\mathbf{a}_\epsilon = \omega_\epsilon * \mathbf{a}$ zhlazení $\mathbf{a}$. Položme $\mathbf{u}^1_\epsilon(t,\cdot) = \Gamma(t,\cdot) * \mathbf{a}_\epsilon(\cdot)$. Potom

$$\kappa(T^*) \leq I^1_\epsilon + I^2_\epsilon,$$

kde

$$\begin{aligned}I^1_\epsilon &= \|\mathbf{u}^1_\epsilon\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^1_\epsilon\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3},\\ I^2_\epsilon &= \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^1_\epsilon\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} + \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^1_\epsilon\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3}.\end{aligned}$$

Použitím Lemmatu 4.4 (které zajisté platí i pro rovnici vedení tepla)

$$I^2_\epsilon \leq C\big(\|\mathbf{a} - \mathbf{a}_\epsilon\|_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3} + \|\mathbf{a} - \mathbf{a}_\epsilon\|_{(L^2(\mathbb{R}^3))^3}\big),$$

kde C je konstanta nezávislá na čase. Fixujme $\epsilon > 0$ tak, aby

$$I^2_\epsilon < \frac{1}{8C}.$$

Pro odhad I^1_ϵ použijeme Lemma 4.3. Odhad (4.2) nám dává

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}^1_\epsilon(t,\cdot)\|_{(L^5(\mathbb{R}^3))^3} &\leq Kt^{-3/40}\|\mathbf{a}_\epsilon\|_{(L^4(\mathbb{R}^3))^3},\\ \|\mathbf{u}^1_\epsilon(t,\cdot)\|_{(L^4(\mathbb{R}^3))^3} &\leq Kt^{-1/8}\|\mathbf{a}_\epsilon\|_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3},\end{aligned}$$

proto

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}^1_\epsilon\|_{(L^5(Q_{T^*}))^3} &\leq K(T^*)^{\beta_1}\|\mathbf{a}_\epsilon\|_{(L^4(\mathbb{R}^3))^3},\\ \|\mathbf{u}^1_\epsilon\|_{(L^4(Q_{T^*}))^3} &\leq K(T^*)^{\beta_2}\|\mathbf{a}_\epsilon\|_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3}\end{aligned}$$

pro kladné konstanty K, β_1 a β_2. Volbou T^* dostatečně malého zajistíme

$$I^1_\epsilon < \frac{1}{8C}.$$

Proto lze provést $\lim_{k\to\infty}$, zobrazení je kontrakce a tudíž existuje jediná limita. Odhady jsou důsledkem odhadů z Lemmatu 4.4. Protože řešení patří do $(L^5(Q_{T^*}))^3$, je hladké a jediné na třídě Leray–Hopfových řešení. □

4.2. **Kritérium regularity implikuje hlavní větu.** Dokažme nyní, že pokud platí Věta 4.2, potom platí též Věta 4.1. Předpokládejme tedy, že $\mathbf{u}$ je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic, tj. $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;(L^2(\mathbb{R}^3))^3) \cap L^2(0,T;W^{1,2}_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3))$, a navíc $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$. Ukažme, že

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(t,x)\cdot\mathbf{w}(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.14}$$

je spojité na $[0,T]$ $\forall \mathbf{w} \in (L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))^3$. Díky regularitě výše máme časovou derivaci $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0,T;(W^{1,2}_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3))^*)$ a také $\mathbf{u} \in C([0,T];(L^2(\mathbb{R}^3))^3)$. Proto také, analogicky jako v kapitole 3, můžeme ukázat, že $\mathbf{u} \in C([0,T];(L^3_w(\mathbb{R}^3))^3)$, což dokazuje spojitost výše. Navíc, díky Fatouově větě,

$$\sup_{0\le t\le T} \|\mathbf{u}(t,\cdot)\|_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3} \le \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)}.$$

Proto lze předpokládat, že $\|\mathbf{u}(t,\cdot)\|_{(L^3(\mathbb{R}^3))^3}$ je omezená $\forall t \in [0,T]$. Dále víme, že

$$\mathbf{u} \in (L^4(Q_T))^3$$

(viz interpolace mezi $L^\infty(0,T;(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$ a $L^2(0,T;(L^6(\mathbb{R}^3))^3)$), tudíž

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\|^{\frac43}_{(L^{\frac43}(\mathbb{R}^3))^3}\,\mathrm{d}t &\le \int_0^T \|\mathbf{u}\|^{\frac43}_{(L^4(\mathbb{R}^3))^3}\|\nabla\mathbf{u}\|^{\frac43}_{(L^2(\mathbb{R}^3))^{3\times3}}\,\mathrm{d}t\\ &\le \|\mathbf{u}\|^{\frac43}_{L^4(0,T;(L^4(\mathbb{R}^3))^3)}\|\nabla\mathbf{u}\|^{\frac43}_{L^2(0,T;(L^2(\mathbb{R}^3))^{3\times3})}.\end{aligned}$$

Proto také

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}, \nabla^2\mathbf{u}, \nabla p \in L^{\frac43}(\delta,T;(L^{\frac43}(\mathbb{R}^3))^k). \tag{4.15}$$

Dále, díky rovnici

$$\Delta p = -\operatorname{div}\operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})$$

máme

$$p \in L^\infty(0,T;L^{\frac32}(\mathbb{R}^3)).$$

Proto můžeme rovnici testovat $\mathbf{u}\Phi$, $\Phi \in C_0^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^3)$ a dvojice $(\mathbf{u},p)$ je vhodným slabým řešením na každé podoblasti, která leží striktně uvnitř $(0,T)\times\mathbb{R}^3$. Platí energetická rovnost a zobecněná energetická nerovnost.

Nyní použijeme Větu 4.2. Říká, že

$$\begin{aligned}&\forall z_0 \in \mathbb{R}^3\times[0,T]\ \exists\mathcal{O}_{z_0} \text{ okolí bodu } z_0 \text{ takové, že}\\ &\qquad\qquad \mathbf{u} \text{ je hölderovsky spojitá na } (\mathbb{R}^3\times(0,T))\cap\mathcal{O}_{z_0}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Víme totiž, že $\forall z_0\ \exists R>0$ tak, že $(\mathbf{u},p)$ je vhodným slabým řešením na $Q(z_0,R) = (t_0-R^2,t_0)\times B_R(x_0)$. Provedeme-li škálování

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{u}}(t,x) &= R\mathbf{u}(t_0+R^2t, x_0+Rx),\\ \widetilde{p}(t,x) &= R^2p(t_0+R^2t,x_0+Rx),\end{aligned}$$

pak $\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{p}$ splňují předpoklady Věty 4.2, tj. $\widetilde{u}$ je hölderovsky spojitá na $\overline{Q_{\frac12}}$, tedy $\mathbf{u}$ je hölderovsky spojitá na $\overline{Q(z_0,\frac R2)}$. Dokažme, že (4.16) implikuje tvrzení Věty 4.1. Uvědomme si, že

$$\lim_{|z_0|\to+\infty}\int_{Q(z_0,r)}\big(|\mathbf{u}|^3+|p|^{\frac32}\big)\,\mathrm{d}z = 0,\quad Q(z_0,r)\subset Q_T, \tag{4.17}$$

a proto díky známému kritériu (viz Věta 2.19) máme, že

$$\max_{z_0\in[\delta,T]\times\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}(z)| \le C(\delta) < +\infty,\ \forall\delta>0. \tag{4.18}$$

Pokud položíme $w = |\mathbf{u}|^{\frac32}$, pak

$$w \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(\delta,T;W^{1,2}(\mathbb{R}^3)),\ \forall\delta>0,$$

a proto použitím multiplikativní nerovnosti

$$\|w(t,\cdot)\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)} \le C\|w(t,\cdot)\|^{\frac25}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla w(t,\cdot)\|^{\frac35}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \tag{4.19}$$

máme

$$w \in L^{\frac{10}{3}}((\delta,T)\times\mathbb{R}^3). \tag{4.20}$$

To dává, že $\mathbf{u} \in (L^5((\delta,T)\times\mathbb{R}^3))^3$. Konečně, díky tomu, že $\mathbf{u}_0 \in (L^3(\mathbb{R}^3))^3 \cap L^2_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3)$, víme, že lokálně v čase existuje hladké řešení takové, že je shodné s naším řešením, a $\mathbf{u} \in (L^5((0,T^*) \times \mathbb{R}^3)^3$, viz Věta 4.5. Proto $\mathbf{u} \in (L^5((0,T) \times \mathbb{R}^3))^3$, tedy $\mathbf{u}$ je hladké, jak umožňují data úlohy. Proto v našem případě je $\mathbf{u}$ nekonečněkrát diferencovatelná na $(0,T) \times \mathbb{R}^3$.

4.3. **Rozšíření kritéria regularity.**

Lemma 4.6. *Existuje $\epsilon_0 > 0$ takové, že pro $(\mathbf{u},p)$ vhodné slabé řešení Navier–Stokesových rovnic na Q_1 splňující*

$$\int_{Q_1} (|\mathbf{u}|^3 + |p|^{3/2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < \epsilon_0 \tag{4.21}$$

máme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $\nabla^{k-1}\mathbf{u}$ hölderovsky spojitý na $\overline{Q_{1/2}}$.

Důkaz. (Idea) Případ $k = 1$ je přesně Věta 2.19. Ukažme tedy $k = 2$, ostatní případy plynou analogicky. Protože $\mathbf{u}$ je omezená na $\overline{Q_{\frac{1}{2}+2^{-2}}}$, můžeme na $\overline{Q_{\frac{1}{2}+2^{-3}}}$ použít regularitu evolučního Stokesova problému s pravou stranou $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} \in (L^2(Q_{\frac{1}{2}+2^{-3}}))^3$. Proto $\mathbf{u} \in L^2(-\frac{25}{64},0;(W^{2,2}(B_{\frac{1}{2}+2^{-3}}))^3)$, $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}$, $\nabla p \in (L^2(Q_{\frac{1}{2}+2^{-3}}))^k$. Můžeme tedy testovat $\Delta\mathbf{u}$, což vede k odhadu $\mathbf{u}$ v $L^\infty(-\frac{25}{64},0;(W^{1,2}(B_{\frac{1}{2}+2^{-3}}))^3)$. Dále díky regularitě Stokesova problému máme $\mathbf{u} \in L^2(-\frac{25}{64},0;(W^{2,6}(B_{\frac{1}{2}+2^{-3}}))^3)$, $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t},\nabla p \in L^\infty(-\frac{25}{64},0;(L^6(B_{\frac{1}{2}+2^{-3}}))^3)$. Postupné vylepšování regularity v prostoru mi umožní testovat $\Delta^2\mathbf{u}$ a $\frac{\partial}{\partial t}\Delta\mathbf{u}$ až nakonec díky větám o vnoření dostaneme požadovaný výsledek. □

4.4. **Jednoznačné prodlužování.** Cílem je dokázat následující tvrzení.

