

15.

KOMPLEXNÍ ANALÝZA

aneb ÚVOD DO ANALÝZY KOMPLEXNÍCH FUNKCÍ KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

- Komplexní analýza je významná a jedna z nejfascinujících oblastí matematiky, což znamená a definice násobení komplexních čísel, které činí, na rozdíl od $\mathbb{R}^2$, a komplexních čísel těleso.
- Analýza komplexních funkcí (jedné komplexní proměnné (nebo také teorie holomorfních fci)) je nejen krásná, ale má i také fundamentální roli v různých oblastech matematiky (např. teorii parciálních diferenciálních rovnic).
- Časově lze komplexní analýzu vymezit jako významné období rozvoje doba 1800-1950 s předchůzci v pracích Leonarda Eulera (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) a Carla Gausse (1777-1855) a zlatým obdobím v pracích Augustina-Louise Cauchy (1789-1857), Bernharda Riemanna (1826-1866), Hermanna Schwarte (1843-1921) a Karla Weierstrasse (1815-1897).

15.1.

Připomenutí již probrané látky

► Definice $\mathbb{C}$ $\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{z = (z_1, z_2) ; z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$ kde máme dvě operace přičtení a násobení definované tak, že

$$z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow z + w = (z_1 + w_1, z_2 + w_2)$$

$$\Rightarrow z \cdot w = (z_1 w_1 - z_2 w_2, z_1 w_2 + z_2 w_1)$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je těleso a graficky zobrazujeme Gaussovu rovinu (*)

Terminologie: Je-li $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}$, pak $z_1 \dots$ Reálná část
 $z_2 \dots$ Imaginární část.

[Je-li $x \in \mathbb{R}$, pak zobrazujeme $(x, 0)$ a x a redukovanou na komplexní rovinu a $\mathbb{R}$, a lze tak vnímat $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Speciálně: $0 = (0, 0)$ a $1 = (1, 0)$. Definujeme $\boxed{i = (0, 1)}$ IMAGINÁRNÍ JEDNOTKA

Tvrzení ($\forall z \in \mathbb{C}$) $z = (z_1, z_2)$ lze psát ve tvaru $z = z_1 + i z_2$

$$\textcircled{Dk} \quad \left. \begin{array}{l} z_1 = (z_1, 0) \\ i z_2 = (0, 1) \cdot (z_2, 0) = (0, z_2) \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 + i z_2 = (z_1, z_2).$$

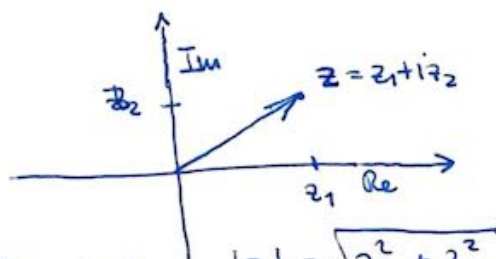
Tvrzení $i^2 = -1$

(Dě) $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1.$

□

Na $\mathbb{C}$ však nejsou všechny axiomy uspořádání a tak $\mathbb{C}$ nemá tak bohatou strukturu jako $\mathbb{R}$, ale na rozdíl od $\mathbb{R}^k = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k\text{-krát}}$ je $\mathbb{C}$ těleso, což mu dává bohatší strukturu než má samotné $\mathbb{R}^2$.

Gaussova rovina



$$z = (z_1, z_2) = z_1 + iz_2 \quad \mapsto \quad |z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

$$\mapsto \quad z = |z| e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

goniometrický tvar $z \in \mathbb{C}$

$$\mapsto \quad \bar{z} = z_1 - iz_2$$

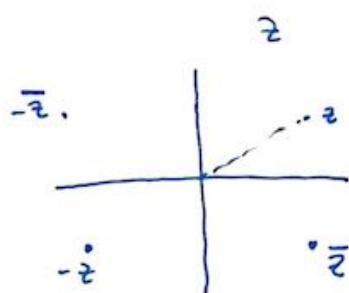
$$\mapsto \quad \arg z = \left\{ \varphi; \varphi_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

hodnoty argumentu komplexního čísla

$$\mapsto \quad \text{Arg } z = \varphi_0 \in (0, 2\pi)$$

nebo $\in (-\pi, \pi)$

hlavní hodnota argumentu



$$z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow z \cdot w = zw = |z||w| e^{i\varphi} e^{i\psi} = |z||w| e^{i(\varphi+\psi)}$$

násobení dvou komplexních čísel je totéž jako násobení dvou vektorů. Čísel z a w a úhel je dán součtem úhlů.

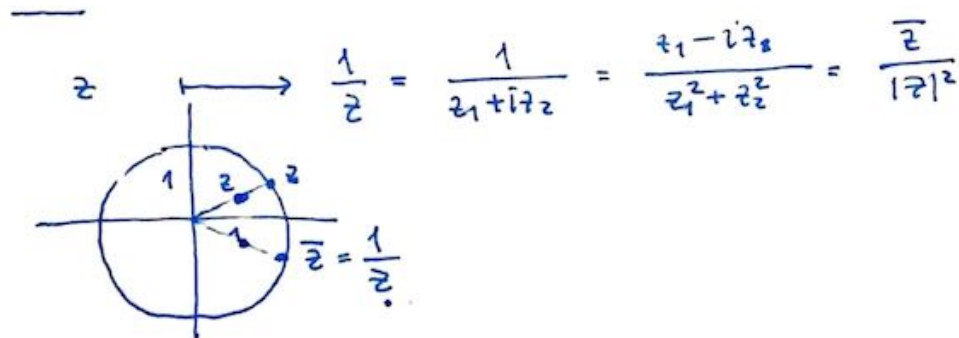
Příponu Taylorovy polynomů,
zavedení funkcí
 $\exp z, \cos z, \sin z$
 $\cosh z, \sinh z$.

$$\Rightarrow \quad z \cdot \bar{w} = (z_1 + iz_2)(w_1 - iw_2)$$

také

$$= z_1 w_1 + z_2 w_2 + i(z_1 w_2 - z_2 w_1)$$

$$= \vec{z} \cdot \vec{w} + i \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$



Metrika, topologie $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ a Riemannova sféra

$$(\mathbb{C}, |\cdot|) \text{ kde } |z| := \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = |z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}^2} \text{ je}$$

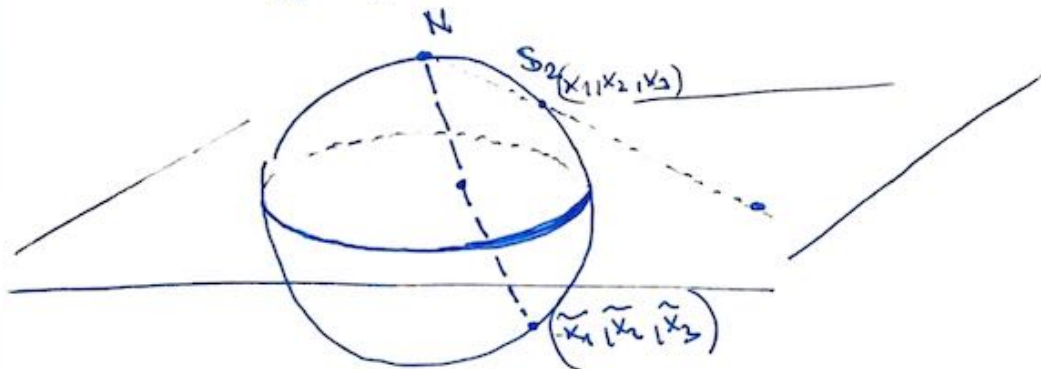
úplný normovaný prostor (dokonale metrický)

Konvergence v $\mathbb{C} \Leftrightarrow$ konvergence po složkách

$$\max\{|Re z|, |Im z|\} \leq |z| \leq |Re z| + |Im z|$$

$$z_n \rightarrow z \text{ v } \mathbb{C} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |z_n - z| < \varepsilon$$

{ Spojitost
Konvergence
nelze dobře
definovat }



stereografická projekce $\kappa: (x_1, x_2, x_3) \in S_2 \setminus N \xrightarrow{\text{tzn. } x_3 \in (-1, 1)} \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3} \in \mathbb{C}$

což je bod $(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0)$, který spoje s bodem

$(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ a $(0, 0, 1)$ ležící na jímce

neboli bodu $z \in \mathbb{C}$ přiřadí jedinečnou bod na $S_2 \setminus N$, který dohromady s N tvoří S_2 a přímku spojující N a z .

$$\kappa: B_1(0) \xrightarrow{\text{na}} S_2^- \text{ dolní polokoule}$$

$$\kappa: \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)} \xrightarrow{\text{na}} S_2^+ \setminus N$$

$$\kappa: \partial B_1(0) \xrightarrow{\text{na}} \partial B_1(0)$$

Motivací zavede

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\kappa: S^2 \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{C}^*$$

$$N \xrightarrow{\text{na}} \infty$$

$\boxed{v \mathbb{C}}$ topologie dle métriky

$$B_\varrho(z_0) = U_\varrho(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \varrho\}$$

$$B_\varrho(\infty) = U_\varrho(\infty) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \frac{1}{\varrho}\}$$

$\boxed{\text{Operace } \circ \infty}$

$$\cdot z + \infty = \infty + z = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\cdot \infty = \infty \cdot z = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \{0\}$$

$$\cdot \frac{z}{0} = \infty \quad \forall z \neq 0 \quad \text{a} \quad \frac{z}{\infty} = 0 \quad \forall z \neq \infty$$

Nem' definováno: $\infty + \infty$

$$0 \cdot \infty$$

?

15.2 Derivace $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a Cauchy-Riemannovy podmínky

Def Bud $z \in \mathbb{C}$ a $f: U(z) \rightarrow \mathbb{C}$. Řekneme, že f má v z derivaci právě když existuje $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathbb{C}$.

Tuto limitu značíme $f'(z)$, tzn.

$$(*) \quad \left[f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\substack{w=z+h \\ w \rightarrow z}} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} \right]$$

Def • Bud $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená. Řekneme, že f je holomorfní v Ω $\iff f'(z)$ existuje pro každé $z \in \Omega$.
• $H(\Omega) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} ; f \text{ je holomorfní v } \Omega \}$

Potvrdíme, že $(*) \iff \boxed{f(z+h) - f(z) = f'(z)h + o(|h|)} \quad (**)$

Platí následující tvrzení: Nechť $f'(z), g'(z)$ existují. Pak

(i) f je spojité v z

(ii) $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z); (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z);$

$[g(z) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g} \right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}]; (f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z).$

Příklady Z užití o derivování mocniných řad vidíme:

• $(a_n z^n)' = a_n n z^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}$

• $(\exp z)' = \exp z \quad z \in \mathbb{C}$

• $(z^{-n})' = \left(\frac{1}{z^n} \right)' = -\frac{1}{z^{n+1}} \quad z \neq 0$

• $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \in H(\mathbb{C})$

• $\frac{P(z)}{Q(z)} \in H(\mathbb{C} \setminus \{z_0 \in \mathbb{C}; Q(z_0) = 0\})$

P, Q polynomy

! • $\bar{z} := x - iy$ nemá derivaci v žádném $z \in \mathbb{C}$.

Vsuvkem: $\lim_{h=(h_1, h_2) \rightarrow 0=(0,0)} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = \begin{cases} 1 & h_2=0 \\ -1 & h_1=0 \end{cases}$

S pomocí
BINOMICKÉ
VĚTY

Q: Proč je naše poslední zjištění šorupia?

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ lze totiž zapsat ve tvaru

$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ a nahlížet na ni jako funkci $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

a tak $f(z) = \bar{z} \Leftrightarrow f(x, y) = (x, -y)$

a f jakožto funkce $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. !!

Tzn., že funkce mají derivace a $\mathbb{C} \xrightarrow{d_0} \mathbb{C}$ je mnohem menší než funkce diferencovatelných a $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

[$f(z) = z^2 \Leftrightarrow f(x, y) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = (x^2 - y^2, 2xy)$]

Q: Lze charakterizovat funkce, které mají $f'(z)$?

Nechť $f'(z)$ existuje. Pak

$$\begin{aligned} f_1'(z) + i f_2'(z) &= f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f_1(x+h_1, y+h_2) - f_1(x, y) + i(f_2(x+h_1, y+h_2) - f_2(x, y))}{h_1 + ih_2} \\ &= \begin{cases} h_2 = 0 & \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h_1, y) - f_1(x, y)}{h_1} + i \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f_2(x+h_1, y) - f_2(x, y)}{h_1} \\ h_1 = 0 & \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f_1(x, y+h_2) - f_1(x, y)}{ih_2} + \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f_2(x, y+h_2) - f_2(x, y)}{h_2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z) - i \frac{\partial f_1}{\partial y}(z) \end{cases} \end{aligned}$$

[Nutná]

(CR)

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(z) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z) \end{cases}$$

Cauchy - Riemannovy podmínky

Příklad Funkce $f(z) = z_1 + i2z_2$, se napíše $f(x, y) = (x, 2y)$, je $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ale nemá derivaci $f'(z)$ nikde v $\mathbb{C}$, neboť (CR) mají tvar $\begin{pmatrix} 1=0 \\ 0=2 \end{pmatrix}$ $\square$

Věta 15.2 (Dirichlet Cauchy-Riemannovy podmínky)

Označme $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ a $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

Pak platí

(1) f splňuje (CR) $\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ a } f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}}$

(2) f splňuje (CR) $\Rightarrow \operatorname{Re} f = f_1$ a $\operatorname{Im} f = f_2$ jsou harmonické
tzn. $\Delta f_1 = 0$ a $\Delta f_2 = 0$, kde $\Delta := \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

(Dě) (1) $\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} + i \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) = 0$
a $\frac{\partial f}{\partial z} = 2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - i \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial f}{\partial z}$

Dále platí

(*) $\boxed{f(z+h) - f(z) = h \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \bar{h} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) + o(|h|)}$ OVERTG! *)

Odmě $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f'(z)$.

[2] $0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) + i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \right)$
 $= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} \right) + i \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \right)$
 $= \frac{1}{4} \Delta f_1 + i \frac{1}{4} \Delta f_2$

nebo přímo

$\Delta f_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \stackrel{(CR)}{=} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \stackrel{(CR)}{=} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 0$

(*) $f(z+h) - f(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(|h|) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y} h_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y} h_2 \right) + o(|h|)$
 $= \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 + o(|h|) \stackrel{\uparrow f=f_1+i f_2}{=} \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 + o(|h|) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{h+\bar{h}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{h-\bar{h}}{2i} + o(|h|)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \bar{h} + o(|h|) = \frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h} + o(|h|)$
D.E.D.

Věta 15.3. Důležitý (CR) podmíněk

- Je-li $f'(z) = 0$ v $\Omega \subset \mathbb{C}$ všude, konstanta (nebo. v $\Omega = \mathbb{C}$),
pak $f \equiv \text{konstanta}$.

- Jestliže $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ v $\Omega \subset \mathbb{C}$ všude, konstanta a $\operatorname{Re} f = f_1$ nebo
 $\operatorname{Im} f = f_2$ nebo $|f|$ konstanta, pak $f \equiv \text{konst.}$ v Ω .

- (Dě) • $f'(z) = 0$ implikuje $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$ a t (CR)
 $2 \frac{\partial f_1}{\partial z}$ $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$ a $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$.
- Tedy $\nabla f_1 = 0$ a $\nabla f_2 = 0$ v $\Omega \Rightarrow f_1 = \text{konst.}_1$ a $f_2 = \text{konst.}_2$ v Ω .
- $f_1 = \text{konst.} \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \Rightarrow \nabla f_2 = 0 \Rightarrow f_2$ je konst. v Ω .

- Je-li $|f|$ konstanta, pak $|f|^2 = f_1^2 + f_2^2 = \text{konst.}$

odsud $2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + 2f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$ CR $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \\ f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \end{array} \right]$

$2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + 2f_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$

2 rovnice pro 2 neznámé

$$(f_1^2 + f_2^2) \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \quad \text{a} \quad (f_1^2 + f_2^2) \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \Rightarrow \nabla f_1 = 0$$

$$\Rightarrow f_1 = \text{konst.} \quad \text{a dle předchozího} \quad f_2 = \text{konst.}$$



Věta 15.4 (o lokální existenci inverzní fce a holomorfní funkce a o její derivaci) Necht $f \in H(B_\rho(z))$ a $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_\rho(z)$.

Pak existuje okolí A , na kterém je f prostá, a příslušná inverzní funkce g je holomorfní a platí

$$g \circ f = \text{identita} \quad \text{a} \quad g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \quad \Leftrightarrow \quad g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$$

$$\text{neboli} \quad [f^{-1}]'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \quad \Leftrightarrow \quad (f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$$

Ve skutečnosti stejně jako věta o inverzním zobrazování pro funkce $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
 Provedeme však malinko jiný důkaz na str. 15/10.

Skemati • (homomorficki fide na $\Omega \subset \mathbb{C}$ odeneni) $=: H(\Omega)$

$f \in H(\Omega) \Leftrightarrow$ • f má diferenciál $Df(z)(z) \forall z \in \Omega$ ($f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$)
a splňuje jedno z následujících podmínek
(které jsou vzájemně ekvivalentní):

• (i) ($f = u + iv$) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{Cauchy-Riemannovy rovnice}$
 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \forall z = x + iy \in \Omega$

• (ii) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \forall z \in \Omega \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right]$

• (iii) $\frac{\partial f}{\partial y}(z) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z) \quad \forall z \in \Omega$

• (iv) f splňuje podmínky konformality
 $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(z) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(z) \right|$
 $\frac{\partial f}{\partial x}(z) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0$
 $\det Df(z) \geq 0 \quad \forall z \in \Omega$

Platí:

$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) \quad \forall z \in \Omega$

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

- Je-li $f \in H(\Omega)$, pak si uvolíme, že f má derivace všech řádů
a A (CR) rovnice platí $\Delta u = \Delta v = 0$ v Ω .
- Je-li $f \in H(\Omega)$, $f'(z) = 0 \Rightarrow f \equiv \text{konst.}$ v Ω
- Je-li $f \in H(\Omega)$, $\operatorname{Re} f \equiv \text{konst.}$ v $\Omega \Rightarrow f \equiv \text{konst.}$ v Ω
- $\|f\|_{\infty} = \text{konst.}$ v $\Omega \Rightarrow f \equiv \text{konst.}$ v Ω .

Důkaz Věty 15.4 je založen na třech důležitých přípěvech:

- ① Věta 8.30 o lokální inverzi funkce pro $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ s $d=2$.
- ② Věta 15.1. týkající se (CR) podmínek / rovnic
- ③ Cauchy - Goursataův věta, která implikuje, že "je-li $f \in H(\Omega)$, Ω otevřená $\subset \mathbb{C}$, pak f má spojité derivace dokonce všech řádů." Tuto větu dovedeme později.

Důkaz Věty 15.4

Přestože $f \in H(B_p(z))$, tak dle Věty 15.1. je f holomorfní a $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, splňuje (C-R) podmínky. Tedy $Df(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, kde

$a+ib = \frac{\partial f}{\partial z}$. Tak dle $Df(\tilde{z}) = a^2+b^2 = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 = |f'(z)|^2 \neq 0$. Protože $f \in H(B_p(z))$, má dle ③ spojité parciální derivace. Funkce f je tedy regulární (definována na otevřeném mn., C^1 -fce, dle $Df(z) \neq 0$).

Dle Věty 8.30 existují $U_\delta(z)$ tak, že $f: U_\delta(z) \xrightarrow{\text{me}} f(U_\delta(z))$ podle a $f(U_\delta(z))$ je otevřená. Pak také existují

$$g := f^{-1}: f(U_\delta(z)) \xrightarrow{\text{me}} U_\delta(z) \text{ podle } a \ C^1$$

tak, že

$$g(f(\tilde{z})) = \tilde{z} \quad \forall \tilde{z} \in U_\delta(z)$$

$$Dg(w) = Df^{-1}(w) = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{a tedy } f^{-1} \text{ splňuje (CR) podmínky}$$

a tak $f^{-1} \in H(f(U_\delta(z)))$. Protože

$$f^{-1}(f(\tilde{z})) = \tilde{z}$$

$$\text{a } f(f^{-1}(w)) = w$$

derivujeme derivovanými složený funkce

$$[f^{-1}]'(f(\tilde{z})) f'(\tilde{z}) = 1 \quad \Rightarrow \quad [f^{-1}](f(\tilde{z}))' = \frac{1}{f'(\tilde{z})} \quad \forall \tilde{z} \in U_\delta(z)$$

$$[f'](\tilde{z})(f^{-1}(w)) [f^{-1}]'(w) = 1 \quad \Rightarrow \quad [f^{-1}]'(w) = \frac{1}{f'(\tilde{z})} \quad \forall w \in f(U_\delta(z))$$



Základní komplexní funkce ($\exp$, $\sin$, $\cos$, $\sinh$, $\cosh$, Log , obecná mocnina)

Připomeňme si kapitola 6.4 (mocninné řady) a Aavedení $\exp$, $\sin$, $\cos$. Víme (viz věta 6.21 (strany 6/36 - 6/39) a její důkaz)

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\exp z, \sin z, \cos z : \underset{z}{\mathbb{C}} \rightarrow \underset{\text{do}}{\mathbb{C}}$$

$$(\exp z)' = \exp z$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

$$(\cos z)' = -\sin z$$

$$\exp 0 = 1 \quad e := \exp 1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

Také platí Eulerova identita

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad z \in \mathbb{C}$$

a odvod

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Ne také definovat

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

a platí 2. Eulerova identita

$$e^{iz} = \cosh(iz) + i \sinh(iz)$$

$$\cosh(iz) = \cos z$$

$$\sinh(iz) = i \sin z$$

Plati součtové vzorce

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Odsud

$$e^z \cdot \bar{e}^z = e^{z+(-z)} = e^0 = 1 \Rightarrow \bar{e}^z = \frac{1}{e^z} \quad \left(\exp(-z) = \frac{1}{\exp z} \right)$$

$$!(e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C})!$$

Tale:

$$\triangleright \cos z = \frac{e^{iz} + \bar{e}^{-iz}}{2} = \frac{p + \frac{1}{p}}{2} \Big|_{p=e^{iz}} = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) \Big|_{p=e^{iz}}$$

hledáme-li původ v $\mathbb{C}$ rovnice $\cos z = a$ pak řešíme
kvadratickou rovnici $\frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) = a$ $p = e^{iz}$

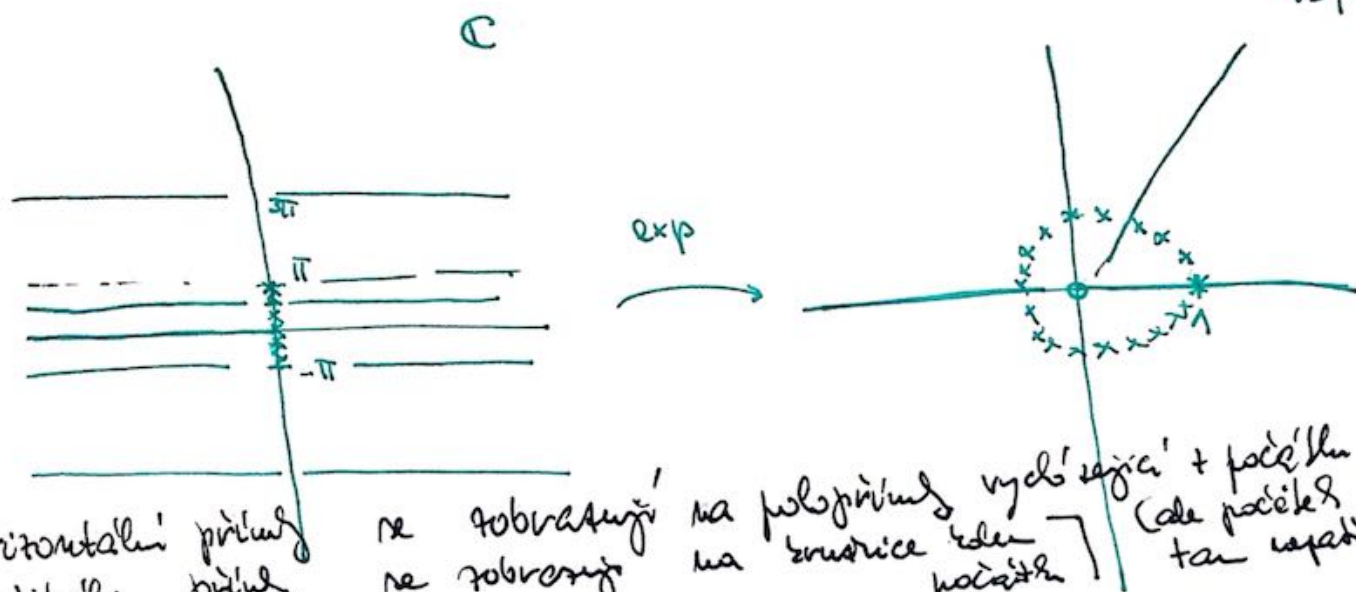
$$\triangleright \operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{q-1}{q+1} \Big|_{q=e^{iz}}$$

$$\triangleright \text{Tale } \underbrace{e^{x+iy}}_{\exp z} = e^x e^{iy} = \underline{e^x (\cos y + i \sin y)} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Toto tvrzení vyúsíme z blízkého problému pro $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

$$\bullet \quad \underline{\exp(z + 2\pi i) = \exp z \exp(2\pi i) = \exp z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = \exp z}$$

$\exp$ je $2\pi i$ periodická



- horizontální příčky se zobrazují na polopřímky vycházející z počátku (ale počátek tam není)
- vertikální příčky se zobrazují na kružnice kolem počátku

$$\exp z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\exp |_{(-\pi, \pi)} \xrightarrow{\text{probi}} \mathbb{C} \setminus \{-\infty, 0\}$$

$$\exp |_{(-\pi, \pi)} \xrightarrow[\text{ne}]{\text{probi}} \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Ačkoliv $\exp z = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ splňuje CR podmínky a $\det Df(y) \neq 0$, $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ není globálně invertovatelná.

Definice

Hlavní hodnota ^(komplexního) logaritmu

$$\text{Log} := (\exp |_{(-\pi, \pi)})^{-1}$$

Q: co to $\mathbb{C}$?