Věta 4.7. *Nechť $|\mathbf{u}|, |\nabla\mathbf{u}|, |\nabla^2\mathbf{u}|, |\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}| \in L^2((0,T) \times B_R)$, $|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \Delta\mathbf{u}| \le C_1(|\nabla\mathbf{u}| + |\mathbf{u}|)$ s.v. na $(0,T) \times B_R$ a pro všechna $(t,x) \in (0,T) \times B_R$*

$$|\mathbf{u}(t,x)| \le C_k(|x| + \sqrt{t})^k \;\; k = 0,1,\ldots \tag{4.22}$$

Potom $\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{0}$ pro $\forall x \in \overline{B_R}$.

Tato věta je přímým důsledkem následujícího lemmatu.

Lemma 4.8. *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 4.7. Potom existuje $\gamma = \gamma(C_1) \in (0,\frac{3}{16})$ a absolutní konstanty β_1, β_2 takové, že*

$$|\mathbf{u}(t,x)| \le K_1(C_1,N)A_0(T,R)e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

pro všechna $(t,x) \in (0,T) \times B_R$ splňující $0 < t \le \gamma T$, $|x| \le \beta_1 R$, $\beta_2 t \le |x|^2$. Zde

$$A_0 = \max_{(t,x)\in(0,\frac{3}{4}T)\times B_{\frac{3}{4}R}} \big(|\mathbf{u}(t,x)| + \sqrt{T}|\nabla\mathbf{u}(t,x)|\big).$$

Z lemmatu tedy plyne, že $\mathbf{u}(t,0) = \mathbf{0}$ pro všechna $|x| \le \beta_1 R$. Poznamenejme ještě, že z regularity parabolických rovnic plyne, že $A_0 \le c(T,R)\int_0^T\int_{B_R} |\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

Důkaz. Položme $\lambda = \sqrt{2t}$, $\rho = 2|x|/\lambda$. Nechť $|x| \le \frac{3}{8}R$, $8t \le |x|^2$. Potom je $\rho \ge 4$ a pro $y \in B_\rho$ je $\lambda y \in B_{\frac{3}{4}R}$. Nechť $s \in (0,2)$; pak pro $T \le 1$, $t < \gamma T$ a $\gamma \le \frac{3}{16}$ je $\lambda^2 s \in (0,\frac{3}{4})$. Položme

$$\mathbf{v}(s,y) = \mathbf{u}(\lambda^2 s, \lambda y).$$

Potom $\mathbf{v}(\cdot,\cdot)$ je dobře definována na $(0,2) \times B_\rho$. Zřejmě také

$$\Big|\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial s} + \Delta_y\mathbf{v}\Big| \le K\lambda(|\mathbf{v}| + |\nabla\mathbf{v}|)$$

v $(0,2) \times B_\rho$. Dále

$$|\mathbf{v}(s,y)| \le C_k'(|y| + \sqrt{s})^k, \quad C_k' = C_k\lambda^k, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{4.23}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a definujme

$$0 \le \varphi(s,y) = \begin{cases} 1 & (s,y) \in (0,\frac{3}{2}) \times B_{\rho-1}, \\ \in (0,1) & \text{jinak}, \\ 0 & (s,y) \notin (0,2) \times B_\rho, \end{cases}$$

$$0 \le \varphi_\varepsilon(s) = \begin{cases} 1 & s \in (2\varepsilon, 2), \\ \in (0,1) & \text{jinak}, \\ 0 & s \in (0,\varepsilon). \end{cases}$$

Položme $\mathbf{w} = \varphi\mathbf{v}$, $\mathbf{w}_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \mathbf{w}$. Zřejmě

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\partial \mathbf{w}_\varepsilon}{\partial s} + \Delta \mathbf{w}_\varepsilon\Big| \le K\lambda\big(|\mathbf{w}_\varepsilon| + |\nabla \mathbf{w}_\varepsilon|\big) + c\Big(|\nabla\varphi||\nabla \mathbf{v}| + |\nabla\varphi||\mathbf{v}| \\ + |\Delta\varphi||\mathbf{v}| + \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial s}\Big||\mathbf{v}|\Big) + c|\varphi'_\varepsilon||\mathbf{v}|. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Nyní použijeme Carlemanovu nerovnost (viz Lemma 4.9 níže)

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \int_{B_\rho} h^{-2a}(s) \mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{4s}} (|\nabla \mathbf{w}_\varepsilon| + |\mathbf{w}_\varepsilon|)^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s \\ &\le c \int_0^2 \int_{B_\rho} h^{-2a}(s) \mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{4s}} \Big|\frac{\partial \mathbf{w}_\varepsilon}{\partial s} + \Delta \mathbf{w}_\varepsilon\Big|^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

kde c je absolutní konstanta, $h(t) = t\mathrm{e}^{\frac{1-t}{3}}$, $a > 0$ je libovolné. Položme

$$A = \max_{(s,y)\in(0,2)\times B_\rho \setminus (0,\frac{3}{2})\times B_{\rho-1}} (|\mathbf{v}(s,y)| + |\nabla \mathbf{v}(s,y)|)$$

a vezměme γ dostatečně malé, aby

$$cK^2\lambda^2 \le 2cK^2\gamma \le \frac{1}{2}.$$

Proto se hlavní člen napravo dohadne pomocí levé strany (viz (4.24)) a dostáváme

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \int_{B_\rho} h^{-2a}(s) \mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{4s}} (|\nabla \mathbf{w}_\varepsilon| + |\mathbf{w}_\varepsilon|)^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s \\ &\le cA^2 \int_0^2 \int_{B_\rho} h^{-2a}(s) \mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{4s}} \chi(s,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s \\ &+ \frac{c}{\varepsilon^2} \int_0^{2\varepsilon} \int_{B_\rho} h^{-2a}(s) \mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{4s}} |\mathbf{v}(s,y)|^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

kde $\chi(\cdot,\cdot)$ je charakteristická funkce množiny $(0,2)\times B_\rho \setminus (0,\frac{3}{2}) \times B_{\rho-1}$. Uvědomme si, že

$$|\mathbf{v}(s,y)| \le C'_k(|y| + \sqrt{s})^k, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Proveďme $\lim_{\varepsilon\to 0^+}$. Dostáváme (druhý člen vymizí díky exponenciále a podmínce (4.23))

$$\begin{aligned} D = &\int_0^{\frac{3}{2}} \int_{B_{\rho-1}} h^{-2a}(s) \mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{4s}} (|\nabla \mathbf{v}| + |\mathbf{v}|)^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s \\ &\le cA^2 \int_0^2 \int_{B_\rho} h^{-2a}(s) \mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{4s}} \chi(s,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s \\ &\le cA^2 \Big[h^{-2a}\Big(\frac{3}{2}\Big) + \rho^{N-1} \int_0^2 h^{-2a}(s) \mathrm{e}^{-\frac{|\rho-1|^2}{4s}} \, \mathrm{d}s\Big]. \end{aligned}$$

Protože $\rho \ge 4$, je

$$D \le cA^2 \Big[h^{-2a}\Big(\frac{3}{2}\Big) + \rho^{N-1} \int_0^2 h^{-2a}(s) \mathrm{e}^{-\frac{|\rho|^2}{8s}} \, \mathrm{d}s\Big].$$

Vezměme $\beta > 0$ a fixujme

$$a = \frac{\beta\rho^2}{2\ln h(3/2)}, \qquad \text{tj. } h^{-2a}(3/2) = \mathrm{e}^{-\beta\rho^2}.$$

Protože $h(3/2) > 1$, je vše v pořádku. Tedy

$$D \le cA^2 \mathrm{e}^{-\beta\rho^2}\Big[1 + \rho^{N-1}\mathrm{e}^{-\beta\rho^2}\int_0^2 h^{-2a}(s)\mathrm{e}^{2\beta\rho^2 - \frac{\rho^2}{8s}}\,\mathrm{d}s\Big].$$

Upřesněme volbu $\beta \in (0, \frac{1}{64})$, např. $\beta = \frac{1}{100}$. Potom

$$D \le cA^2 \mathrm{e}^{-\beta\rho^2}\Big[1 + \int_0^2 h^{-2a}(s)\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{16s}}\,\mathrm{d}s\Big].$$

Protože $\beta \le \frac{3\ln(3/2)}{32}$, je pro $g(s) = h^{-2a}(s)\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{16s}}$ splněno $g'(s) \ge 0$ pro $s \in (0,2)$, a definováno výše. Proto

$$D \le cA^2\mathrm{e}^{-\beta\rho^2}.$$

Volbou ρ a λ máme pro všechna $\mu \in (0,1)$ a $x \in B_{3R/8}$ splněno, že $B_1(\frac{\mu}{\lambda}x) \subset B_{\rho-1}$. Položme $\widetilde{Q} = (\frac{1}{2}, 1) \times B_1(\frac{\mu}{\lambda}x)$. Potom

$$D \ge \int_{\widetilde{Q}} \mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{2}}|\mathbf{v}|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s.$$

Protože

$$|y|^2 \le 2\frac{\mu^2}{\lambda^2}|x|^2 + 2,$$

volbou $\mu = \sqrt{2\beta}$ dostáváme

$$\int_{\widetilde{Q}} |\mathbf{v}|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \le cA^2\mathrm{e}^{(-2\beta + \frac{\mu^2}{2})\frac{|x|^2}{t}} = cA^2\mathrm{e}^{-\beta\frac{|x|^2}{t}}.$$

Na druhou stranu, použitím regularity pro zpětnou parabolickou rovnici

$$\Big|\mathbf{v}\Big(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{\lambda}x\Big)\Big|^2 \le K(C_1, N)\int_{\widetilde{Q}} |\mathbf{v}|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s,$$

a proto

$$|\mathbf{u}(t, \sqrt{2\beta}x)|^2 = |\mathbf{u}(t, \mu x)|^2 = \Big|\mathbf{v}\Big(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{\lambda}x\Big)\Big|^2 \le cA^2\mathrm{e}^{-\beta\frac{|x|^2}{t}}.$$

Záměnou proměnných $\widetilde{x} = \sqrt{2\beta}x$ je

$$|\mathbf{u}(t, \widetilde{x})| \le cA\mathrm{e}^{-\frac{|\widetilde{x}|^2}{4t}}$$

pro $|\widetilde{x}| \le \beta_1 R$, $|\widetilde{x}|^2 \ge \beta_2 t$, $\beta_1 = \frac{3}{8}\sqrt{2\beta}$, $\beta_2 = 16\beta$. □

Nyní dokážeme Carlemanovu nerovnost použitou v důkazu Lemmatu výše.