Přesně na $\{e^z = w \in \mathbb{C}\}$ ^{Popis všech řešení charakterizují komplexní logaritmus} $e^z = w$

• $w = 0 \Rightarrow$ žádné řešení

• $w \neq 0 \Rightarrow w = |w|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \Rightarrow |w| = e^x$ a $\alpha = y - 2k\pi$

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\begin{cases} x = \ln |w| \\ y = \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Log } z &= \ln |z| + i\alpha \\ z &= |z|e^{i\alpha} \end{aligned} \quad \alpha \in (-\pi, \pi)$$

- v $z = 0$ $\text{Log } z$ není definován
- pro $\{z: x < 0\}$ (záporná reálná osa)

$\text{Log } z$ není spojitá (nespojitelá le puzmout)

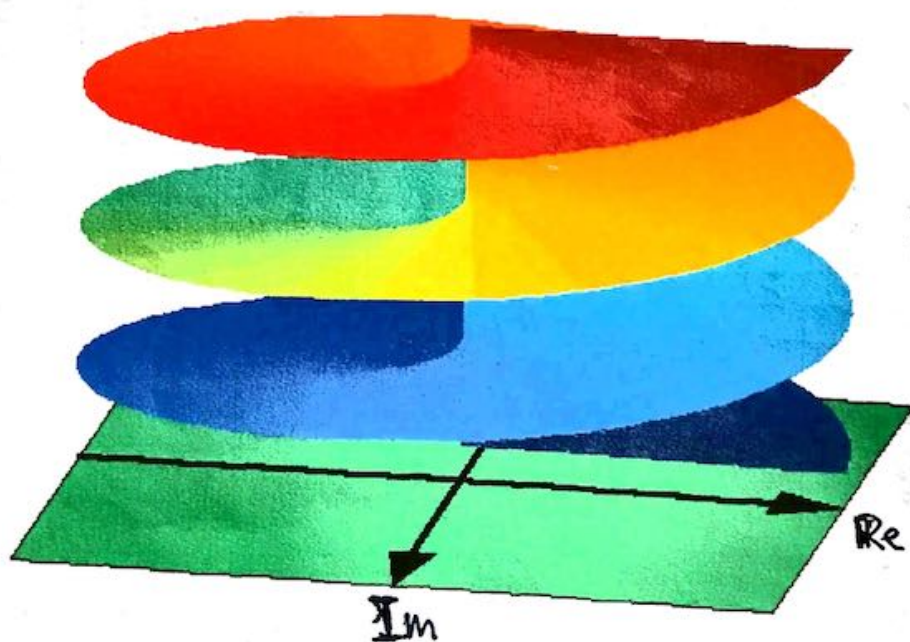
Protože $\text{Log} z = (\exp|_{(-\pi, \pi]})^{-1}$, dle Věty 15.4 máme

$$\underline{(\text{Log } w)'} = \frac{1}{\exp' z|_{z=\text{Log } w}} = \frac{1}{\exp z|_{z=\text{Log } w}} = \underline{\underline{\frac{1}{w}}}$$

► $\text{Log } w$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

Platí Tvrzení: $\left. \begin{array}{l} \text{buď} \\ f \in H(\Omega) \text{ a } g \in H(\sigma), \text{ kde } \Omega, \sigma \subset \mathbb{C} \text{ otevřené,} \\ \text{nechť } f = g \text{ na } \sigma \cap \Omega \end{array} \right\}$

Pak $R(z) := \begin{cases} f(z) & z \in \Omega \\ g(z) & z \in \sigma \end{cases}$ je holomorfní na $\Omega \cup \sigma$.



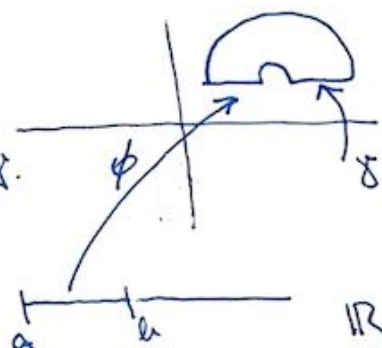
15.3. Komplexní křivkový integrál a integrace $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

► Komplexní křivkový integrál

- Připomněme, že pro $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ je $\int_a^b f dx := \int_a^b \operatorname{Re} f dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f dx$
- Také si připomeňme, že jsme psávali $\vec{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ $\vec{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x))$.
 Ačkoliv můžeme $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ztuhlčít s $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 tak je třeba mít na mysli, že $z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ jsou prvky tělesa $\mathbb{C}$
 a že s nimi pracovat jinak, než jak jsme zvyklí pro vektorové
 funkce. Také pro $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nepišeme/neshizastujeme (např. tučně),
 ně by mělo jít o vektor.

- Nechť $\phi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ je parametrizace orientovaní regulární
 křivky γ .

Nechť $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá
 definovaná na množině obklopující γ .



$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b \underbrace{f(\phi(t))}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{\phi'(t) dt}_{\in \mathbb{C}}$$

VAROVÁNÍ: Ačkoliv vztoreček připomíná křivkový integrál
 druhého druhu, jedná se o jiný a
tajemnější objekt, neboť zahrnuje tajemné
 komplexní násobení. Fyzikální interpretace je
 komplikovanější.

Věta 15.4 (o soukroku $\int_{\gamma} f(z) dz$ a křivkový integrál 2. druhu).

Pond $f(z) = f_1(z) + i f_2(z)$. Pak

$$I := \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (f_1 - f_2) \cdot \vec{ds} + i \int_{\gamma} (f_2 + f_1) \cdot \vec{ds}$$

↑
 křivkový integrál
 2. druhu

(Dě) Přijmijme výpočet:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_a^b (f_1(\phi(t)) + i f_2(\phi(t))) (\phi_1'(t) + i \phi_2'(t)) dt \\
 &= \int_a^b (f_1(\phi(t)) \phi_1'(t) - f_2(\phi(t)) \phi_2'(t)) dt + i \int_a^b (f_1(\phi(t)) \phi_2'(t) + f_2(\phi(t)) \phi_1'(t)) dt \\
 &= \int_a^b (f_1(\phi(t)), -f_2(\phi(t))) \cdot (\phi_1'(t), \phi_2'(t)) dt + i \int_a^b (f_2(\phi(t)), f_1(\phi(t))) \cdot (\phi_1'(t), \phi_2'(t)) dt \\
 &= \int_{\gamma} (f_1, -f_2) \cdot \vec{ds} + i \int_{\gamma} (f_2, f_1) \cdot \vec{ds} \quad \square
 \end{aligned}$$

Odsud, a z nezávislosti zvláštních integrálů 2. druhu, na volbě souhlasné orientované regulární parametrizace plyne, že takový komplexní křivkový integrál nestává na volbě souhlasné orientované regulární parametrizace.

Tvrzení (odhad komplexního zvláštního integrálu)

- Buď γ je částíčka $\mathbb{C}$ -křivky v $\mathbb{C}$ délky l . ($l := \int_{\gamma} ds$)
- Buď $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ splňuje $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \gamma \subset \mathbb{C}$ ($M > 0$)
(tj. f je omezené na křivce γ)

Pak $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4Ml$

(Dě) $\left| \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt \right| = \left| \int_a^b f_1 \phi_1' - f_2 \phi_2' + i(f_2 \phi_1' + f_1 \phi_2') \right| \leq$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left| \int_a^b f_1 \phi_1' \right| + \left| \int_a^b f_2 \phi_2' \right| + \left| \int_a^b f_2 \phi_1' \right| + \left| \int_a^b f_1 \phi_2' \right| \\
 &\leq \int_a^b (|f_1| |\phi_1'| + |f_2| |\phi_2'| + |f_2| |\phi_1'| + |f_1| |\phi_2'|) dt \\
 &\leq 4 \int_a^b M \sqrt{(\phi_1')^2 + (\phi_2')^2} dt = 4M \int_a^b ds = 4Ml
 \end{aligned}$$

v důkazu jsme využili odhad: $\left[\text{jí-li } g: (a,b) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ pak } \left| \int_a^b g dt \right| \leq \int_a^b |g| dt \right]$ $\square$

(Dě) (•) Důvod: $c := \int_a^b g(t) dt, c \in \mathbb{C}$.

Pak $0 \leq |c|^2 = \bar{c}c = \bar{c} \int_a^b g(t) dt = \int_a^b \bar{c} g(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(\bar{c} g(t)) dt$

$$\leq \int_a^b |\bar{c} g(t)| dt = |c| \int_a^b |g(t)| dt$$

neboť $\operatorname{Re} x \leq |x|$ $\square$

Věta 15.5 (Cauchy - Goursatova věta)

Bud' $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená a omezená s hranicí $\partial\Omega$, která lze popsat jako součet konečného počtu regulárních křivek orientovaných zleva naขวา*).

Nechť $f \in H(\Omega)$

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dA = 0$$

(Dě)

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dA \stackrel{\text{Věta 15.4}}{=} \int_{\partial\Omega} (f_1 - if_2) \cdot \vec{ds} + i \int_{\partial\Omega} (f_2 + if_1) \cdot \vec{ds}$$

$$\stackrel{\text{Greenova věta}}{=} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) dx dy + i \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) dx dy$$

$$\stackrel{\text{(CR)}}{=} 0$$



Věta 15.6 Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená a omezená a $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá.

Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) f má v Ω primitivní funkci, tzn. $\exists F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tak, že $F'(z) = f(z) \forall z \in \Omega$.

(ii) Pro každou uvazovanou regulární křivku platí

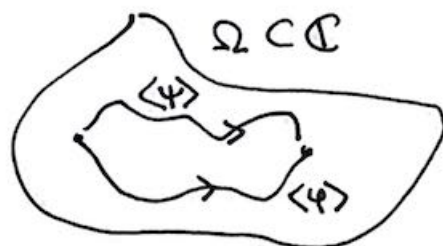
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Lepe: $\mu = 0$ každá součet regulárních křivek

(iii) Křivkový integrál nezávisí na volbě křivky v Ω , tj.

je-li $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ a $\psi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ a $\varphi(a) = \psi(a)$ a $\varphi(b) = \psi(b)$

$$\text{Pak } \int_{\langle \varphi \rangle} f(z) dz = \int_{\langle \psi \rangle} f(z) dz.$$



*) tak, aby platila Greenova věta (dostaneme si ji jen pro obdélník)

Dě (i) $\Rightarrow$ (ii) Připomínka důležitá věty o potenciálu

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_a^b F'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

parametrizace $\varphi: \varphi(a) = \varphi(b)$
úsečka

řetězení
monoidů $\Rightarrow \int_a^b \frac{d}{dt} [F(\varphi(t))] dt$

Newtonův
=
voreček

$$F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = 0$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Označme $\gamma := \langle \varphi \rangle - \langle \varphi \rangle$, pak γ je uzavřená křivka

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\langle \varphi \rangle - \langle \varphi \rangle} f(z) dz = \int_{\langle \varphi \rangle} f(z) dz - \int_{\langle \varphi \rangle} f(z) dz, \text{ což dává tvrzení.}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $z_0 \in \Omega$ libovolně a definujeme

$$F(z) := \int_{\gamma_{z_0 z}} f(z) dz$$

kde $\gamma_{z_0 z}$ je libovolná regulární
křivka spojující z_0 a z

Pro h malé, a pro $z+h$ uvažujeme
zvláštní tvarovou součtu $\gamma_{z_0 z}$ a úsečky
spojující A a $A+h$. Pak

Dle (iii) je tato definice
singulární (nezávislá na volbě)
křivky

(*)
$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z_0 z+h}} f(z) dz$$

označme ji $[z, z+h]$

$\varphi: \begin{matrix} t \mapsto z+th \\ \text{[0,1]} \end{matrix} \begin{matrix} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{matrix}$

je parametrizace
úsečky
 $\varphi'(t) = h$

$$= \int_0^1 f(z+th) dt$$

avšak:

$$\left| \int_0^1 f(z+th) dt - f(z) \right| = \left| \int_0^1 [f(z+th) - f(z)] dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{|f(z+th) - f(z)|}_{\rightarrow 0 \text{ pro } h \rightarrow 0} dt \rightarrow 0 \text{ pro } h \rightarrow 0.$$

2 (*)
$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(z) \text{ nebo: } F'(z) = f(z).$$



Shrnutí Za předpokladů vět 15.5 a 15.6 platí:

Je-li $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, omezená, souvislá

pak existují $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tak, že $F(z) = f(z)$
a navíc lze psát

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta := \int_{[\gamma_0, z]} f(\zeta) d\zeta$$

neboť definice
nezávisí na volbě
křivky, která jde
z z_0 do z , kde
 $z_0 \in \Omega$ je pevné



Tomuto pozorování se říká základní věta integrálního počtu pro
komplexní funkce komplexní proměnné.

[Srovnej s hlavní větou integrálního & diferenciálního počtu reálné proměnné.]

Příklady

① Uvažuj $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{Z}$ a křivku $\varphi(t) = re^{it}$ $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
[Spočítejme: $\int_{\langle \varphi \rangle} f(z) dz$]

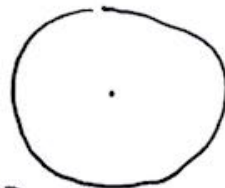
uvážena
regulární

Přičemž:

$$\int_{\langle \varphi \rangle} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(re^{it}) i r e^{it} dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} r^{k+1} e^{i(k+1)t} dt = i r^{k+1} \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{i(k+1)t}}_{\cos((k+1)t) + i \sin((k+1)t)} dt$$

$$= \begin{cases} 0 & k \neq -1 \\ 2\pi i & k = 0 \end{cases}$$



Tedy speciálně pozorujeme, že

$f(z) = \frac{1}{z}$ nemá primitivní funkci v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

když primitivní funkce existovala pak

$$0 = F(r) - F(r) = F(\varphi(2\pi)) - F(\varphi(0)) = \int_{\langle \varphi \rangle} \frac{dz}{z} = 2\pi i, \text{ kon}$$

(2) Spočítejte $I_1 = \int_0^\infty \cos x^2 dx$, $I_2 = \int_0^\infty \sin x^2 dx$ Fresnelovy integrály

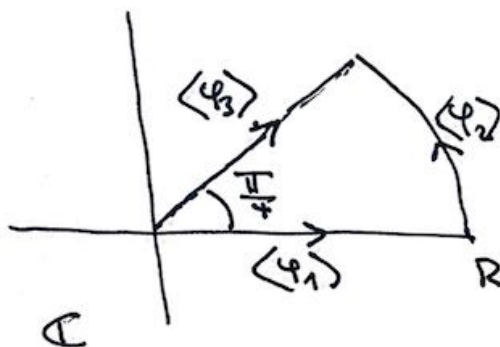
Růšen! Uvažme $f(z) = e^{iz^2}$, $z \in \mathbb{C}$. Pak $f \in H(\mathbb{C})$.

Uvažme zvlášť $\gamma = \langle \varphi_1 \rangle + \langle \varphi_2 \rangle - \langle \varphi_3 \rangle$, kde (viz obrázek)

$$\varphi_1(t) = t \quad t \in (0, R)$$

$$\varphi_2(t) = Re^{it} \quad t \in (0, \frac{\pi}{4})$$

$$\varphi_3(t) = te^{i\frac{\pi}{4}} \quad t \in (0, R)$$



De Cauchy-Goursatovy věty 15.5

(*)

$$0 = \int_{\langle \varphi_1 \rangle + \langle \varphi_2 \rangle - \langle \varphi_3 \rangle} e^{iz^2} dz$$

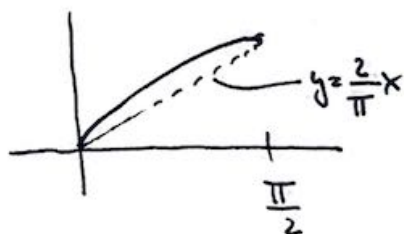
Dále $\int_{\langle \varphi_1 \rangle} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{it^2} dt = \int_0^R \cos t^2 dt + i \int_0^R \sin t^2 dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} I_1 + i I_2$
(před zbytk' částí mají limitu.)

$\int_{-\langle \varphi_3 \rangle} e^{iz^2} dz = - \int_0^R e^{it^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} e^{i\frac{\pi}{4}} dt = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-t^2} dt$

$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \int_0^\infty e^{-t^2} dt = - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\int_{\langle \varphi_2 \rangle} e^{iz^2} dz = iR \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2it}} e^{it} dt$ Protože $e^{iR^2 e^{2it}} = e^{iR^2 \cos 2t} e^{-R^2 \sin 2t}$

teh $\left| \int_{\langle \varphi_2 \rangle} e^{iz^2} dz \right| \leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin 2t} dt = \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin x} dx$
 $x=2t, dx=2dt$



$y = ax + b$

$\leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \frac{2x}{\pi}} dx = -\frac{\pi R}{2R^2} \left[e^{-\frac{R^2 x}{\pi}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{4R} [1 - e^{-R^2}] \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

Tedy celkově z (*):

$$\boxed{I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad a \quad I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$$

Tvrzení (derivace integrálu podle komplexních parametrů)
aneb záměna komplexního integrálu a komplexní derivace

[Bud' $\Omega, G \subset \mathbb{C}$ otevřená

- $\gamma \subset \Omega$ regulární křivka
- $f: \underbrace{\Omega}_{\mathbb{Z}} \times \underbrace{G}_{\mathbb{W}} \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá na $\gamma \times G$
- $\frac{\partial f}{\partial w}: \Omega \times G \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá na $\gamma \times G$

[Pak

- $g(w) := \int_{\gamma} f(z, w) dA \in H(G)$
- $g'(w) = \frac{d}{dw} \int_{\gamma} f(z, w) dA$
 $= \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial w}(z, w) dA$

(Dě) Počítáme $g(w)$ + definice:

$$\frac{g(w+h) - g(w)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\gamma} [f(z, w+h) - f(z, w)] dz$$

Newtonův vzoreček

$$\stackrel{\text{Newtonův vzoreček}}{=} \frac{1}{h} \int_{\gamma} \int_0^1 \frac{d}{dt} f(z, w+th) dt dz$$

$$= \frac{1}{h} \int_{\gamma} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial w}(z, w+th) h dt dz$$

$$= \int_{\gamma} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial w}(z, w) dt dz + \int_{\gamma} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial w}(z, w+th) - \frac{\partial f}{\partial w}(z, w) dt dz$$

$$= \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial w}(z, w) dA + I_{\text{rest}}$$

↓ délka křivky γ

Potom

$$|I_{\text{rest}}| \leq \sup_{z \in \gamma} \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial w}(z, w+th) - \frac{\partial f}{\partial w}(z, w) \right| dt \cdot l_{\gamma}$$

$\rightarrow 0$

spojitost na kompaktní $\gamma \times B_{\delta}(w)$



Pomocí Cauchy - Goursataovy věty a výše uvedeného tvrzení
dodáme následující významný výsledek, tzv.

Cauchyův vzorec pro kruh

Věta 15.7.

Cauchyův integrální vzorec pro kruh
a jeho 1. vyjádření ~~existence~~Budi $f \in H(B_R(a))$. Budi $\rho \in (0, R)$. Pak pro každé $w \in B_\rho(a)$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

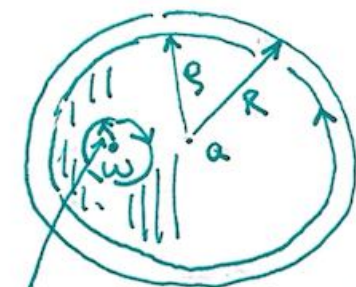
Hodnota uvnitř se
dá spočítat z
hodnot f na hranici

Natic

$$f^{(k)}(w) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}} dz \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

tzn. $f^{(k)} \in H(B_\rho(a)) \quad (\forall \rho \in (0, R)) \Rightarrow f^{(k)} \in H(B_R(a))$ neboli existence derivací $f'(z) \quad \forall z \in B_R(a)$
implikuje automaticky existenci $f^{(k)}(z) \quad \forall z \in B_R(a) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

(Dě) • začneme obrázkem.

 $\epsilon > 0$ • Dále víme, že $f \in H(B_R(a))$, $\frac{1}{z-w} \in H(\mathbb{C} \setminus \{w\})$
a tedy máme

$$\frac{f(z)}{z-w} \in H(B_\rho(a) \setminus B_\epsilon(w))$$

$$\int_{\partial \sigma} \frac{f(z)}{z-w} dz = 0$$

• Dle Cauchy-Goursatovy věty 15.5

$$\text{Ale: } \int_{\partial \sigma} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz - \int_{\partial B_\epsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

• Stačí tedy dokázat, že

$$\int_{\partial B_\epsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0+} 2\pi i f(w) \quad (*)$$

— Nejprve potvrdíme, že

$$\int_{\partial B_\epsilon(w)} \frac{f(w)}{z-w} dz = f(w) \int_{\partial B_\epsilon(w)} \frac{dz}{z-w} = f(w) \int_{z=w+\epsilon e^{it}}^{z=w+\epsilon e^{i(t+2\pi)}} \frac{i \epsilon e^{it}}{\epsilon e^{it}} dt = 2\pi i f(w).$$

— Nakonec

$$\int_{\partial B_\epsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{\partial B_\epsilon(w)} \frac{f(w)}{z-w} dz + \int_{\partial B_\epsilon(w)} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dz \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi i f(w)$$

$$\text{neboli } \int_{\partial B_\epsilon(w)} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dz = \int_{z=w+\epsilon e^{it}}^{z=w+\epsilon e^{i(t+2\pi)}} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dz = i \int_0^{2\pi} [f(w + \epsilon e^{it}) - f(w)] dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

díky spojitosti
 f v $B_R(a)$.

K ďalšiemu druhu čísl (vyšší $\mathbb{C}$ -diferencovateľnosti)
využívame Cauchyho vzorec (plochy po $\gamma=0$), matematickou
indukciou a Tvrdzením o derivácii komplexného kvadrantného
integrálu pre komplexné parametre.

Tvrdzenie aplikujeme na sídlenci:

$$\begin{aligned} & \gamma = \partial B_\rho(a), \quad f(z, w) := \frac{f(z)}{z-w} \quad \text{keď je spojitá na } \overline{\gamma \times B_\rho(a)} \\ & \frac{\partial f(z, w)}{\partial w} = \frac{f(z)}{(z-w)^2}, \quad \text{keď je táto spojitá v } \begin{cases} \gamma \times B_\rho(a) \\ \gamma \times B_\rho(a) \\ (\bar{\rho} < \rho) \end{cases} \quad \text{či} \end{aligned}$$

$$\text{Tedy } f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz. \quad \text{atd.}$$

Q.E.D. 

DALŠÍ FUNDAMENTÁLNÍ DŮSLEDKY CAUCHY-GOURSATOVY VĚTY
a CAUCHYHO INTEGRÁLNÍ FORMULE PROJEKCE POTŘEBY.

Seri: Ažončime skrutku, kde uaveme

Komplexní funkce a rovinná vektorová pole

Pro $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jme zavedli $\int_\gamma f(z) dz$, pro který platí (viz Věta 15.4)

$$(*) \quad \int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma (f_1 - f_2) \cdot d\vec{s} + i \int_\gamma (f_2 + f_1) \cdot d\vec{s}$$

Tedy

$$\boxed{f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}} \quad \text{ne přiřadí dvě rovinná pole} \quad \boxed{\vec{A} = (f_1, -f_2)} \quad \boxed{\vec{B} = (f_2, f_1)}$$

Protože $(f_1 - if_2)i = f_2 + if_1$ tak $\vec{B}$ je pole získané
otočením $\vec{A}$ o 90° .

Dále $d\vec{s} = \vec{\varphi}'(t) dt = \vec{t} dt$ a tedy vektor $\vec{t}$ je otočením normálového
vektoru $\vec{n}$ o 90° .

$$\text{Tedy } \underbrace{\vec{B} \cdot \vec{t}}_{\vec{B} \cdot d\vec{s}} ds = \vec{A} \cdot \vec{n} \quad \text{a tak } (*):$$

$$(**) \quad \int_\gamma f(z) dz = \underbrace{\int_\gamma \vec{A} \cdot \vec{t} ds}_{\text{cirkulace } \vec{A} \text{ podél } \gamma} + i \underbrace{\int_\gamma \vec{A} \cdot \vec{n} ds}_{\text{tot } \vec{A} \text{ přes křivku } \gamma} = - \int_\gamma \vec{B} \cdot \vec{n} ds + i \int_\gamma \vec{B} \cdot \vec{t} ds$$

VÝRAZ

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

A pole $\vec{A}, \vec{B}$ mají formální

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{A} & \operatorname{curl} \vec{B} \\ \operatorname{div} \vec{B} & \operatorname{curl} \vec{A} \end{cases}$$

15.4. Mocninné (Taylor, McLaurinov) řady, Laurentovy řady (a Fourierovy) řady a klasifikace singularit.

Věta 15.8 Buď $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, $a \in \Omega$, $B_R(a) \subset \Omega$ a $f \in H(\Omega)$.

Pak existují jedinečně určené $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ tak, že

$$(*) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{pro } z \in B_R(a)$$

$$(**) \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \rho \in (0, R)$$

Terminologie Řada (*) je mocninná řada,

pokud však $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, což je důsledkem (**), a

Cauchyho integrálního vztahu (a tedy dle Věty 15.8), je řada (*) Taylorova řada (když $a=0$ nazýváme McLaurinova řada).

(Dt) ► Jednoznačnost koeficientů c_n jsme si dokázali již v lemmě o mocninných řadách, viz Věta 6.19: Kdyby byly dvě řady $\sum c_n (z-a)^n$ a $\sum \tilde{c}_n (z-a)^n$ tak po dosazení $z=a$ máme $c_0 = \tilde{c}_0$. Dále uvažujeme, atd. ...

► Existenci Aichse pomocí vzorečku pro součet geometrické řady a Cauchyho integrálního vztahu. Buď $\rho \in (0, R)$, $w \in B_\rho(a)$.

Pak pro $z \in \partial B_\rho(a)$: $\left| \frac{w-a}{z-a} \right| < 1$ a tedy:

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-a - (w-a)} = \frac{1}{1 - \frac{w-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a} \right)^n$$

Dle Věty 5.7 (Cauchyho vztah)

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(z)}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^n} dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz (w-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (w-a)^n$$

zároveň
s a $\sum$

dle Weierstrassovy lemmy
a stejnoměrní konvergence

2. tvrzení
věty 15.4.