Lemma 4.9. *Pro všechny* $\mathbf{u} \in (C_0^\infty(0,2) \times \mathbb{R}^N)^N$ *a libovolné* $a > 0$ *platí*

$$\int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} h^{-2a}(t)e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\Big(\frac{a+1}{t}|\mathbf{u}|^2 + |\nabla\mathbf{u}|^2\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$\le c_0\int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} h^{-2a}(t)e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\Big(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \Delta\mathbf{u}\Big)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

kde $h(t) = te^{\frac{1-t}{3}}$ *a* c_0 *je pevná kladná konstanta.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{u} \in C_0^\infty((0,2) \times \mathbb{R}^N)^N$ je libovolná funkce. Pro $a > 0$ položme $\Phi(t,x) = -\frac{|x|^2}{8t} - (a+1)\ln h(t)$, $\mathbf{v} = \mathrm{e}^\Phi\mathbf{u}$. Potom

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \Delta\mathbf{v} = \mathrm{e}^\Phi\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\mathrm{e}^\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\big(\mathrm{e}^\Phi\mathbf{u}\otimes\nabla\Phi\big) + \mathrm{div}\,\big(\nabla\mathbf{u}\mathrm{e}^\Phi\big).$$

Proto

$$L\mathbf{v} := \mathrm{e}^{\Phi}\Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Delta \mathbf{u}\Big) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{v}\otimes \nabla\Phi) - (\nabla \mathbf{v})\nabla\Phi + \Delta\mathbf{v} + \Big(|\nabla\Phi|^2 - \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big)\mathbf{v}.$$

Rozložme tL na symetrickou a antisymetrickou část, tj.

$$\begin{aligned} tL &= S + A,\\ S\mathbf{v} &= t\Big[\Delta\mathbf{v} + \Big(|\nabla\Phi|^2 - \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big)\mathbf{v}\Big] - \frac{1}{2}\mathbf{v},\\ A\mathbf{v} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial(t\mathbf{v})}{\partial t} + t\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\Big) - t\big(\operatorname{div}(\mathbf{v}\otimes\nabla\Phi) + (\nabla\mathbf{v})\nabla\Phi\big). \end{aligned}$$

Zřejmě

$$\begin{aligned} \int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2\mathrm{e}^{2\Phi}\Big|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \Delta\mathbf{u}\Big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2|L\mathbf{v}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^2\int_{\mathbb{R}^N}\big(|S\mathbf{v}|^2 + |A\mathbf{v}|^2 + [S,A]\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

kde $[S,A] = SA - AS$ je komutátor S a A. Přímým výpočtem máme

$$\begin{aligned} I = \int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} [S,A]\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t&\\ = 4\int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2\Big[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}|\mathbf{v}|^2\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t&\\ + \int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2|\mathbf{v}|^2\Big[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - 2\frac{\partial}{\partial t}|\nabla\Phi|^2 - \Delta^2\Phi\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t|\nabla\mathbf{v}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t&\\ - \int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t|\mathbf{v}|^2\Big(|\nabla\Phi|^2 - \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.& \end{aligned}$$

Při naší volbě Φ dostáváme

(4.25)

$$I = (a+1)\int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2\Big[-\Big(\frac{h'(t)}{h(t)}\Big)' - \frac{h'(t)}{th(t)}\Big]|\mathbf{v}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{a+1}{3}\int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t|\mathbf{v}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Protože $|\nabla\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)|\mathbf{v}|^2 - \mathbf{v}\big(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \Delta\mathbf{v}\big)$, je

$$\begin{aligned} \int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2|\nabla\mathbf{v}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= -\int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t|\mathbf{v}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ -\int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2\mathbf{v}\cdot L\mathbf{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &+ \int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2|\mathbf{v}|^2\Big(|\nabla\Phi|^2 - \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

V našem případě je $|\nabla\Phi|^2 - \frac{\partial\Phi}{\partial t} = -|\nabla\Phi|^2 + (a+1)\frac{h'(t)}{h(t)}$. Tedy $\big(\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{3-t}{3t}\big)$

$$\begin{aligned} \int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2\big(|\nabla\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}|^2|\nabla\Phi|^2\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &\le 3I - \int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2\mathbf{v}\cdot L\mathbf{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ \le 3\int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2|L\mathbf{v}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \Big(\int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2|L\mathbf{v}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}&\Big(\int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2|\mathbf{v}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Díky (4.25) je tedy

$$\int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2\big(|\nabla\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}|^2|\nabla\Phi|^2\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le b_1\int_0^2\int_{\mathbb{R}^N} t^2|L\mathbf{v}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

kde b_1 je absolutní kladná konstanta. Protože

$$\mathrm{e}^{\Phi}|\nabla\mathbf{u}| \le |\nabla\mathbf{v}| + |\mathbf{v}||\nabla\Phi|$$

a $|\nabla\Phi|^2 \geq \frac{a+1}{2t}$, $\mathrm{e}^{2\Phi} = \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}} h^{-2(a+1)}(t)$, je

$$\int_0^2 \int_{\mathbb{R}^N} h^{-2a}(t)(th^{-1}(t))^2 \Big[(a+1)\frac{|\mathbf{u}|^2}{t} + |\nabla\mathbf{u}|^2\Big] \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$\leq b_2 \int_0^2 \int_{\mathbb{R}^N} h^{-2a}(t)(th^{-1}(t))^2 \Big(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \Delta\mathbf{u}\Big)^2 \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

kde b_2 je konstanta. Důkaz je hotov. □

4.5. **Zpětná jednoznačnost.**

Věta 4.10. *Nechť $R > 0$, $T > 0$ a $Q_{R,T} = [0,T] \times \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R}$. Nechť $M > 0$ a $|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \Delta\mathbf{u}| \leq M(|\nabla\mathbf{u}| + |\mathbf{u}|)$ v $Q_{R,T}$. Nechť $|\mathbf{u}|, |\nabla\mathbf{u}|, |\nabla^2\mathbf{u}|, |\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}| \in L^2_{loc}(\overline{Q_{R,T}})$. Nechť navíc $|\mathbf{u}(t,x)| \leq Me^{M|x|^2}$ v $Q_{R,T}$. Je-li $\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{0}$ v $\mathbb{R}^N \setminus B_R$, je $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ v $Q_{R,T}$.*

Budeme vycházet z článku [3]. Nejdříve dokážeme dvě nerovnosti Carlemanova typu (Lemmata 4.11 a 4.12) a poté dokážeme tvrzení věty ve dvou krocích; nejprve pro dostatečně krátké časové intervaly, přeškálováním pak dostaneme výsledek hlavní věty.

Důkaz budeme dělat pro skalární funkci u. Pro vektorovou funkci by se důkaz dělal úplně stejně. Podstatné je, že díky speciální struktuře rovnice máme, že (viz [5]) nerovnost (4.52) platí v analogickém tvaru, tj.

$$\sqrt{s}|\nabla\mathbf{u}(s,y)| + |\mathbf{u}(s,y)| \leq \frac{C(M)}{s^{N/2+1}} \int_s^{2s} \int_{B_{\sqrt{s}}(y)} |\mathbf{u}| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{4.26}$$

kde

$$\Big|\Delta\mathbf{u} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\Big| \leq M\big(|\mathbf{u}| + |\nabla\mathbf{u}|\big) \tag{4.27}$$

a $|y| > 2\sqrt{s} + R$, $0 < s \leq T/2$.

Nejprve máme

Lemma 4.11. *Nechť $u \in C_0^\infty([0,T] \times (\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R}))$. Potom existuje $\alpha_0 = \alpha_0(R,N)$ tak, že*

(4.28)
$$\big\|e^{\alpha(T-t)(|x|-R)+|x|^2} u\big\|_{L^2(Q_{R,T})} + \big\|e^{\alpha(T-t)(|x|-R)+|x|^2} \nabla u\big\|_{(L^2(Q_{R,T}))^N}$$
$$\leq \Big\|e^{\alpha(T-t)(|x|-R)+|x|^2}\Big(\Delta u + \frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big\|_{L^2(Q_{R,T})} + \|e^{|x|^2} \nabla u(T,\cdot)\|_{(L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R))^N}$$

platí $\forall \alpha \geq \alpha_0$ a pro u splňující $u(0,x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R$.

Důkaz. Budeme postupovat v několika krocích:
Krok 1: Přímým výpočtem lze ukázat, že pro G, u, hladké funkce v otevřené podmnožině $\mathbb{R}^{N+1}$ a pro $F = \frac{1}{G}\big(\frac{\partial G}{\partial t} - \Delta G\big)$ platí

(4.29)
$$\mathrm{div}\Big(2\frac{\partial u}{\partial t} G\nabla u + |\nabla u|^2 \nabla G - 2(\nabla G \cdot \nabla u)\nabla u + uFG\nabla u + \frac{1}{2}u^2 F\nabla G$$
$$-\frac{1}{2}u^2 G\nabla F\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(|\nabla u|^2 G + \frac{1}{2}u^2 FG\Big)$$
$$= 2\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \ln G \cdot \nabla u + \frac{1}{2}Fu\Big)\Big(\Delta u + \frac{\partial u}{\partial t}\Big)G$$
$$-2\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \ln G \cdot \nabla u + \frac{1}{2}Fu\Big)^2 G - \frac{1}{2}u^2\Big(\frac{\partial F}{\partial t} + \Delta F\Big)G - 2\nabla^2(\ln G)\nabla u \cdot \nabla u G.$$

Nyní, pokud zintegrujeme identitu (4.29) přes $(0,T)\times\mathbb{R}^N\setminus B_R$, dostáváme

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla\ln G\cdot\nabla u+\frac{1}{2}Fu\Big)^2 G\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad+2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}\nabla^2(\ln G)\nabla u\cdot\nabla u G\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}u^2\Big(\frac{\partial F}{\partial t}+\Delta F\Big)G\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla\ln G\cdot\nabla u+\frac{1}{2}Fu\Big)\Big(\Delta u+\frac{\partial u}{\partial t}\Big)G\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}\Big[|\nabla u|^2G+\frac{1}{2}u^2FG\Big]_0^T\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

Protože první člen na levé straně je nezáporný, za předpokladů na funkci G

- $\ln G$ je konvexní
- $\frac{\partial F}{\partial t}+\Delta F>0$

nám předchozí identita unožňuje kontrolovat váhovou L^2-normu u a ∇u (s vahou G) pomocí váhové L^2-normy $(\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta u)$ se stejnou váhou.

Speciálně, zvolme

$$G(t,x)=\mathrm{e}^{2\alpha(T-t)(|x|-R)+2|x|^2}. \tag{4.31}$$

Zřejmě potom

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\ln G(t,x)=\Big(\frac{2\alpha(T-t)}{|x|}+4\Big)\delta_{ij}-2\alpha(T-t)\frac{x_ix_j}{|x|^3} \tag{4.32}$$

a tento výraz splňuje pro $\alpha>0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\ln G(t,x)\xi_i\xi_j\geq c_0|\boldsymbol{\xi}|^2.$$

Dále je splněno

(4.33)

$$
\begin{aligned}
F(t,x)&=\frac{\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}-\Delta G(t,x)}{G(t,x)}\\
&=-2\alpha(|x|-R)-\frac{2N\alpha}{|x|}(T-t)+\frac{2\alpha}{|x|}(T-t)-4N-\Big(\frac{2\alpha}{|x|}(T-t)+4\Big)^2|x|^2
\end{aligned}
$$

a konečně

(4.34)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}+\Delta F(t,x)\\
&=8\alpha^2(T-t)+16\alpha|x|+2\alpha(T-t)(N-1)(N-3)-16\alpha(T-t)\frac{N-1}{|x|^2}-32N,
\end{aligned}
$$

tedy pro α dosti velké (v závislosti na T a R) je

$$F\leq 0,\qquad \frac{\partial F}{\partial t}+\Delta F\geq 1. \tag{4.35}$$

Konečně, protože $F\leq 0$ a $G\geq 1$, $u(0,\cdot)=0$, z posledního integrálu v (4.30) je nezáporný pouze jeden člen; na první integrál napravo použijeme Hölderovu nerovnost a dostáváme (4.28). □

K důkazu druhé Carlemanovy nerovnosti, viz Lemma 4.12 níže, bychom potřebovali vzít $G(t,x)=\mathrm{e}^{-|x|^2/4t}$. V tomto případě je

$$\frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}=\mathrm{e}^{-|x|^2/4t}\Big(\frac{x_ix_j}{4t^2}-\frac{\delta_{ij}}{2t}\Big),$$

tedy tato funkce není konvexní. Proto musíme tuto funkci vynásobit vhodnou funkcí, která závisí pouze na čase.

Lemma 4.12. *Nechť* $\sigma(t) = te^{-t/3}$, $\sigma_a(t) = \sigma(t+a)$. *Potom existuje* $K = K(N)$ *tak, že nerovnost*
(4.36)
$$\left\|\sigma_a^{-\alpha-1/2} e^{-|x-y|^2/8(t+a)} u\right\|_{L^2((0,1)\times\mathbb{R}^N)} + \left\|\sigma_a^{-\alpha} \mathrm{e}^{-|x-y|^2/8(t+a)} \nabla u\right\|_{(L^2((0,1)\times\mathbb{R}^N))^N}$$
$$\leq K \left\|\sigma_a^{-\alpha} e^{-|x-y|^2/8(t+a)} \Big(\Delta u + \frac{\partial u}{\partial t}\Big)\right\|_{L^2((0,1)\times\mathbb{R}^N)}$$

platí $\forall \alpha \geq 0$, $0 < a < 1$, $y \in \mathbb{R}^N$ *a* $u \in C_0^\infty([0,1) \times \mathbb{R}^N)$ *splňující* $u(0,\cdot) \equiv 0$.

Důkaz. Pokud v identitě (4.29), kde G řeší rovnici vedení tepla ($\frac{\partial G}{\partial t} - \Delta G = 0$), použijeme místo G funkci $\sigma^{-\alpha} G = G_\alpha$ ($\sigma = \sigma(t)$, $F_\alpha = (\frac{\partial G_\alpha}{\partial t} - \Delta G_\alpha)/G_\alpha = -\alpha \frac{\partial \sigma}{\partial t}/\sigma = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} \ln \sigma$), máme
(4.37)
$$\begin{gathered}\sigma^{-\alpha} \operatorname{div}\Big(2\frac{\partial u}{\partial t} G \nabla u + |\nabla u|^2 \nabla G - 2(\nabla G \cdot \nabla u)\nabla u - \alpha u G \nabla u \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}/\sigma \\ -\alpha \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}/(2\sigma) u^2 \nabla G\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\sigma^{-\alpha}|\nabla u|^2 G - \alpha \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}/(2\sigma)\sigma^{-\alpha} u^2 G\Big) \\ = 2\sigma^{-\alpha}\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \ln G \cdot \nabla u - \alpha \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}/(2\sigma) u\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u\Big) G + \frac{\alpha}{2}\sigma^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\ln \sigma) u^2 G \\ -2\sigma^{-\alpha}\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \ln G \cdot \nabla u - \alpha \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}/(2\sigma) u\Big)^2 G - 2\sigma^{-\alpha}\nabla^2(\ln G)\nabla u \cdot \nabla u G.\end{gathered}$$

Vynásobme nyní (4.37) funkcí $\sigma/\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$, uvědomme si, že

$$\begin{gathered}\sigma/\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\ln \sigma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\Big(\sigma/\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big), \\ \sigma/\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sigma^{-\alpha}|\nabla u|^2 G - \alpha\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}/(2\sigma)\sigma^{-\alpha}u^2 G\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\sigma^{1-\alpha}\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)|\nabla u|^2 G \\ -\alpha/2\sigma^{-\alpha}u^2 G\Big) - \sigma^{1-\alpha}/\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\Big(\sigma/\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)|\nabla u|^2 G + \alpha/2\sigma^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\Big(\sigma/\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)u^2 G.\end{gathered}$$

Potom
(4.38)
$$\begin{gathered}\sigma^{1-\alpha}/\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\operatorname{div}\Big(2\frac{\partial u}{\partial t}G\nabla u + |\nabla u|^2\nabla G - 2(\nabla G\cdot\nabla u)\nabla u - \alpha\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}/\sigma u G\nabla u \\ -\alpha\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}/(2\sigma)u^2\nabla G\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\sigma^{1-\alpha}/\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)|\nabla u|^2 G - \alpha/2\sigma^{-\alpha}u^2 G\Big) \\ = 2\sigma^{1-\alpha}/\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla\ln G\cdot\nabla u - \alpha\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}/(2\sigma)u\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u\Big)G \\ -2\sigma^{1-\alpha}/\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla\ln G\cdot\nabla u - \alpha\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}/(2\sigma)u\Big)^2 G \\ -2\sigma^{1-\alpha}/\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\nabla^2(\ln G)\nabla u\cdot\nabla u G - \sigma^{1-\alpha}/\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\Big(\sigma/\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)|\nabla u|^2 G.\end{gathered}$$

Nyní zintegrujeme (4.38) přes $(0,1)\times\mathbb{R}^N$; díky tomu, že funkce σ je nezáporná neklesající na $[0,1)$, máme

(4.39)
$$\begin{aligned}
&2\int_0^1\int_{\mathbb{R}^N}\sigma^{1-\alpha}/\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla\ln\sigma\cdot\nabla u-\alpha\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}/(2\sigma)u\Big)^2G\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_0^1\int_{\mathbb{R}^N}\sigma^{1-\alpha}/\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\Big(\sigma/\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)|\nabla u|^2+2\nabla^2(\ln G)\nabla u\cdot\nabla u\Big)G\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^1\int_{\mathbb{R}^N}\sigma^{1-\alpha}/\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big)\Big(\Delta u+\frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla\ln G\cdot\nabla u-\alpha\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}/(2\sigma)u\Big)G\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Pokud vezmeme $a\in(0,1)$ a zvolíme

$$\begin{aligned}
G(t,x)&:=G_a(t,x)=(t+a)^{-N/2}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4(t+a)}},\\
\sigma(t)&:=\sigma_a(t)=(t+a)\mathrm{e}^{-\frac{t+a}{3}},
\end{aligned}$$

máme pro $t\in(0,1)$, $x\in\mathbb{R}^N$

(4.40)
$$\frac{1}{3\mathrm{e}}(t+a)\le\sigma_a(t)\le t+a,\qquad\frac{1}{3e}\le\frac{\mathrm{d}\sigma_a}{\mathrm{d}t}\le 1.$$

Protože

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma_a}{\mathrm{d}t}/\sigma_a\Big)=\frac{3}{(t+a)(3-(t+a))},$$

je

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma_a}{\mathrm{d}t}/\sigma_a\Big)\mathbb{I}+2\nabla^2(\ln G)&\ge\Big(\frac{3}{(t+a)(3-(t+a))}-\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4(t+a)}}\frac{1}{t+a}\Big)\mathbb{I}\\
&\ge\frac{1}{3-(t+a)}\mathbb{I}\ge\frac{1}{3}\mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Proto máme

$$\big\|\sigma_a^{(1-\alpha)/2}G_a^{1/2}\nabla u\big\|_{(L^2((0,1)\times\mathbb{R}^N))^N}\le K\Big\|\sigma_a^{(1-\alpha)/2}G_a^{1/2}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta u\Big)\Big\|_{L^2((0,1)\times\mathbb{R}^N)}.$$

Dále si uvědomme, že

$$\Big(\Delta+\frac{\partial}{\partial t}\Big)u^2=2u\Big(\Delta+\frac{\partial}{\partial t}\Big)u+2|\nabla u|^2,$$

proto

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\Delta+\frac{\partial}{\partial t}\Big)u^2G_a\sigma_a^{-\beta}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1\int_{\mathbb{R}^N}2|\nabla u|^2G_a\sigma_a^{-\beta}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+2\int_0^1\int_{\mathbb{R}^N}u\Big(\Delta+\frac{\partial}{\partial t}\Big)uG_a\sigma_a^{-\beta}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Pokud použijeme integraci per partes na levé straně nerovnosti a dále toho, že G_a řeší rovnici vedení tepla a $u(0,\cdot)=0$, máme

(4.41)
$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_{\mathbb{R}^N}u^2\sigma_a^{-\beta-1}G_a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&\le K\Big(\int_0^1\int_{\mathbb{R}^N}\sigma_a^{-\beta}|\nabla u|^2G_a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^1\int_{\mathbb{R}^N}u\Big(\Delta+\frac{\partial}{\partial t}\Big)u\sigma_a^{-\beta}G_a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big).
\end{aligned}$$

Vhodnou volbou α, β, použitím Cauchy–Schwarzovy nerovnosti v (4.41), dostáváme (4.36), přičemž jsme využili, že výše dokázané nerovnosti jsou invariatní na posun v prostorové proměnné. $\square$

Nyní dokažme, že tvrzení Věty 4.10 platí na krátkách časových intervalech, jsou-li konstanty dostatečně malé.