Definice Laurentova řada v $a \in \mathbb{C}$ je řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$, kde $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Tato řada konverguje právě když

- $s^+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konverguje
- a zároveň $s^-(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}$ konverguje

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ se nazývá regulární část Laurentovy řady (neboť je-li $f \in H(B_R(a))$ tak ji je Laurentova řada ji právě tato řada dle věty 15.8)

Řada $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ se nazývá hlavní část Laurentovy řady (uvědomte charakter funkce v okolí bodu a , kterou tato řada popisuje)

Přeložíme $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \xi^n$

(1) $\xi := \frac{1}{z-a}$
(2) $n := q$

takže A které mocniny řad najdeme:

- ξ regulární část: $R \in (0, +\infty)$ tak, že $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n < \infty$ v $B_R(a)$
- ξ hlavní část: $\varrho \in (0, +\infty)$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \xi^n < \infty$ v $B_{\varrho^{-1}}(0)$

tedy pokud $\frac{1}{|z-a|} < \varrho^{-1} \Leftrightarrow |z-a| > \varrho$

tedy $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ konverguje v $\overline{B_{\varrho}(a)}$

Tak jsme dostali následující tvrzení:

Věta 15.9 Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ existují $\varrho, R \in (0, +\infty)$

- tak, že
- regulární část $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v $B_R(a)$
 - hlavní část $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{\varrho}(a)}$

Je-li $\varrho < R$, pak Laurentova řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v $U_{\varrho, R}(a) := \{z \in \mathbb{C} : \varrho < |z-a| < R\}$ a její součet $s(z) := s^+(z) + s^-(z)$ je holomorfní v $U_{\varrho, R}(a)$

Věta 15.10 Pokud $0 \leq \rho < R \leq +\infty$ a $f \in H(U_{\rho,R}(a))$.
 Pak existují jedinečné koeficienty $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ tak, že

$$(*) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{v } U_{\rho,R}(a)$$

přičemž

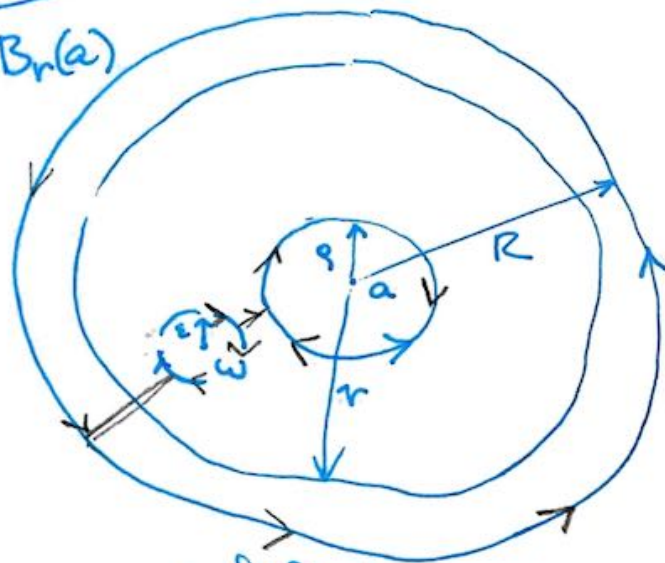
$$(**) \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \text{ kde } r \in (\rho, R)$$

Důk. Pro $w \in U_{\rho,r}(a)$ a $z \in \partial B_r(a)$

uvažme: $\bullet f \in H(U_{\rho,R}(a))$

$\bullet \frac{f(z)}{z-w} \in H(U_{\rho,R}(a) \setminus B_\varepsilon(w))$

Tedy dle Cauchyovy pro
 $\rho < \rho' < r < R' < R$



$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial U_{\rho',R'}(a) \setminus \partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \\ &= \underbrace{\int_{\partial B_{R'}(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz}_I - \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz}_J = \int_{\partial B_{R'}(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz - \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} dz \end{aligned}$$

a podobně jako ve větě 15.8:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\partial B_{R'}(a)} \frac{f(z)}{z-a-(w-a)} dz = \int_{\partial B_{R'}(a)} \frac{1}{z-a} \frac{f(z)}{1 - \frac{w-a}{z-a}} dz = \int_{\partial B_{R'}(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_{R'}(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz (w-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_{R'}(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz (w-a)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-a-(w-a)} dz = - \int_{\partial B_{\rho'}(a)} \frac{1}{w-a} \frac{f(z)}{1 - \frac{z-a}{w-a}} dz = - \int_{\partial B_{\rho'}(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} dz \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_{\rho'}(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz (w-a)^{-(n+1)} \quad \text{opt. Cauchy} \\ &= - \sum_{k=-1}^{-\infty} \int_{\partial B_{\rho'}(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz (w-a)^k = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_{\partial B_{\rho'}(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz (w-a)^n \end{aligned}$$

což dává výsledek.



Vztah mezi Laurentovy a Fourierovy řady

► Bud' $f \in H(U_{1-\varepsilon, 1+\varepsilon}(0))$ pro $\varepsilon \in (0, 1)$.

Pol $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ přičemž $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$

Věta 15.10

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt$$

$z = e^{it}$
 $dz = ie^{it} dt$

což vial celou řadu Fourier

řadu po f ci $\varphi(t) = f(e^{it})$:

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt \right) e^{int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(f e^{it}, \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$$

► Naopak, každá Four. řada v proměnné x : $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

lze přepsat do tvaru $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$

což je Laurentova řada v bodě $a=0$.

Cvičení Napište Fourierovu řadu f ce $\varphi(t) = \frac{a \sin t}{1 - 2a \cos t + a^2}$ $|a| < 1$

Návod: a) ověřte, že $\varphi(t) = f(e^{it})$ kde

$$f(z) = \frac{1-z^2}{2i[z^2 - (a + \frac{1}{a})z + 1]}$$

pro $z \in U_{1-\varepsilon, 1+\varepsilon}(0)$

b) spočítejte Laurentovu řadu $f(z)$.

Definice (řetěných typů singularit) Řekneme, že f má v $a \in \mathbb{C}$

- isolovanou singularitu $\stackrel{\text{df}}{=} \exists R > 0$ tak, že $f \in H(U_{0,R}(a)) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (z-a)^n$
 $z \in U_{0,R}(a)$
- odstranitelnou singularitu $\stackrel{\text{df}}{=} \bullet f$ má v a isolovanou sing.
• $c_{-n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (jinými slovy regulární část)
- pól $\stackrel{\text{df}}{=} \bullet f$ má v a isolovanou singularitu
• $(\exists m < 0) (c_m \neq 0) \wedge (\forall n < m) c_n = 0$.
- podstatnou singularitu $\stackrel{\text{df}}{=} \bullet f$ má v a isolovanou singularitu
• $(\forall n < 0) (\exists m < n) (c_m \neq 0)$

V následující části výkladu si uvidíme, že

V15.10 f má v a odstranitelnou singularitu $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ existuje $\in \mathbb{C}$

V15.11 + **V15.12** f má v a pól $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

V15.12 f má v a podstatnou singularitu $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ neexistuje

Věta 15.10 (Riemannova věta) Předpokládejme, že f má v a izolovanou singularitu. Následující výroky jsou ekvivalentní

(1) f má v a odstranitelnou singularitu

(2) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$ existuje

(3) f je omezená na jistém okolí $U_{0,R}(a)$

Dě Protože f má v a izolovanou singularitu, tak $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ (*)

(1) $\Rightarrow$ (2) Protože f má v a odstranitelnou singularitu, tak $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ a tak $\lim_{z \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 \in \mathbb{C}$, což je (2)

(2) $\Rightarrow$ (3) Vím A 1. semestru

(3) $\Rightarrow$ (1) Protože f je v okolí a ve tvaru (*), uvidíme, že $c_{-m} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Vskutku:

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}) \rho^m e^{int} dt$$

$z = a + \rho e^{it}$
 $t \in (0, 2\pi)$

a tedy

$$|c_{-m}| \leq \frac{M}{2\pi} \rho^m \rightarrow 0 \text{ pro } \rho \rightarrow 0^+.$$

Póly vs kořeny

Def $a \in \mathbb{C}$ je kořen fce h násobnosti $k \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow h(a) = h'(a) = \dots = h^{(k-1)}(a) = 0$ a $h^{(k)}(a) \neq 0$.

Tvrzení Fce h má v a kořen násobnosti $k \Leftrightarrow \exists U(a) \exists \varphi \in H(U(a))$ a $\varphi(a) \neq 0$ a $h(z) = (z-a)^k \varphi(z)$

Dě $\Leftarrow$ Postupně derivování

$\Rightarrow$ Napiš si Taylorův rozvoj h v bodě a , a uviď předpoklad:

$$h(z) = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{f^{(l)}(a)}{l!} (z-a)^l = (z-a)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(l+k)}(a)}{(l+k)!} (z-a)^l$$

$\varphi(z) \text{ a } \varphi(a) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ $\square$

Tvrzení 2 Nechť

- f má v a řádu k
- g má v a řádu l
- h má v a řádu m

Potom

- $f+g$ má v a řádu $\min\{k, l\}$
(volba $g = -f$ dává nulovou funkci)

- $k \neq 0 \Rightarrow \alpha f g$ má v a řádu $k+l$

- $k > l \Rightarrow \frac{f}{g}$ má v a řádu $k-l$

- $h \circ f$ má v a řádu km

(Dě) pomocí předchozího a předchozích tvrzení. $\square$

Věta 15.11 Má-li f v a izolovanou singularitu, pak jistě existuje:

(a) f má v a pól řádu k

(b) $f(z) = \frac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-a)^k}$ kde $\tilde{\varphi} \in H(U(a))$ a $\tilde{\varphi}(a) \neq 0$

(c) $\frac{1}{f}$ má v a řádu k

(Dě) **(c)** $\Leftrightarrow$ **Tvrzení 1** $\frac{1}{f(z)} = \varphi(z)(z-a)^k$ a $\varphi(a) \neq 0$ a $\varphi \in H(U(a))$
 $\Rightarrow \varphi(z) \neq 0$ v $\tilde{U}(a)$

Označ: $\tilde{\varphi}(z) := \frac{1}{\varphi(z)}$
 $z \in \tilde{U}(a)$

$\Rightarrow f(z) = \frac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-a)^k}$ kde $\tilde{\varphi}(a) \neq 0$ a $\tilde{\varphi} \in H(\tilde{U}(a))$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{n-k}$
 $a_0 \neq 0$

$= \sum_{m=-k}^{\infty} a_{m+k} (z-a)^m$
 $m = n-k$
 $m: -k \text{ do } \infty$

Laurentova řada
charakterizace
pól řádu k .
 tj. **(a)**

$\square$

Věta 15.12 Má-li f v a izolovanou singularitu, pak jistě ekvivalentní:

- (1a) f má v a pól
- (1b) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

Také jistě ekvivalentní:

- (2a) f má v a podstatnou singularitu
- (2b) $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ neexistuje
- (2c) $(\forall \delta > 0) [f(U_{0,\delta}(a)) \text{ je hustá v } \mathbb{C}]$

(Dě) **(1a) $\Rightarrow$ (1b)** z (1a) dle V15.11 plyne $f(z) = \frac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-a)^k}$ kde $\tilde{\varphi}(a) \neq 0$
 (pro nějaké $k \geq 1$)

odtud: $\lim_{z \rightarrow a} \frac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-a)^k} = \infty$.

(1b) $\Rightarrow$ (1a) **(1b) $\Leftrightarrow$** $\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow h(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & z \neq a \\ 0 & z = a \end{cases}$ má v a kořen

Věta 15.11 $\Rightarrow \frac{1}{h(z)}$ má v a pól ale $\frac{1}{h(z)} = f(z)$.

(2a) $\Rightarrow$ (2c) což je ekvivalentní implikaci **(2c) $\Rightarrow$ (2a)**, kterou dostaneme

(2c) $\Leftrightarrow$ $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ a $U_r(\alpha) \subset \mathbb{C}$ tak, že $U_r(\alpha) \cap f(U_{0,\delta}(a)) = \emptyset \quad \forall \delta$
 $\Leftrightarrow \forall z \in U_{0,\delta}(a) \quad |f(z) - \alpha| > r$

Definujme $g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha}$. Pak $|g(z)| < \frac{1}{r}$ a dle Věty 15.10

je g dodefinovat limitou tak, že $g \in H(B_\delta(a))$. Můžeme nastat dvě možnosti:

- (i) **$g(a) \neq 0$** $\Rightarrow g(z) \neq 0$ v okolí $a \Rightarrow f(z) = \frac{1}{g(z)} + \alpha$
 $\Rightarrow f$ má v a odstranitelnou singularitu
- (ii) **$g(a) = 0$** $\Rightarrow g$ má v a kořen nějaké násobnosti
 $\Rightarrow \frac{1}{g}$ má v a pól $\rightarrow$
 $\Rightarrow f$ má v a pól $\rightarrow$

(2c) $\Rightarrow$ (2b) (2c) $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{C} \exists z_n \in U_{0,\delta}(a)$ tak, že $f(z_n) \rightarrow \alpha$
 $\Rightarrow f$ nemá v a limitu.

(2b) $\Rightarrow$ (2a) $\Leftrightarrow$ **(2a) $\Rightarrow$ (2b)** toto ale je již dokázáno. □

Přklady ① $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ má v 0 odstranitelnou singularitu 15/33

② $f(z) = \frac{1}{z}$ má v 0 pól řádu 1

③ Funkce $\exp(\frac{1}{z})$, $\sin \frac{1}{z}$, $\cos \frac{1}{z}$ mají v 0 podstatnou singularitu, což lze ukázat z rozvoje do Laurent. řad, ale také tak, že $\frac{1}{z} : U_{0,\rho}(0) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{U_{\frac{1}{\rho}}(0)}$

a "exp" zobrazuje libovolný pás šířky 2π na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
a tedy $\exp \frac{1}{z} : U_{0,\rho}(0) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{C} \setminus \{0\}$, což je silněji stříh
než (2c) a platí obecně:

Věta (Piccardova) | Bod a je podstatná singularita f ($\Leftrightarrow$)
 $f(U_{0,\rho}(a)) = \mathbb{C} \setminus \{\text{ideální bod}\}$
Bez důkazu.