Lemma 4.13. *Nechť u splňuje v $[0,1]\times(\mathbb{R}^N\setminus B_R)$*

$$\Big|\Delta u+\frac{\partial u}{\partial t}\Big|\le\varepsilon(|u|+|\nabla u|),\qquad |u(t,x)|\le \mathrm{e}^{\varepsilon|x|^2}\tag{4.42}$$

a nechť $u(0,x)\equiv 0$ na $\mathbb{R}^N\setminus B_R$ pro jisté $R\ge 1$. Potom existuje $\varepsilon_0(N)>0$ takové, že $u\equiv 0$ na $[0,\varepsilon]\times(\mathbb{R}^N\setminus B_R)$ pro $\varepsilon\le\varepsilon_0(N)$.

Důkaz. Ukažme nejprve, že existuje $\varepsilon_0(N)>0$ a $C=C(N)$ tak, že funkce u splňující předpoklady Lemmatu 4.13 splňuje v $[0,1/C]\times(\mathbb{R}^N\setminus B_{6R})$

$$|u(s,y)|+|\nabla u(s,y)|\le C\mathrm{e}^{-|y|^2/Cs}\big(1+\|u\|_{L^\infty((0,1)\times(B_{4R}\setminus B_R))}\big),\tag{4.43}$$

je-li $\varepsilon\le\varepsilon_0$.

Nechť tedy u splňuje (4.42), $|y|\ge 6R$ a $r\ge 4|y|$. Položme nyní $u_r(t,x)=u(t,x)\varphi(t)\psi_r(x)$, $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi\equiv 1$ pro $t\le 1/2$, $\varphi\equiv 0$ pro $t\ge 3/4$ a $\psi_r\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\psi_r\equiv 1$ pro $3R\le|x|\le 2r$, $\psi_r\equiv 0$ pro $|x|\le 2R$ nebo $|x|\ge 3r$, $0\le\varphi,\psi_r\le 1$. Aplikujme nyní Carlemanovu nerovnost (4.36) z Lemmatu 4.12 na u_r, kde volíme $\alpha=k$, $k\in\mathbb{N}$, $a\in(0,1)$. Potom

$$\begin{aligned}&\big\|\sigma_a^{-k-1/2}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8(t+a)}u_r\big\|_{L^2((0,1)\times\mathbb{R}^N)}+\big\|\sigma_a^{-k}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8(t+a)}\nabla u_r\big\|_{L^2((0,1)\times\mathbb{R}^N)}\\&\quad\le C\Big\|\sigma_a^{-k}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8(t+a)}\Big(\frac{\partial u_r}{\partial t}+\Delta u_r\Big)\Big\|_{L^2((0,1)\times\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}\tag{4.44}$$

Na druhou stranu, díky definici u_r a (4.42)

$$\begin{aligned}&\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\Big)u_r(t,x)\Big|\le\varepsilon(|u_r(t,x)|+|\nabla u_r(t,x)|)\\&+|\varphi'(t)u_r(t,x)|+\varphi(t)\Big(|u(t,x)|(|\Delta\psi_r(x)|+|\nabla\psi_r(x)|)+2|\nabla\psi_r(x)||\nabla u(t,x)|\Big).\end{aligned}\tag{4.45}$$

Volíme-li ε dostatečně malé, lze první člen v (4.45) převést na levou stranu v (4.44) a proto máme

$$\begin{aligned}&\|\sigma_a^{-k-1/2}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8(t+a)}u_r\|_{L^2((0,1)\times\mathbb{R}^N)}+\|\sigma_a^{-k}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8(t+a)}\nabla u_r\|_{L^2((0,1)\times\mathbb{R}^N)}\\&\quad\le C\Big(\|\sigma_a^{-k}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8(t+a)}u\|_{L^2((1/2,3/4)\times(\mathbb{R}^N\setminus B_R))}\\&\quad+\|\sigma_a^{-k}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8(t+a)}(|u|+|\nabla u|)\|_{L^2((0,3/4)\times(B_{3R}\setminus B_{2R}))}\\&\quad+\|\sigma_a^{-k}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8(t+a)}(|u|+|\nabla u|)\|_{L^2((0,3/4)\times(B_{3r}\setminus B_{2r}))}.\end{aligned}\tag{4.46}$$

Nyní využijeme L^∞-odhadů skalárních parabolických rovnic, viz [5]. Budeme pak mít, že

$$\begin{aligned}&\|\sigma_a^{-k}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8(t+a)}(|u|+|\nabla u|)\|_{L^2((0,3/4)\times(B_{3r}\setminus B_{2r}))}\\&\quad\le Ca^{-k}\mathrm{e}^{-r^2}\|u\|_{L^\infty((0,1)\times(B_{4r}\setminus B_r))}.\end{aligned}\tag{4.47}$$

Proto pro $\varepsilon\le\frac{1}{16}$ jde pravá strana této nerovnosti k nule pro $r\to+\infty$. Tedy pokud pošleme $r\to+\infty$ a potom $a\to 0^+$ v (4.46), díky (4.40) dostáváme, že

$$\begin{aligned}&\|t^{-k-1/2}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8t}u\|_{L^2((0,1/2)\times(\mathbb{R}^N\setminus B_{2R}))}\\&+\|t^{-k}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8t}u\|_{L^2((0,1/2)\times(\mathbb{R}^N\setminus B_{2R}))}\\&\le C^k(N)\|\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8t}u\|_{L^2((1/2,3/4)\times(\mathbb{R}^N\setminus B_R))}\\&+C^k(N)\|t^{-k}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8t}(|u|+|\nabla u|)\|_{L^2((0,3/4)\times(B_{3R}\setminus B_{2R}))}.\end{aligned}$$

Díky (4.42) máme

$$\|\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8t}u\|_{L^2((1/2,3/4)\times(\mathbb{R}^N\setminus B_R))}\le C\|\mathrm{e}^{\varepsilon|x|^2-|x-y|^2/6}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\le C\mathrm{e}^{|y|^2}.\tag{4.48}$$

Dále, $\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8t}\le\mathrm{e}^{-|y|^2/16t}$ pro $x\in B_{3R}\setminus B_{2R}$ a díky Stirlingově vzorci máme

$$\max_{t>0}t^{-k}\mathrm{e}^{-|y|^2/16t}=|y|^{-2k}(16k)^k\mathrm{e}^{-k}\le|y|^{-2k}C^k(N)k!.$$

Tedy díky standardním L^∞-odhadům (viz [5])

$$\begin{aligned}\|t^{-k}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8t}(|u|+|\nabla u|)\|_{L^2((0,3/4)\times(B_{3R}\setminus B_{2R}))}\\ \le C^k(N)k!|y|^{-2k}\|u\|_{L^\infty((0,1)\times(B_{4R}\setminus B_R))}.\end{aligned}\tag{4.49}$$

Z výše uvedených odhadů a z (4.42) dostáváme, že existuje $C=C(N)$ tak, že pro všechna $|y|\ge 6R$ a $k\ge 0$

$$\begin{aligned}\|t^{-k}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8t}u\|_{L^2((0,1/2)\times(\mathbb{R}^N\setminus B_{2R}))}\\ \le C^k(N)(k!|y|^{-2k}\|u\|_{L^\infty((0,1)\times(B_{4R}\setminus B_R))}+\mathrm{e}^{|y|^2}).\end{aligned}\tag{4.50}$$

Vynásobme (4.50) $|y|^{2k}/(2C^k(N)k!)$ a sečtěme přes $k\ge 0$

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{|y|^2/(4C(N)t)}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/8t}u\|_{L^2((0,1/(8C(N)))\times(\mathbb{R}^N\setminus B_{2R}))}\\ \le C(1+\|u\|_{L^\infty((0,1)\times(B_{4R}\setminus B_R))}).\end{aligned}\tag{4.51}$$

Pokud nyní použijeme standardní odhad pro řešení prabolických nerovností (viz [5])

$$|u(s,y)|+\sqrt{s}|\nabla u(s,y)|\le C/s^{N/2+1}\int_s^{2s}\int_{B_{\sqrt{s}}(y)}|u|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\tag{4.52}$$

nerovnosti (4.52) a (4.51) (exponenciální faktor!) dávají nerovnost (4.43).

Nyní, nechť opět $0<a<1$, $r>0$ (velké), $\psi_{a,r}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ splňuje $\psi_{a,r}(x)=0$ pro $|x|\le(1+a)R$ nebo $|x|>2r$ a $\psi_{a,r}(x)=1$ pro $(1+2a)R\le|x|\le r$. Zvolme $T=4\varepsilon$, $0<\varepsilon\le 1/(10C(N))$ a použijeme Carlemanovu nerovnost z Lemmatu 4.11 (viz (4.28)) na funkci $u_{a,r}=u\psi_{a,r}$:

$$\begin{aligned}&\left\|\mathrm{e}^{\alpha(4\varepsilon-t)(|x|-R)+|x|^2}u_{a,r}\right\|_{L^2(Q_{R,4\varepsilon})}+\left\|\mathrm{e}^{\alpha(4\varepsilon-t)(|x|-R)+|x|^2}\nabla u_{a,r}\right\|_{(L^2(Q_{R,4\varepsilon}))^N}\\ &\le\left\|\mathrm{e}^{\alpha(4\varepsilon-t)(|x|-R)+|x|^2}\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\Big)u_{a,r}\right\|_{L^2(Q_{R,4\varepsilon})}+\left\|\mathrm{e}^{|x|^2}\nabla u_{a,r}(4\varepsilon,\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}\tag{4.53}$$

Stejně jako výše

$$\left|\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\Big)u_{a,r}\right|\le\varepsilon(|u_{a,r}|+|\nabla u_{a,r}|)+|u|(|\Delta\psi_{a,r}|+|\nabla\psi_{a,r}|)+2|\nabla\psi_{a,r}||\nabla u|\tag{4.54}$$

a stejně jako v případě (4.44)–(4.45) můžeme první člen napravo pro ε dostatečně malé schovat do levé strany. Proto dostáváme