15.5. Residnová věta

Motivační úvaha po definici residua Je-li a izolovaná singularita fce f , pak $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ v $U_{0,R}(a)$. Pro $r \in (0, R)$

pak platí: $\int_{\partial B_r(a)} f(z) dz = \int_{\partial B_r(a)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n dz$

$f \in H(U_{0,\rho}(a))$ a tedy stejnoměrně konverguje v okolí $\partial B_r(a)$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\partial B_r(a)} (z-a)^n dz \quad \begin{matrix} z = a + re^{it} \\ dz = ire^{it} dt \end{matrix}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^{2\pi} i r^{n+1} e^{(n+1)it} dt$$

$$= \underline{\underline{c_{-1} 2\pi i}}$$

Definice c_{-1} se nazývá residuum fce f v bodě a
a značí se $[res_a f]$

15.5. Residuová metoda

Motivační úvaha po definici residua Je-li a izolovaná singularita fce f , pak $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ v $U_{0,R}(a)$. Pro $r \in (0, R)$

pak platí: $\int_{\partial B_r(a)} f(z) dz = \int_{\partial B_r(a)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n dz$

$$\begin{aligned} f \in H(U_{0,\rho}(a)) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\partial B_r(a)} (z-a)^n dz & z = a + re^{it} \\ \text{a tedy stejnoměrně} & & dz = ire^{it} dt \\ \text{konvergentní v okolí } \partial B_r(a) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^{2\pi} i r^{n+1} e^{(n+1)it} dt \\ &= \underline{\underline{c_{-1} 2\pi i}} \end{aligned}$$

Definice c_{-1} se nazývá residuum fce f v bodě a
a značí se $\boxed{\text{res}_a f}$

Věta 15.14 (Residuová věta) Buď $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset \sigma \subset \mathbb{C}$ a Ω je otevřená, omezená oblast, $\partial\Omega$ je popsána jako konečný součet regulárních křivek orientovaných směrem (tak, aby platila pro Ω a $\partial\Omega$ Greenova věta). Nechť $A \subset \Omega$ konečná a $f \in H(\sigma - A)$. Pak

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{res}_a f$$

(Dě) je přímo důsledkem Cauchy - Goursatovy věty 15.5.
Vzrůstek: Ukažte existenci $\varepsilon > 0$ tak, aby pro každé $a \in A$ $U_\varepsilon(a)$ neobsahovala žádný další bod z A . Podle 15.5 funkce $f \in H(\sigma - \bigcup_{a \in A} U_\varepsilon(a))$ a

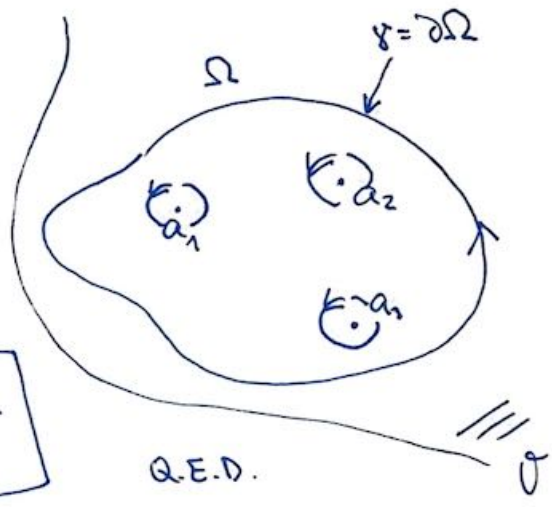
$$\text{tak } \int_{\partial\Omega - \sum_{a \in A} \partial U_\varepsilon(a)} f(z) dz = 0$$

Podíl

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = \sum_{a \in A} \int_{\partial U_\varepsilon(a)} f(z) dz$$

Motivace!
= úvaha

$$= \sum_{a \in A} 2\pi i \text{res}_a f = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{res}_a f.$$



Příklad 1 Ukažte $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)^2}$. Spočítejte $\int_{\partial\Omega} f(z) dz$ kde

- a) Ω obsahuje $z=1$
- b) Ω obsahuje $z=1, z=-1$

Rěšení Potvrzujeme, že f má v 0 řád 2, v 1 řád 1, v -1 řád 2.

Pro 1 pol mřobnosti 1 a -1 pol mřobnosti 2.

Ad a) $f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{z^2}{(z+1)^2}$ holomorfní fce v okolí -1. Hodnota $\frac{z^2}{(z+1)^2} \Big|_{z=1} = \text{res}_1 f$

Tedy $\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} = i\frac{\pi}{2}$

Ad b) $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \frac{z^2}{z-1}$ Taylor $\frac{1}{(z+1)^2} \left(\frac{z^2}{(z-1)} \Big|_{z=-1} + \left(\frac{z^2}{z-1} \right)' \Big|_{z=-1} (z+1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z+1)^n \right)$
 $\Rightarrow \frac{2z(z-1) - z^2}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) = 2\pi i$$



Potvrzování A předchozího výpočtu se děje zobrazení. Platí:

Tvrzení (jádr uvození hodnoty residu)

(1) Je-li $f \in H(U(a))$, pak $\text{res}_a f = 0$

(2) Jestliže $f, g \in H(U(a))$ a g má v a jednoduchou 1,
pak $\text{res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$

(3) Je-li $f \in H(U(a))$ a g má v a m -tý násobník 1 (tzn. v a izolované hng.),
pak $\text{res}_a f g = f(a) \text{res}_a g$

(4) Má-li f v a m -tý násobník 0, pak
 $\text{res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} \left[f(z) (z-a)^{m-1} \right] \frac{1}{(m-1)!}$

Vrátíme-li se k předchozímu příkladu (varianta a), pak $f(z) = h(z)g(z)$,
kde $h(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$ a $g(z) = \frac{1}{z-1}$ a dle (3) $\text{res}_a f = \text{res}_a h g = h(a) \text{res}_a g$
 $= \frac{1}{4} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$,

zatímco ve variantě b)
 $\text{res}_{-1} f = \lim_{z \rightarrow -1} \left[\frac{1}{(z+1)^2} \frac{z^2}{z-1} (z+1)^2 \right]' = \lim_{z \rightarrow -1} \left[\left(\frac{z^2}{z-1} \right)' \right] = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

Dle Tvrzení Ad (1) $f \in H(U(a)) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ v $U(a) \Rightarrow c_{-1} = 0$.

Ad (2) Protože g má v a jednoduchou 1, pak $g(z) = (z-a)\tilde{g}(z)$ a
 $\tilde{g}(a) \neq 0$ a $\tilde{g} \in H(U(a))$
odtud
 $g'(z) = \tilde{g}(z) + \tilde{g}'(z)(z-a)$
a $g'(a) = \tilde{g}(a)$

tedy $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)} \left(\frac{f(z)}{\tilde{g}(z)} \right) \in H(U(a))$
 $\Downarrow$
 $\text{res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{\tilde{g}(a)} = \frac{f(a)}{g'(a)}$

Ad (3) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ a $g(z) = \frac{\text{res}_a g}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$. Odtud

$\text{res}_a f(z)g(z) = a_0 \text{res}_a g = f(a) \text{res}_a g$.

Ad (4) $f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$
Pak $f(z)(z-a)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \dots + c_{-2}(z-a)^{m-2} + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \dots$

a tedy $c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \left[f(z)(z-a)^m \right]' \Big|_{z=a}$

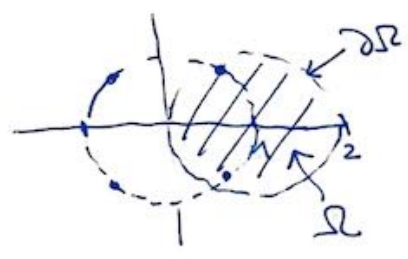


Prilady (2) Spocite $\int_{\partial\Omega} \frac{dz}{z^4+1}$

ide $\Omega := \{z \in \mathbb{C}, z = (x+iy): x^2+y^2 \leq 2x\}$

Ree $z^4+1=0$ ma 4 kořeny mřobnřd 1: $z_k = e^{i\frac{\pi}{4}(2k+1)} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $k=0,1,2,3$

$(x-1)^2+y^2 \leq 1$



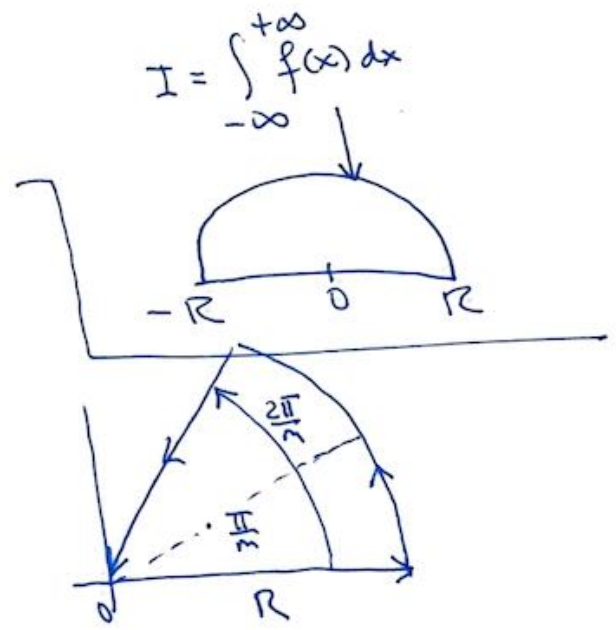
$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{dz}{z^4+1} &= 2\pi i (\text{res}_{z_0} f + \text{res}_{z_3} f) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{4z^3} \Big|_{z=z_0} + \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=z_3} \right) \\ &\stackrel{\text{Vřetel (2)}}{=} \pi i \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2} = i\pi \cosh\left(i\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= i\pi \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i \end{aligned}$$

(3) Integrãl fukce klesajřd
 $\sim \infty$ vyřetaji nař $\frac{1}{r}$

(a) $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ $a, b > 0$

(b) $f(z) = \frac{z^{m-1}}{z^m+1}$
 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{x^m+1} dx$

$m < m$

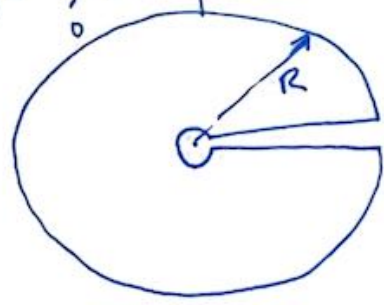


(4) Integrãl typ $f(z)e^{i\gamma z}$, $\gamma > 0$
 $f(z) \sim \frac{1}{z^s}$ ko $|z| \gg 1$ $s \in (0,1)$

(5) Integrãl $\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) dt = \int_{|z|=1} F(z) dz$

(6) Integrãl $I(a) = \int_0^\infty z^{a-1} f(z) dz$

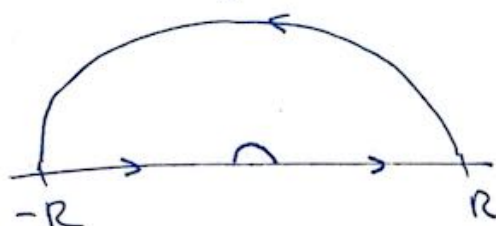
Mellinova transformace
 $a \in \mathbb{C}, \Re$



$$(7) \quad I = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\alpha} dx$$

$$(8) \quad \text{Integrály typu} \quad I = \int_0^{\infty} f(x) \ln x dx$$

kde: f je kds'
 • nemá pól v 0
 • $\max_{|R|} |f(Re^{it})| \rightarrow 0$



K výpočtům, které budou propracovány na cvičeních, budete využívat často "Lemma o obchodu pólu" a "Jordanovo lemma" (o vymizejícím vlivu integrálu přes vnější křivku).

Než si je provedeme, ztuháme jednu definici.

Definice Řekneme, že $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je meromorfní v $\Omega \subset \mathbb{C}$ omezené $\equiv$ $\exists A \subset \Omega$ izolované, tak, že

- f je holomorfní v $\Omega \setminus A$
- f má v bodech z A pól nebo odstranitelnou singularitu.

Lemma A JORDANOVO

- Buď $\gamma: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ parametrizované zobrazení
- Necht f je spojité v $\mathbb{C} \setminus B_K(0)$ po k dostatečně velké.

$$\begin{cases} \gamma: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C} \\ \gamma(t) = Re^{it}, t \in \langle a, b \rangle \\ 0 \leq a < b \leq 2\pi \end{cases}$$

Označme $M_R := \max_{z \in \gamma} |f(z)|$.

Podle platí:

(a) Je-li $RM_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$, pak $\int_{\gamma} f(z) dz \rightarrow 0$ po $R \rightarrow \infty$

(b) Je-li $RM_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$, $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle 0, \pi \rangle$, pak $\int_{\gamma} e^{i\beta z} f(z) dz \rightarrow 0$ po $R \rightarrow \infty$

(Dě) Ad (a) $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(Re^{it}) Rie^{it} dt$

Tedy $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)| \underbrace{2\pi R(b-a)}_{l(\gamma)} = 2\pi(b-a) RM_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ dle předpokladů.

Ad (b) $\int_{\gamma} e^{i\beta z} f(z) dz = \int_a^b \underbrace{e^{i\beta Re^{it}}}_{e^{i\beta R \cos t}} f(Re^{it}) Rie^{it} dt$

Tedy $\left| \int_{\gamma} e^{i\beta z} f(z) dz \right| \leq RM_R \int_a^b e^{-\beta R \sin t} dt \leq 2RM_R \int_0^{\pi/2} e^{-\beta R \sin t} dt \leq 2RM_R \int_0^{\pi/2} e^{-\beta \frac{2R}{\pi} t} dt$

$\frac{2\pi}{\beta} RM_R \left[e^{-\beta \frac{2R}{\pi} t} \right]_0^{\pi/2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

$\langle a, b \rangle \subset \langle 0, \pi \rangle$ kde $\sin t > 0$ (viz vlastnost Fresnelových integrálů)

Lemma B O obchatech xiduchasobného jolu

15/38

Má-li f v a pól násobnosti 1, a je-li γ část kružnice parametrizovaná $\varphi(t) = a + \varepsilon e^{it}$, $t \in (\alpha, \beta)$. Pak

$$\int_{\gamma} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} i(\beta - \alpha) \operatorname{res}_a f$$

(Dě) Funkce f má pól v $U_{0,\rho}(a)$ neťm: $f(z) = \frac{\operatorname{res}_a f}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$

Pak

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \operatorname{res}_a f \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{\gamma} (z-a)^n \\ &= \operatorname{res}_a f \varepsilon i \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{\alpha}^{\beta} i \varepsilon^{n+1} e^{i(n+1)t} dt \\ &= i(\beta - \alpha) \operatorname{res}_a f + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^{n+1} i \int_{\alpha}^{\beta} (\cos((n+1)t) + i \sin((n+1)t)) dt \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} i(\beta - \alpha) \operatorname{res}_a f. \end{aligned}$$

□

Tuto sebei Aoboněme zavedením singularit a residua v ∞ .

Připomei $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

SINGULARITY A RESIDUUM V ∞

Definice Funkce $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ má v ∞ izolovanou singularitu $\equiv \exists R > 0$ tal, ť $f \in H(\mathbb{C} - \overline{B_R(0)})$. Je-li ∞ izolované singulární, pak řěkneme, ť

∞ je $\left\{ \begin{array}{l} \text{odstranitelná sing.} \\ \text{pól} \\ \text{podstatná singulárta} \end{array} \right\} \equiv f\left(\frac{1}{z}\right) \text{ má v } 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{odstranitelná singulárta} \\ \text{pól} \\ \text{podstatná singulárta} \end{array} \right.$

Je-li $f \in H(\mathbb{C} - \overline{B_R(0)})$, pak

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

na $\{z \in \mathbb{C}; |z| > R\}$

• má v 0 odstranitelnou singulárta $\equiv c_n = 0 \quad \forall n > 0$

• má v 0 pól $\equiv \exists m_0 \quad \forall n \geq m_0, c_n = 0$ a $c_{m_0} \neq 0$

• má v 0 podstatnou singulárta $\equiv \forall n > 0 \exists m > n, c_m \neq 0$

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

na $\{z \in \mathbb{C}; |z| < \frac{1}{R}\}$

Definice Necht f má v ∞ izolovanou singularitu, Pak

$$\operatorname{res}_{\infty} f \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} f(z) dz$$

Znamená - je zde problém $\partial B_R(0)$ je orientována kladně (tj. proti směru hodinových ručiček) ale musíme; tedy mě zajímá letí napravo od křivky.

Věta 15.15 Je-li $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ Laurentova řada funkce f v ∞ .

Pak

$$\boxed{\operatorname{res}_{\infty} f = -c_{-1}}$$

(Dě)
$$\operatorname{res}_{\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n dz = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\partial B_R(0)} z^n dz$$

□

víme, že jen pro $n = -1$ je $\int_{\partial B_R(0)} z^n dz \neq 0$ $\rightarrow -c_{-1}$.

Úloha jak $\operatorname{res}_{\infty} f$ počítat

γ je křivka parametrizovaná $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$

Necht γ je křivka a $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zobrazení γ na $\phi \circ \gamma$ a předpokládáme, že ϕ je na okolí γ holomorfní.

Pak
$$\int_{\phi \circ \gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\phi(\varphi(t))) (\phi \circ \varphi)'(t) dt = \int_a^b f(\phi(\varphi(t))) \phi'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$= \int_{\gamma} (f \circ \phi)(z) \phi'(z) dz.$$

Tento výsledek využijeme pro $\operatorname{res}_{\infty} f$.

Podme:

$$\operatorname{res}_{\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} f(z) dz = +\frac{1}{2\pi i} \int_{-\partial B_{\frac{1}{R}}(0)} f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} dz$$

$\phi: z \mapsto \frac{1}{z}$
 $\begin{matrix} 1 \rightarrow 1 \\ i \rightarrow -i \\ -1 \rightarrow -1 \end{matrix}$ nemá orientaci

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\frac{1}{R}}(0)} f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} dz = -\operatorname{res}_0 f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}.$$

Odvodili jsme užitečný vztah:

$$\boxed{\operatorname{res}_{\infty} f = -\operatorname{res}_0 f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}}$$

()

□

Sete: Ažurujeme jednoduchý, ale důležitý tvrzení o součtu
residuí v $\mathbb{C}^*$.

15/40

Věta 15.16 Budeť $f \in H(\mathbb{C} - A)$ kde A je konečná množina izolovaných
singulárních. Potom $\sum_{a \in A \cup \{\infty\}} \text{res}_a f = 0$ 

Důkaz Dle definice A , existují $R > 0$ tak, že $A \subset B_R(0)$. Odtud plyne, že
 ∞ je izolovaná singularita

Dle Věty o residuích (Věta 15.14):

$$2\pi i \sum_{a \in A} \text{res}_a f = \int_{\partial B_R(0)} f(z) dz \stackrel{\text{definice res}_\infty f}{=} -2\pi i \text{res}_\infty f, \text{ což dává } \left(\text{lightbulb} \right).$$

Příklad a Spočítej $\int_{|z|=2} \frac{z^6}{1+z^7} dz$. Víme, že všechny izolované sing. f

ležejí na $|z|=1$. Tedy dle V15.16:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^6}{1+z^7} dz = -2\pi i \text{res}_\infty f = 2\pi i \text{res}_0 f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} = 2\pi i \text{res}_0 \frac{1}{1+z^7} \frac{1}{z} = \underline{\underline{2\pi i}}$$

b $\int_{|z|=3} \frac{1}{z^9+1} dz = 2\pi i \text{res}_0 \frac{z^7}{1+z^9} = 0$

15.6.

Teoretické důsledky Cauchy - Goursatovy věty

Mezi důsledky Cauchy - Goursatovy věty patří Cauchyho integrální vzorec, z kterého plyne mj. $\mathbb{C}^\infty$ -hodnotná holomorfní funkce a také její analyticitata. Důležitý je i probraný důsledek je Věta o residuech. Nyní probíráme některé elementy komplexní analýzy.

Věta 15.17 (Liouvilleova typy)

Jestliže $\left\{ \begin{array}{l} \bullet f \in H(\mathbb{C}) \\ \bullet \exists p \in \mathbb{N} \text{ a } \exists C > 0 \text{ tak, } \forall |z|=R \max |f(z)| \leq CR^p \end{array} \right\}$, pak f je polynom stupně nejvýše p

Speciálně:

Jestliže $f \in H(\mathbb{C})$ a omezená, pak je f konstantní

① Protože $f \in H(\mathbb{C})$, tak $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, kde $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$.

$$\text{Odsud } |c_n| = \left| \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it}) R e^{it}}{R^{n+1} e^{i(n+1)t}} dt \right| \leq \frac{1}{R^n} \max_{z \in \partial B_R(0)} |f(z)| \leq C \frac{1}{R^{n-p}}$$

Tedy $\lim_{R \rightarrow \infty} |c_n| \rightarrow 0$ pokud $n > p$, což dává $c_n = 0$ pro $n > p$.

Tedy: $f(z) = \sum_{n=0}^p c_n z^n$ (polynom stupně nejvýše p). $\square$

Věta 15.18 (základní věta algebry) Buď f polynom stupně alespoň 1.

Pak $\exists z \in \mathbb{C} : f(z) = 0$.

$$\Rightarrow \forall \text{ polynom: } a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z-z_1) \dots (z-z_n)$$

① Sporem. Kdyby po všech $z \in \mathbb{C}$ platilo, že polynom f splňuje $f(z) \neq 0$, pak $\frac{1}{f} \in H(\mathbb{C})$. Uvažme-li, že $\frac{1}{f}$ je také omezená, pak dle Liouvilleovy věty 15.17: $\frac{1}{f} \equiv \text{konst.} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{\text{konst.}} \forall z \in \mathbb{C}$

Zbývá uvažovat, že $\frac{1}{f}$ je v $\mathbb{C}$ omezená.

Avšak

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right)}$$

polynom stupně n

$\rightarrow 0$ po $|z| \rightarrow \infty$. Protože $\frac{1}{f}$ je holomorfní, tak je $\frac{1}{f}$ spojitá, a má tedy max/min na $\overline{B_R(0)}$, $R \gg 1$ a tedy i na $\mathbb{C}$. 

Věta 15.19 (o jednodušnosti holomorfní funkce)

Bud' $\Omega \subset \mathbb{C}$ omezené, souvislé^{*}. Platí:

- a) je-li f holomorfní v Ω a $N_f := \{z \in \Omega; f(z) = 0\}$ není v Ω hromadný bod (tj. $\exists z_0 \in \Omega$ a $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N_f$ tak, $\bar{z}_n \rightarrow z_0$, $z_n \neq z_0$),
 pak $f \equiv 0$ v Ω .
- b) je-li f holomorfní v Ω a $f \not\equiv 0$, pak N_f tvoří jen izolované body.
- c) je-li f holomorfní v Ω a $A_f := \{z \in \Omega; f(z) = A\}$, pak $f \equiv A$ v Ω
- d) jsou-li f, g holomorfní v Ω a $f = g$ v $B \subset \Omega$, přičemž B má hromadný bod v Ω , pak $f = g$ v Ω .

Použití Spousta goniometrických vztahů, které platí v $\mathbb{R}$, platí i v $\mathbb{C}$.
 Např. $\sin z, \cos z$ definovaný řadou a víme, $\bar{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 Probi $\sin z, \cos z \in H(\mathbb{C})$, tak $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1 \in H(\mathbb{C})$
 a platí $f(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$ tedy dle V.15.19 a) $f(z) \equiv 0$ v $\mathbb{C}$.

(Dě) Stačí ukázat a) neboť b)-d) jsou jednoduše důsledky a).

Ad a) Bud' $\{z_n\} \subset N_f, z_0 \in \Omega$ a $z_n \neq z_0 : z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$ v $\mathbb{C}$
 $\forall n \in \mathbb{N}$

Ze spojitosti f : $f(z_n) \rightarrow f(z_0) = 0$ a tedy $z_0 \in N_f$

Z holomorfnosti f : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$
 $\downarrow c_0 = 0$

Dále uvažujeme, $\bar{\exists} U(z_0) = B(z_0)$ tak, $\bar{f(z) = 0 \quad \forall z \in B(z_0)}$.

Sporem: Kdyby ne, pak $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \Rightarrow f(z) = (z-z_0)^k h(z)$
 $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$
 $h(z_0) \neq 0, h \in H(B_\varepsilon(z_0))$

Ze spojitosti h a $h(z_0) \neq 0$ plyne:
 $\exists B_\varepsilon(z_0) : h(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_\varepsilon(z_0)$. Pak však
 $f(z) = (z-z_0)^k h(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$.
 a A_0 nemůže být hromadný bod nulové množiny N_f .

► viz další strana

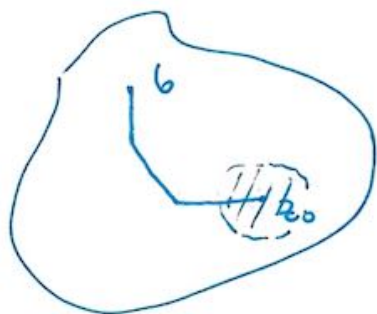
Def. $\Omega \subset \mathbb{C}$ omezené souvislé $\equiv \forall G \subset \Omega$ neprázdnou jistou G i $\Omega - G$ omezené, pak $G = \Omega$.

$\Omega \subset \mathbb{C}$ omezené je trivizace konizace $\equiv \forall z, w \in \Omega \exists \phi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{C} : \phi(\alpha) = z$ a $\phi(\beta) = w$.

$\Omega \subset \mathbb{C}$ omezené je spojitelno lomenou čarou $\equiv \forall z, w \in \Omega \exists$ konečnou posloupnost bodů $\{u_k\}_{k=0}^m$ tak, $z = u_0, w = u_m$ a $[u_j, u_{j+1}] \subset \Omega$ úsečka

► Nyní již víme, že $f \equiv 0$ v okolí z_0 . Uvažme, že $f \equiv 0$ v Ω .

Pak $f \in \Omega$ libovolně. Spojme b s z_0 spojitou křivkou (viz obrázek). Pak $\exists c$ bod na křivce tak, že $f \equiv 0$ na části křivky s z_0 do c . Pak křivkou bud N_f a dle předchozího existuje okolí c , kde je f nulová. To dává spor s tím, že c je maximálně možný bod, kde je $f = 0$ na křivce s z_0 do c . $\square$



Věta 15.20 (o střední hodnotě nebo o průměru)

Je-li $f \in H(\Omega)$ a $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ pak $f(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}, \rho e^{it}) \rho dt$

(Dě) Cauchyův integrální vztah:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(w)}{z - z_0} dw \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{parametrizace} \\ z = z_0 + \rho e^{it}}}}{=} \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) \rho dt = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}, \rho e^{it}) \rho dt$$

Věta 15.21 (Princip maxime) Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, souvislá, ohraničená

a $f \in H(\Omega)$ a $f \in C(\overline{\Omega})$, pak je f bud konstantní v $\overline{\Omega}$ nebo $|f(z)| < \max_{z \in \partial \Omega} |f(z)|$ $\forall z \in \Omega$

(Dě) Předpokládejme, že $z_0 \in \Omega$ a $|f(z_0)| \geq |f(z)| \forall z \in \overline{\Omega}$.

Potom $f \in H(\Omega)$, tak existuje $B_R(z_0)$ tak, že $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ $\forall z \in B_R(z_0)$.

Potom

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} c_n \overline{c_m} R^{n+m} e^{i(n-m)t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 R^{2n}$$

tak

$$\underbrace{|c_0|^2}_{\text{vypočet}} = |f(z_0)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)|^2 dt \leq \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})|^2 dt}_{\text{podle předchozího}} = |c_0|^2 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 R^{2n}}_{\text{vypočet}}$$

Věta 15.22 (Princip minima - důsledek věty 15.21)

Necht' jsou splněny všechny předpoklady věty 15.21 a navíc

$$f \neq 0 \text{ na } \Omega.$$

Pak je buď f konstantní nebo $|f(z)| > \min_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$

(Dě) Dle předpokladu je $\frac{1}{f}$ holomorfní v Ω a spojitá v $\overline{\Omega}$. Tedy dle V15.21 pak buď $\frac{1}{f}$ je konstantní nebo $\frac{1}{|f(z)|} < \max_{z \in \partial\Omega} \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{\min_{z \in \partial\Omega} |f(z)|}$, což dává výsledek. $\square$

Věta 15.23 (Riškova rovnice $f(z)=0$). Buď $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ oblast.

Buď $B_r(z_0) \subset \overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Jestliže

$$|f(z_0)| < \min_{|z-z_0|=r} |f(z)|,$$

pak $\exists z \in B_r(z_0) : f(z) = 0$.