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{9\varepsilon\alpha aR}\quad&\|u\|_{L^2((0,\varepsilon)\times(B_r\setminus B_{(1+3a)R}))}\le C\mathrm{e}^{8\varepsilon\alpha ar+r^2}\||u|+|\nabla u|\|_{L^2((0,4\varepsilon)\times(B_{2r}\setminus B_r))}\\ &+C(a)\mathrm{e}^{8\varepsilon\alpha aR}\||u|+|\nabla u|\|_{L^2((0,4\varepsilon)\times(B_{(1+2a)R}\setminus B_{(1+a)R}))}\\ &+\|\mathrm{e}^{|x|^2}u(4\varepsilon,\cdot)\|_{L^2(B_{2r}\setminus B_{(1+a)R})}\\ &+\|\mathrm{e}^{|x|^2}\nabla u(4\varepsilon,\cdot)\|_{(L^2(B_{2r}\setminus B_{(1+a)R}))^N}.\end{aligned}\tag{4.55}$$

Nerovnosti (4.55) a (4.43) dávají, že pro jistou konstantu závislou na ε a a platí

$$\|u\|_{L^2((0,\varepsilon)\times(B_r\setminus B_{(1+3a)R}))}\le C(\varepsilon,a)\big(\mathrm{e}^{\alpha r-r^2}+\mathrm{e}^{-\varepsilon\alpha aR}\big).\tag{4.56}$$

V této nerovnosti nejprve pošleme $r\to\infty$, pak $\alpha\to+\infty$, což vede nakonec k výsledku

$$u\equiv 0\qquad\text{na}\quad[0,\varepsilon]\times(\mathbb{R}^N\setminus B_R).$$

□

Důkaz. (Věty 4.10): Nyní můžeme přistoupit k důkazu Věty 4.10. Za předpokladů této věty existuje $\delta>0$ tak, že $u(\delta^2t,\delta x)/M$ (přeznačené na $u(t,x)$) splňuje (4.42) v $[0,T]\times(\mathbb{R}^N\setminus B_R)$ pro nové $R\ge 1$ a $T\ge 1$ s libovolně malým ε. Pro $T\ge 1$ díky Lemmatu 4.13 dostáváme, že $u\equiv 0$ v $[0,\varepsilon]\times(\mathbb{R}^N\setminus B_R)$. Potom ale $u(t+\varepsilon,x)$ splňuje (4.42) na $[0,T-\varepsilon]\times(\mathbb{R}^N\setminus B_R)$ a je-li $T-\varepsilon\ge 1$, dostáváme $u\equiv 0$ na $[0,2\varepsilon]\times(\mathbb{R}^N\setminus B_R)$. Tímto způsobem nalezneme $a\ge 0$ takové, že $u\equiv 0$ na $[0,a]\times(\mathbb{R}^N\setminus B_R)$, kde

$0 < T - a \le 1$. Položme $a_0 = a$ a $u_k(t,x) = u\big((T-a_k)t + a_k, \sqrt{T-a_k}x\big)$, kde $k \ge 0$, u_k splňuje (4.42) a $t \in [0, T/(T-a_0) - a_0]$ $(T/(T-a_0) - a_0 \ge 1!)$. Lemma 4.13 zaručuje, že $u \equiv 0$ na $[0, a_{k+1}] \times (\mathbb{R}^N \setminus B_R)$, $a_{k+1} = (1-\varepsilon)a_k + \varepsilon T$. Tedy $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je rostoucí (jinak $T = a_k$) a $0 < a_k < T$. Proto $\lim_{k\to\infty} a_k = T$, což dokazuje tvrzení Věty 4.10. □

4.6. **Důkaz Věty 4.2.**

Důkaz. Připomeňme, že funkce $\mathbf{u} \in L^\infty(-1,0;(L^2(B_1))^3) \cap L^2(-1,0;(W^{1,2}(B_1))^3)$ $\cap L^\infty(-1,0;(L^3(B_1))^3)$ a tedy patří i do $(L^4(Q_1))^3$. Proto můžeme testovat rovnici řešením $\mathbf{u}$ respektive $\mathbf{u}\Phi$, $\Phi \in C_0^\infty(Q_1)$. Navíc $p \in L^{\frac{3}{2}}(Q_1)$ a dvojice $(\mathbf{u}, p)$ je tudíž vhodným slabým řešením na Q_1.

Máme (viz (4.14))

$$t \mapsto \int_{B_1} \mathbf{u}(t,\cdot)\cdot\mathbf{w}(\cdot)\,\mathrm{d}x$$

je spojité v $[-1,0]$ $\forall \mathbf{w} \in (L^{\frac{3}{2}}(B_1))^{\frac{3}{2}}$. Navíc také

$$\sup_{-1\le t\le 0} \|\mathbf{u}(t,\cdot)\|_{(L^3(B_1))^3} \le \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(-1,0;(L^3(B_1))^3)}.$$

Podobně jako několikrát dříve rozložíme tlak na dvě části, tj. $p = p_1 + p_2$, kde první část splňuje

$$\begin{aligned} \Delta p_1(t,\cdot) &= -\operatorname{div}\operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) \text{ v } B_1,\\ p_1 &= 0 \text{ na } \partial B_1, \end{aligned}$$

ve slabém smyslu, a tedy druhá část tlaku, p_2, je harmonická,

$$\Delta p_2(t,\cdot) = 0 \text{ v } B_1.$$

Proto dostáváme

$$\|p_1\|_{L^\infty(-1,0;L^{3/2}(B_1)} \le C\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(-1,0;(L^3(B_1))^3)}.$$

Dále

$$\begin{aligned} \|p_2\|_{L^{3/2}(-1,0;L^\infty(B_{3/4}))} &= \Big(\int_{-1}^0 \big(\sup_{x\in B_{3/4}} |p_2(t,x)|^{3/2}\big)\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{2}{3}}\\ &\le C\Big(\int_{-1}^0\int_{B_{3/4}} |p_2|^{3/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{2}{3}}\\ &\le \|p\|_{L^{3/2}(-1,0;L^{3/2}(B_{3/4}))} + \|p_1\|_{L^{3/2}(-1,0;L^{3/2}(B_{3/4}))}\\ &\le C\big(\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(-1,0;(L^3(B_1))^3)} + \|p\|_{L^{3/2}(Q_1)}\big). \end{aligned} \tag{4.57}$$

Předpokládejme tedy, že tvrzení Věty 4.2 neplatí. Nechť $z_0 = (t_0, x_0) \in \overline{Q_{1/2}}$ je singulární bod. Z Lemmatu 3.6 získáme posloupnost kladných čísel $R_k \to 0$ splňujících

$$A(R_k) = \sup_{t_0 - R_k^2 \le t \le t_0} \frac{1}{R_k}\int_{B_{R_k}(x_0)} |\mathbf{u}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x \ge \varepsilon_*$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, kde $\varepsilon_* > 0$ je kladná konstanta.

Označíme $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{p}$, $\tilde{p}_1$ a $\tilde{p}_2$ prodloužení $\mathbf{u}$, p, p_1 a p_2 nulou na celé $\mathbb{R}^4$ a definujeme

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{R_k}(t,x) &= R_k\widetilde{\mathbf{u}}(t_0 + R_k^2 t, x_0 + R_k x),\\ p^{R_k}(t,x) &= R_k^2\widetilde{p}(t_0 + R_k^2 t, x_0 + R_k x),\\ p_1^{R_k}(t,x) &= R_k^2\widetilde{p_1}(t_0 + R_k^2 t, x_0 + R_k x),\\ p_2^{R_k}(t,x) &= R_k^2\widetilde{p_2}(t_0 + R_k^2 t, x_0 + R_k x). \end{aligned}$$

Pomocí věty o substituci dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}^{R_k}(t,x)|^3 \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^3} |\widetilde{\mathbf{u}}(t_0 + R_k^2 t, x)|^3 \,\mathrm{d}x,\\ \int_{\mathbb{R}^3} |p_1^{R_k}(t,x)|^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^3} |\widetilde{p_1}(t_0 + R_k^2 t, x)|^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.58}$$

a pro každou $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ omezenou

$$\int_{\mathbb{R}} \big(\sup_{x\in\Omega} |p_2^{R_k}(t,x)|^{\frac{3}{2}}\big) \,\mathrm{d}t = R_k \int_{\mathbb{R}} \big(\sup_{x\in\Omega} |\widetilde{p_2}(s, x_0 + R_k x)|^{\frac{3}{2}}\big) \,\mathrm{d}s. \tag{4.59}$$

Tedy můžeme vybrat slabě konvergentní podposloupnosti, které lze bez újmy na obecnosti označit původními indexy tak, že pro $k \to \infty$

- $\mathbf{u}^{R_k} \rightharpoonup^* \mathbf{U}$ v $L^\infty(\mathbb{R}; (L^3(\mathbb{R}^3))^3)$, přičemž $\operatorname{div} \mathbf{U} = 0$,
- $p_1^{R_k} \rightharpoonup^* P$ v $L^\infty(\mathbb{R}; L^{3/2}(\mathbb{R}^3))$,
- $p_2^{R_k} \to 0$ v $L^{3/2}(\mathbb{R}; L^\infty(\Omega))$

pro každou $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ kompaktní.

Vezměme pevnou $\Phi \in C_0^\infty\big(\mathbb{R}^4\big)$, nezápornou. Definujme Φ^{R_k} vztahem

$$\Phi(\tau, y) = R_k \Phi^{R_k}(t_0 + R_k^2 \tau, x_0 + R_k y), \quad y \in \mathbb{R}^3, \tau \in \mathbb{R}.$$

Zvolme R_k dost malé, aby platilo

$$\operatorname{supp} \Phi \subset \Big\{(\tau, y); t_0 + R_k^2 \tau \in \big(-9/16, 0\big),\, x_0 + R_k y \subset B_{3/4}\Big\},$$

tedy

$$\operatorname{supp} \Phi^{R_k} \subset \big(-9/16, 0\big) \times B_{3/4}.$$

Protože $(\mathbf{u}, p)$ je vhodné slabé řešení Navier–Stokesových rovnic, máme zobecněnou energetickou nerovnost ve tvaru

$$\begin{aligned} 2\int_{-1}^0 \int_{B_1} &\Phi^{R_k}(t,x) |\nabla \mathbf{u}(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ \le \int_{-1}^0 \int_{B_1} &|\mathbf{u}(t,x)|^2 \Big(\Delta \Phi^{R_k}(t,x) + \frac{\partial \Phi^{R_k}(t,x)}{\partial t}\Big) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ + \int_{-1}^0 \int_{B_1} &\mathbf{u}(t,x) \cdot \nabla \Phi^{R_k}(t,x) \big(|\mathbf{u}(t,x)|^2 + 2p(t,x)\big) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

a tedy, záměnou proměnných $t = t_0 + R_k^2 \tau$, $x = x_0 + R_k y$, dostaneme

$$\begin{aligned} 2\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} &\Phi(\tau,y) |\nabla_y \mathbf{u}^{R_k}(\tau,y)|^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau\\ \le \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} &|\mathbf{u}^{R_k}(\tau,y)|^2 \Big(\Delta_y \Phi(\tau,y) + \frac{\partial \Phi(\tau,y)}{\partial \tau}\Big) \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau\\ + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} &\mathbf{u}^{R_k}(\tau,y) \cdot \nabla_y \Phi(\tau,y) \big(|\mathbf{u}^{R_k}(\tau,y)|^2 + 2p^{R_k}(\tau,y)\big) \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Nyní odvodíme apriorní odhady na tlak na $(a,b) \times \Omega$, $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^3$ a $-\infty < a < b < \infty$:

$$\begin{aligned} \|p^{R_k}\|_{L^{3/2}((a,b)\times\Omega)} &\le \|p_1^{R_k}\|_{L^{3/2}((a,b)\times\Omega)} + \|p_2^{R_k}\|_{L^{3/2}((a,b)\times\Omega)}\\ &\le C(a,b,\Omega)\Big[\|p_1^{R_k}\|_{L^\infty((a,b);L^{3/2}(\Omega))} + \|p_2^{R_k}\|_{L^{3/2}((a,b);L^\infty(\Omega))}\Big]\\ &\le C(a,b,\Omega)\Big[\|p_1\|_{L^\infty(-1,0;L^{3/2}(B_1))} + \Big(R_k \int_{\mathbb{R}} \big(\sup_{y\in\Omega} |\widetilde{p_2}|^{3/2}\big) \,\mathrm{d}s\Big)^{2/3}\Big]\\ &\le C(a,b,\Omega)\big[\|p\|_{L^{\frac{3}{2}}(Q_1)} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(-1,0;(L^3(B_1))^3)}\big].\end{aligned}$$

Ze zobecněné energetické nerovnosti, (4.58), (4.59) a předpokladům věty můžeme tedy dostat odhady nezávislé na R_k:

$$\int_Q (|p^{R_k}|^{3/2} + |\nabla \mathbf{u}^{R_k}|^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \le C_1(Q) < \infty$$

pro $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$ libovolnou kompaktní podmnožinu $\mathbb{R}^4$, kde konstanta $C(Q)$ je nezávislá na R_k. Připomeňme, že $\mathbf{u}^{R_k}(t,x) = \mathbf{0}$ pro $t_0 + R_k^2 t > 0$.

Připomeňme dále, že pro $Q = I \times B$

$$\|\mathbf{u}^{R_k}\|_{(L^4(Q))^3} \le C \|\mathbf{u}^{R_k}\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(I;(L^3(B))^3)} \|\mathbf{u}^{R_k}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I;(L^6(B))^3)},$$

tedy

$$\int_Q |\mathbf{u}^{R_k}|^4\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \le C_2(Q).$$

Proto

$$\int_Q |\mathbf{u}^{R_k} \cdot \nabla \mathbf{u}^{R_k}|^{\frac{4}{3}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \le C_3(Q).$$

Můžeme tedy opět použít regularitu Stokesova problému a dostat

$$\int_Q \Big(\Big| \frac{\partial \mathbf{u}^{R_k}}{\partial t} \Big|^{4/3} + |\nabla^2 \mathbf{u}^{R_k}|^{4/3} + |\nabla p^{R_k}|^{4/3} \Big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \le C_4(Q) < \infty. \tag{4.60}$$

Proto díky Aubin–Lionsově lemmatu máme

$$\mathbf{u}^{R_k} \to \mathbf{U} \text{ v } (L^3(Q))^3.$$

Ukažme, že navíc

$$\mathbf{u}^{R_k} \to \mathbf{U} \text{ v } C([a,b];(L^2(\Omega))^3),$$

$-\infty < a < b < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, omezená. Zřejmě díky (4.60)

$$\mathbf{u}^{R_k} \to \mathbf{U} \text{ v } C([a,b];(L^{\frac{4}{3}}(\Omega))^3),$$

neboť

$$W^{1,\frac{4}{3}}([a,b];L^{\frac{4}{3}}(\Omega)) \cap L^{\frac{4}{3}}([a,b];W^{2,\frac{4}{3}}(\Omega)) \hookrightarrow\hookrightarrow C([a,b];L^{\frac{4}{3}}(\Omega)).$$

Počítejme

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}^{R_k}(t+\Delta t,\cdot) - \mathbf{u}^{R_k}(t,\cdot)\|_{(L^2(\Omega))^3} \le \\ &\|\mathbf{u}^{R_k}(t+\Delta t,\cdot) - \mathbf{u}^{R_k}(t,\cdot)\|^{2/5}_{(L^{\frac{4}{3}}(\Omega))^3} \|\mathbf{u}^{R_k}(t+\Delta t,\cdot) - \mathbf{u}^{R_k}(t,\cdot)\|^{3/5}_{(L^3(\Omega))^3} \to 0 \end{aligned}$$

pro $\Delta t \to 0$. Celkem limitní funkce $(\mathbf{U}, P)$ splňují

- $$\int_Q \Big(|\mathbf{U}|^4 + |\nabla \mathbf{U}|^2 + \Big|\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\Big|^{\frac{4}{3}} + |\nabla P|^{\frac{4}{3}} \Big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \le C_5(Q) < \infty$$
  pro všechny $Q \subset \mathbb{R}^4$, omezené
- $\mathbf{U} \in C([a,b];(L^2(\Omega))^3)$, $-\infty < a < b < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, omezená
- $\mathbf{U} \in L^\infty(\mathbb{R};(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$, $P \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^4)$
- Dvojice $(\mathbf{U}, P)$ je distributivním řešením Navier–Stokesových rovnic (a splňuje je i skoro všude na $\mathbb{R}^4$)
- Pro všechny nezáporné $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ splňuje zobecněnou energetickou rovnost

$$2\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi |\nabla \mathbf{U}|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \Big[|\mathbf{U}|^2 \Big(\Delta \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big) + \mathbf{U} \cdot \nabla \Phi \big(|\mathbf{U}|^2 + 2P \big) \Big]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$$

  a tudíž je $(\mathbf{U}, P)$ $\forall [a,b] \times \Omega$, $-\infty < a < b < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. omezená, vhodným slabým řešením na této množině

•
$$\sup_{-1\le t\le 0}\int_{B_1}|\mathbf{U}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x \ge \varepsilon_* > 0,$$
protože
$$\sup_{t_0-R_k^2\le t\le t_0}\frac{1}{R_k}\int_{B_{R_k}(x_0)}|\mathbf{u}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x = \sup_{-1\le t\le 0}\int_{B_1}|\mathbf{u}^{R_k}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x \ge \epsilon_*.$$

Dokažme nyní, že $\exists R_2$ a $T_2>0$ tak, že $\forall k=0,1,\dots$ máme $\nabla^k\mathbf{U}$ hölderovsky spojitý a omezený na $(-2T_2,0]\times\mathbb{R}^3\backslash B_{R_2/2}$. Pro pevné $T_2>2$ platí, že
$$\int_{-4T_2}^0\int_{\mathbb{R}^3}\big(|\mathbf{U}|^3+|P|^{3/2}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t<\infty\,,$$
proto
$$\lim_{R\to\infty}\int_{-4T_2}^0\int_{\mathbb{R}^3\backslash\overline{B_R}}\big(|\mathbf{U}|^3+|P|^{3/2}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=0\,.$$
To tedy znamená, že pro libovolné $\varepsilon_0>0$ existuje $R_2(\varepsilon_0,T_2)\ge 4$ tak, že
$$\int_{-4T_2}^0\int_{\mathbb{R}^3\backslash\overline{B_{R_2/4}}}\big(|\mathbf{U}|^3+|P|^{3/2}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t<\varepsilon_0\,.$$
Vezměme $z_1=(t_1,x_1)\in(-2T_2,0]\times\mathbb{R}^3\backslash B_{R_2/2}$. Potom
$$Q(z_1,1)\subset(-4T_2,0]\times\mathbb{R}^3\setminus B_{R_2/4},$$
a proto
$$\int_{t_1-1}^{t_1}\int_{B_1(x_1)}\big(|\mathbf{U}|^3+|P|^{3/2}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t<\epsilon_0$$
pro všechna $z_1\in(-2T_2,0]\times\mathbb{R}^3\backslash B_{R_2/2}$, $T_2>2$, $R_2>4$. Proto
$$\max_{z\in Q(z_1,1/2)}|\nabla^k\mathbf{U}(z)|\le C_{0,k}<\infty,\quad \forall k=0,1,\dots$$
a $\nabla^k\mathbf{U}(z)$ je hölderovsky spojitý na $(-2T_2,0]\times\mathbb{R}^3\backslash B_{R_2/2}$, viz Lemma 4.6.

Definujme vorticitu $\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\mathbf{U}$. Potom
$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}\nabla\mathbf{U}-\Delta\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$$
v $(-T_2,0]\times\mathbb{R}^3\setminus B_{R_2}$. Díky hladkosti $\mathbf{U}$, viz výše, máme že na $(-T_2,0]\times\mathbb{R}^3\setminus B_{R_2}$ platí
$$\Big|\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}-\Delta\boldsymbol{\omega}\Big|\le M(|\boldsymbol{\omega}|+|\nabla\boldsymbol{\omega}|),\quad M>0.$$
Navíc máme $|\boldsymbol{\omega}|\le C_{0,0}+C_{0,1}<\infty$. Ukážeme, že $\boldsymbol{\omega}(x,0)=\mathbf{0}$ pro $x\in\mathbb{R}^3\backslash B_{R_2}$. Připomeňme, že $\mathbf{U}\in C([-T_2,0];(L^2(\Omega))^3)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, omezená. Tedy pro $x_*\in\mathbb{R}^3\setminus B_{R_2}$
$$\begin{aligned}
&\Big(\int_{B_1(x_*)}|\mathbf{U}(0,x)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\\
&\le\Big(\int_{B_1(x_*)}|\mathbf{u}^{R_k}(0,x)-\mathbf{U}(0,x)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}+\Big(\int_{B_1(x_*)}|\mathbf{u}^{R_k}(0,x)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\\
&\le\|\mathbf{u}^{R_k}-\mathbf{U}\|_{C([-T_2,0];(L^2(B_1(x_*)))^3)}+|B_1|^{1/6}\Big(\int_{B_1(x_*)}|\mathbf{u}^{R_k}(0,x)|^3\,\mathrm{d}x\Big)^{1/3}\\
&\le\|\mathbf{u}^{R_k}-\mathbf{U}\|_{C([-T_2,0];(L^2(B_1(x_*)))^3)}+|B_1|^{1/6}\Big(\int_{B_{R_k}(x_0+R_kx_*)}|\mathbf{u}(t_0,y)|^3\,\mathrm{d}y\Big)^{1/3}.
\end{aligned}$$

Protože $\mathbf{u}_{R_k} \to \mathbf{U}$ v $C([-T_2,0];(L^2(B_1(x_*)))^3)$ a $\sup_{t\in[-1,0]} \|\mathbf{u}(t,\cdot)\|_{(L^3(B_1))^3} < \infty$, máme

$$\int_{B_1(x_*)} |\mathbf{U}(0,x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0 \ \forall x_* \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{R_2}},$$

tedy

$$\boldsymbol{\omega}(0,x) = \operatorname{rot} \mathbf{U}(0,x) = \mathbf{0} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{R_2}.$$

Věta 4.10 nám tedy dává, že

$$\boldsymbol{\omega}(t,x) = \mathbf{0}\ ,\ (t,x) \in (-T_2,0] \times \mathbb{R}^3 \setminus B_{R_2}.$$

Zbývá dokázat, že

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \text{ v } (-T_2,0] \times \overline{B_{R_2}}.$$

Tím totiž dostaneme $\mathbf{U} = \nabla\psi$, kde ψ je harmonická funkce s omezenou L^3-normou $\nabla\psi$. Pak $\nabla\psi = \mathbf{0}$ a tedy $\mathbf{U}(t,\cdot) = \mathbf{0}$ pro s.v. $t \in (-T_2,0]$, což je ve sporu s předpokladem

$$\sup_{-1\le t\le 0} \int_{B_1} |\mathbf{U}(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x \ge \epsilon_* > 0.$$

Nyní dokážeme, že $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0}$.

Víme, že v $(-T_2,0] \times \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{R_2}}$ je $\Delta\mathbf{U} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{U} = \mathbf{0}$, a proto v $(-T_2,0] \times \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{R_2}}$ platí

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U}\otimes\mathbf{U}) + \nabla P = \mathbf{0}\\ \operatorname{div}\mathbf{U} = 0, \quad \Delta\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{U} = \mathbf{0}.\end{gathered}$$

Proto pro libovolné $Q_0 \subset (-T_2,0] \times \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{2R_2}}$

$$\max_{z\in Q_0} \Big[|\nabla^k \mathbf{U}(z)| + \Big|\nabla^k \frac{\partial \mathbf{U}(z)}{\partial t}\Big| + |\nabla^k P|\Big] \le C^1_{0,k} < \infty, \quad k = 0,1,\ldots.$$

Fixujme $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ takovou, že $\varphi \equiv 1$ na B_{4R_2} a $\varphi \equiv 0$ na $\mathbb{R}^3 \setminus B_{6R_2}$. Položme $\mathbf{W} = \varphi\mathbf{U}$ a $R = \varphi P$. Potom

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{W}\otimes\mathbf{W}) - \Delta\mathbf{W} + \nabla R = \mathbf{g}\\ &\operatorname{div}\mathbf{W} = \mathbf{U}\cdot\nabla\varphi\end{aligned}\right\}\ \text{v } Q_* = (-T_2/2,0] \times B_{8R_2},$$
$$\mathbf{W}(t,x)|_{\partial B_{8R_2}} = \mathbf{0},$$

kde

$$\mathbf{g} = (\varphi^2 - \varphi)\operatorname{div}(\mathbf{U}\otimes\mathbf{U}) + \mathbf{U}\mathbf{U}\cdot\nabla\varphi^2 + P\nabla\varphi - 2(\nabla\mathbf{U})\nabla\varphi - \mathbf{U}\Delta\varphi.$$

Funkce $\mathbf{g}$ splňuje $\mathbf{g}(t,x) = \mathbf{0}$ pro $x \in B_{4R_2}$ nebo $x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{6R_2}$ a

$$\sup_{z\in Q_*} \Big[|\nabla^k \mathbf{g}(z)| + \Big|\nabla^k \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(z)\Big|\Big] \le C^2_{0k} < \infty, \quad k = 0,1,\ldots,$$

což jsme dostali z hladkosti $\mathbf{U}$ a P. Potřebujeme pracovat s funkcemi s nulovou divergencí. Proto vyřešíme Stokesův problém v Q_*. Tedy pro libovolné $t \in (-T_2/2,0]$ hledáme řešení úlohy

$$\left.\begin{aligned}-\Delta\widetilde{\mathbf{W}} + \nabla\widetilde{R} &= \mathbf{0}\\ \operatorname{div}\widetilde{\mathbf{W}} &= \mathbf{U}\cdot\nabla\varphi\end{aligned}\right\}\ \text{v } B_{8R_2}$$

s hraniční podmínkou

$$\widetilde{\mathbf{W}}|_{\partial B_{8R_2}} = \mathbf{0}.$$

Z regularity Stokesova problému máme

$$\sup_{z\in Q_*} \Big[\Big|\nabla \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\mathbf{W}}(z)\Big| + |\nabla^k \widetilde{\mathbf{W}}(z)| + |\nabla^k \widetilde{R}(z)|\Big] \le C^3_{0k} < \infty, \quad k = 0,1\ldots.$$

Položme $\mathbf{V} = \mathbf{W} - \widetilde{\mathbf{W}}$, $Q = R - \widetilde{R}$. Naše nové funkce splňují rovnice

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V} + \nabla Q = -\operatorname{div}(\mathbf{V} \otimes \widetilde{\mathbf{W}} + \widetilde{\mathbf{W}} \otimes \mathbf{V}) + \mathbf{G} \\ &\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ v } Q_*,$$

$$\mathbf{V}(t,\cdot)|_{\partial B_{8R_2}} = \mathbf{0},$$

kde

$$\mathbf{G} = -\operatorname{div}(\widetilde{\mathbf{W}} \otimes \widetilde{\mathbf{W}}) + \mathbf{g} - \frac{\partial \widetilde{\mathbf{W}}}{\partial t}.$$

Z předchozích odhadů máme

$$\sup_{z \in Q_*} |\nabla^k \mathbf{G}(z)| \leq C_{0k}^4 < \infty, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Vlastnosti $\mathbf{U}, P$ a odhady výše nám dávají

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \in L^\infty(-T_2/2, 0; (L^3(B_{8R_2}))^3) \cap C([-T_2/2, 0]; (L^2(B_{8R_2}))^3) \\ \cap L^2(-T_2/2, 0; (W^{1,2}(B_{8R_2}))^3), \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}, \nabla^2 \mathbf{V}, \nabla Q \in (L^{4/3}(Q_*))^m, \; m = 3, 3 \times 3 \times 3. \end{aligned}$$

Zvolme $t_0 \in (-T_2/2, 0)$ tak, že $\|\nabla \mathbf{V}(t_0,\cdot)\|_{(L^2(B_{8R_2}))^3} < \infty$. Existuje $\delta_0 > 0$ takové, že $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}, \nabla^2 \mathbf{V}, \nabla Q \in (L^2((t_0, t_0 + \delta_0) \times B_{8R_2}))^m$. Využijeme-li regularitu lineárních rovnic, dostaneme pro $k = 0, 1, \ldots$ a $\epsilon < \delta_0/4$ odhad

$$\sup_{t_0 + \epsilon \leq t \leq t_0 + \delta_0 - \epsilon} \; \sup_{x \in \overline{B_{8R_2}}} |\nabla^k \mathbf{V}(t,x)| \leq C_{0k}^5 < \infty.$$

Proto, speciálně

$$\sup_{t_0 + \epsilon \leq t \leq t_0 + \delta_0 - \epsilon} \; \sup_{x \in \overline{B_{8R_2}}} |\nabla^k \mathbf{U}(t,x)| \leq C_{0k}^6 < \infty, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Víme tedy, že v $(t_0 + \epsilon, t_0 + \delta_0 - \epsilon) \times B_{8R_2}$ pro jistá M, $M_1 > 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \Delta \boldsymbol{\omega} \right| &\leq M(|\nabla \boldsymbol{\omega}| + |\boldsymbol{\omega}|), \\ |\omega| &\leq M_1. \end{aligned}$$

Navíc, je-li $(t,x) \in (t_0 + \epsilon, t_0 + \delta_0 - \epsilon) \times B_{8R_2} \setminus \overline{B_{R_2}}$, je $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Díky Větě 4.7 (aplikované po posunutí v čase i prostoru) dostáváme, že

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \text{v } (t_0 + \epsilon, t_0 + \delta_0 - \epsilon) \times B_{8R_2}$$

pro s.v. $t_0 \in (-T_2/2, 0)$. Pokud zopakujeme stejný argument na $(-T_2, -T_2/2]$, dostáváme konečně

$$\boldsymbol{\omega}(t,x) \equiv \mathbf{0} \quad \text{v } (-T_2, 0] \times \mathbb{R}^3.$$

□

Reference

[1] Caffarelli, L., Kohn, R., Nirenberg, L.: *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), no. 6, 771–831.

[2] Escauriaza, L., Seregin, G. A., Šverák, V.:*$L_{3,\infty}$-solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness*, (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **58** (2003), no. 2(350), 3–44; translation in Russian Math. Surveys **58** (2003), no. 2, 211–250.

[3] Escauriaza, L., Seregin, G. A., Šverák, V.:*Backward Uniqueness for Parabolic Equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **169** (2003), 147–157.

[4] Ladyzhenskaya, O. A., Seregin, G. A.: *On partial regularity of suitable weak solutions to the three-dimensional Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. **1** (1999), no. 4, 356–387.

[5] Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., Uralceva, N.N.: **Linear and quasilinear equations of parabolic type**, Translations of Mathematical Monographs, AMS 1968.

[6] Lin, Fanghua: *A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem*, Comm. Pure Appl. Math. **51** (1998), no. 3, 241–257.
[7] Pokorný, M.: *Navier–Stokesovy rovnice* (available also in English: *Navier–Stokes equations*), `http://www.karlin.mff.cuni.cz/ pokorny/NS.html` (2010).
[8] Seregin, G. A., Šverák, V.: *On solutions to the Navier–Stokes equations with lower bounds on pressure*, Arch. Ration. Mech Anal. **163** (2002), 65–86.