(Dě) Když $f \neq 0$ v $B_r(z_0)$, pak $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in H(\Omega')$ kde $B_r(z_0) \subset \overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ $\uparrow$ okéně

Pak dle V15.21: $|g(z_0)| \leq \sup_{z \in \partial B_r(z_0)} |g(z)| \Rightarrow |f(z_0)| \geq \min_{z \in \partial B_r(z_0)} |f(z)|$, což dává $\square$

Věta 15.24 (O okéněm zobrazení)

$\in H(\Omega)$

Každá holomorfní nekonstantní funkce f je otevřené zobrazení

(kon. zobrazení okénem množin na okénem)

[Pozor! v $\mathbb{R}$ neplatí: $\sin : (0, 2\pi) \xrightarrow{m} (-1, 1)$]

(Dě) Buď $z_0 \in \Omega$ a $w_0 = f(z_0)$.

Cíl: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $B_\delta(w_0) \subset f(B_\varepsilon(z_0))$

Pokud f je nekonstantní, $z \mapsto f(z) - w_0$ má v z_0 izolovanou kořen (z věty o jednovrcholnosti)

tak pro malí ε : $f(z) - w_0 \neq 0 \quad \forall z \in \partial B_\varepsilon(z_0)$

Položme

$$2\delta := \min_{z \in \partial B_\varepsilon(z_0)} |f(z) - w_0|$$

Pak $\forall w \in B_\delta(w_0)$

$\exists z \in \partial B_\varepsilon(z_0) : f(z) = w$

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w - w_0| \geq 2\delta - \delta = \delta \Rightarrow \text{splňuje předpoklady V15.23}$$

$$\text{ale } |f(z_0) - w| < \delta$$

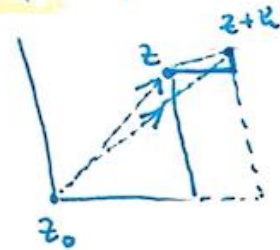
$\Rightarrow \exists z \in B_\varepsilon(z_0) : f(z) = w = 0 \Leftrightarrow f(z) = w$ a když $w \in f(B_\varepsilon(z_0))$,
což jsme chtěli ukázat! $\square$

Věta (Morera) Pond $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená a $f \in C(\Omega)$ taková, že
 buď $\int_{\partial \Delta} f = 0 \quad \forall$ trojúhelníků $\Delta \subset \Omega$
 nebo $\int_{\partial \sigma} f = 0 \quad \forall$ obdélníků $\sigma \subset \Omega$,

Pak $f \in H(\Omega)$

(Dě) Předpokládáme, že můžeme definovat pomyslně primitivní funkci

$F(z) = \int_{[z_0, z]}$ neboť body $z_0, z+k$ a z tvoří trojúhelník a A celý směr



Společně

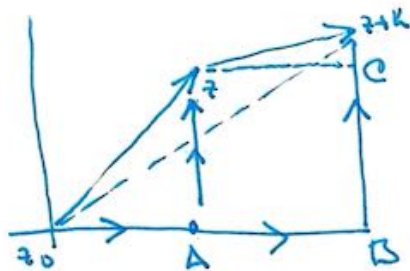
$$\frac{F(z+k) - F(z)}{k} = \frac{1}{k} \int_z^{z+k} f(\zeta) d\zeta \xrightarrow{k \rightarrow 0} f(z)$$

parametrizují a jsou totéž.

Tedy: $F'(z) = f(z)$ a F je holomorfní, což nám znamená, že $F \in C^\infty$ a také $f \in C^\infty$ a když speciálně $f \in H$.

Pro obdélníky:

$$F(z) = \text{def.} \int_{[z_0, A, z]} f(\zeta) d\zeta$$



Proble

$$\Delta ABC = \Delta A z C$$

tak

$$\frac{F(z+k) - F(z)}{k} = \frac{1}{k} \int_{[z, C, z+k]} f(\zeta) d\zeta \xrightarrow{k \rightarrow 0} f(z)$$

Důsledky (Spojité nezáporné holomorfní funkce)

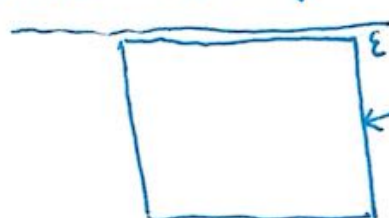
Máme $f \in C(\Omega)$ a p přímce probíhající Ω a $\Omega \cap p = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Ω_i otevřené.
 Je-li $f \in H(\Omega_1)$ a $f \in H(\Omega_2)$, pak $f \in H(\Omega)$.

(Dě) Stačí uvažovat situaci

3 možnosti umístění obdélníků:

(1) D.K. $\int_{\partial \sigma} f(\zeta) d\zeta = 0$

(2) Odvrácen od 0



(3)

Převodem na 2 obdélníky v situaci (2)

Q.E.D.

Cil: Ukázat, že $\int_{\partial \sigma} f(\zeta) d\zeta = 0$

15.7.

LOMENÉ FUNKCE A KONFORMNÍ ZOBRAZENÍ A APLIKACE

(téma: Möbiovy transformace)

úloha (motivace) ^{homografie} Chci vyřešit Laplaceovými pomocí na komplikované oblasti

$\Omega_1 \subset \mathbb{C}$, přitom však vím (co takhle není náš případ) jak řešit Laplaceovými pomocí na čtverci či kruhu či jiné jiné přímé množině (oblasti) $\Omega_2 \subset \mathbb{C}$ (např. polokruh). Mohu se tedy ptát, zda lze převést Ω_1 na Ω_2 tak, že se mi parciální diferenciální operátor (jako Laplaceův operátor) příliš nemění.

Podobí: Kontrukce zobrazení, které danou oblast převeď na jednoduchou oblast ^{proh}.

Např. profil křídla



"Positivní" odpověď na náš podíl dává následující Riemannova věta. Jejímu znění předchází dvě definice.

Definice Řekneme, že $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ je biholomorfní $\stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \bullet f: \Omega_1 \xrightarrow{\text{na}} \Omega_2 \\ \bullet f \in H(\Omega_1) \\ \bullet f^{-1} \in H(\Omega_2) \end{cases}$

Definice ¹ Řekneme, že $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřený, omezený je jednoduše souvislá pokud $\mathbb{C} - \Omega$ je souvislá ($\forall$ 2 body lze spojit křivkou která leží v $\mathbb{C} - \Omega$)

② Řekneme, že $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřený je jednoduše souvislá

pokud pro $\forall$ jednoduchou uzavřenou křivku ležící v Ω platí, že její vnitřek (množina ležící nalevo od křivky) patří do Ω



jednoduše souvislá množina



množina, která není jednoduše souvislá

* $\varphi: (a,b) \rightarrow \mathbb{C}$ je jednoduše uzavřený $\stackrel{\text{df}}{=} \varphi: (a,b) \xrightarrow{\text{na}} \langle \varphi \rangle$ prole a φ^{-1} je spojitá
• $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Nyní jiš sklousand Riemannova věta

Věta (Riemannova) • Je-li $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednoduché souvislé, otevřené,
 pak $\exists! \varphi: \Omega \xrightarrow{\text{mo}} \mathbb{D}_1(0)$, které ji biholomorfní
 Navíc, lze volit w a α tak, že $\varphi(z_0) = w$ a $\text{Arg } \varphi'(z_0) = \alpha$
Např. $w=0$ a $\alpha>0$
 předepíšeji otocení v z_0 o úhel α . (zobrazení)
 • $\mathbb{C}$ uhe biholomorfní zobrazit na $\mathbb{D}_1(0)$.

Větu nebudeme dokazovat. Věta nedává návod jak funkci φ sestavit, ale víme, že existuje.

Lomení funkce představují třídu speciálních funkcí, které transformace množin na sebe umozňují.

Uvažujme nejdříve čtyři základní funkce:

- ① $f(z) = z + b$: $\mathbb{C}^* \xrightarrow[\text{mo}]{\text{po}h} \mathbb{C}^*$ ji pro $b \in \mathbb{C}$ posunutí ($\infty \mapsto \infty$)
- ② $f(z) = az$: $\mathbb{C}^* \xrightarrow[\text{mo}]{\text{po}h} \mathbb{C}^*$ ji pro $a \in \mathbb{C}$ přivrazení z bodu otocení o $\text{Arg } a$ a přezkalovení $|a|$
 zahrnuji : • identitu $a=1$
 • rotaci o úhel $\text{Arg } a$ (pro $|a|=1$)
 • skalování $a \in \mathbb{R}$ (homotetie)
 • středovou souměrnost $a=-1$.

③ $f(z) = az + b$: $\mathbb{C}^* \xrightarrow[\text{mo}]{\text{po}h} \mathbb{C}^*$ složením ① a ② ($\infty \mapsto \infty$)

④ $f(z) = \frac{1}{z}$: $\mathbb{C}^* \xrightarrow[\text{mo}]{\text{po}h} \mathbb{C}^*$
 $0 \mapsto \infty$
 $\infty \mapsto 0$
 $\partial \mathbb{D}_1(0) \xrightarrow{\text{mo}} \partial \mathbb{D}_1(0)$
 $\mathbb{D}_1(0) \xrightarrow{\text{mo}} \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}_1(0)}$
 $\mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}_1(0)} \xrightarrow{\text{mo}} \mathbb{D}_1(0)$

Definice Zobrazení $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ kde $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ daná

se nazývá lineární lomené zobrazení (neboli homografie neboli

Möbirova transformace)

Plati : i) $f: \mathbb{C}^* \xrightarrow[\text{po}h]{\text{mo}} \mathbb{C}^*$
 [c=0] $\Rightarrow$ ③ [c≠0]

$$f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

$$\begin{aligned} -\frac{b}{c} &\rightarrow 0 \\ -\frac{d}{c} &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

[ii] • ① - ④ jsou speciální případy $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

• Platí však i "opačné" tvrzení. Všimněme si, že

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{c} \frac{cz+d}{cz+d} + \frac{bc-ad}{(cz+d)c} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \frac{1}{cz+d}$$

a tedy

$$f(z) = f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5 \quad \text{zde}$$

$$f_1(z) = cz$$

$$f_2(z) = z + d$$

$$f_3(z) = \frac{1}{z}$$

$$f_4(z) = \frac{bc-ad}{c} z$$

$$f_5(z) = z + \frac{a}{c}$$

[iii] L ... množina všech lineárních lomených zobrazení
 $\circ$ operací složené (složení) $\circ$ tvoří grupu
 $(L, \circ)$ Möbiouva grupa. tato se nazývá $L(\mathbb{C}^*)$

Ještě než si shrneme vlastnosti lineárních lomených funkcí, uvedeme dvě definice.

Definice Jsou-li $a, b, c, d \in \mathbb{C}^*$ ^{navzájem} nulová, pak
 $\frac{\frac{c-a}{c-d}}{\frac{d-a}{d-b}}$ se nazývá dvojpoměr

(je-li některá z a, b, c, d rovná ∞ ,
 pak dají nůdíl
 je rovná 1)

Definice Rovnice $\textcircled{*} \quad a z \bar{z} + \bar{b} z + b \bar{z} + c = 0 \quad z \in \mathbb{C}$

i
tvrzení je obecná rovnice přímky a kružnic
 v komplexní rovině.

$$\begin{aligned} a, c &\in \mathbb{R} \\ b &\in \mathbb{C} \\ ac &< |b|^2 \end{aligned}$$

Pro $a=0$, $\textcircled{*}$ vede k přímce; Pro $a \neq 0$, $\textcircled{*}$ popisují kružnici.

Věta (Vlastnosti lineárních lomených funkcí) Platí:

(1) $\forall f \in L: f: \mathbb{C}^* \xrightarrow[\text{překl.}]{\text{hom.}}$ spojitě

(2) $(L, \circ)$ je grupa (asociativní, s jednotkou, inverzí)

(3) S výjimkou identity: každé $f \in L$ má nejvýše dva pevné body
 (tj. $f(z) = z$)

(4) Pro libovolné dvě trojice navzájem různých bodů (z_1, z_2, z_3)
 a (w_1, w_2, w_3) existuje právě jedno $f \in L$ tak, že $f(z_i) = w_i$
 $i=1, 2, 3$.

Nanic je toto zobrazení jednoznačně určeno:

$$\frac{\frac{w-w_2}{w-w_1}}{\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}} = \frac{\frac{z-z_2}{z-z_1}}{\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}} \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{w-w_2}{w-w_1} \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_2}{z-z_1} \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

kde $w := f(z)$

Opět, je-li některé z z_j rovno ∞ , pak rozdíl nahradíme 1.

- (5) Každé $f \in L$:
- převádí obecné zrušnice na obecné zrušnice
 - zachovává drogipoměr
 - převádí jednu z oblastí, kterou odděluje zrušnice γ na jednu z oblastí kterou protéká $f(\gamma)$.

V třídě lineárních konformních funkcí umíme převést oblast na (jednoduchou) oblast.

Podrobně je-li $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, Ω oblast, $z_0 \in \Omega$, $f'(z_0) \neq 0$,
pak A Taylorova rovnice

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0)$$

což implikuje

$$|f(z) - f(z_0)| = |f'(z_0)| |z - z_0|$$

odtud plyne, že v dostatečně malé oblasti $f(z) \neq f(z_0)$ jsou $|f'(z_0)|$ -krát vzdálenosti z a z_0

$$\arg(f(z) - f(z_0)) = \arg f'(z_0) + \arg(z - z_0)$$

odtud plyne, že (pro pevné z_0) úsečky spojující z a z_0 obtíží o stejný úhel pohyb argumentu $f'(z_0)$.

Definice Zobrazení $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované na

oblasti množiny U , se nazývá konformní v U

- $\Leftrightarrow$:
- f je jednoznačné zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ regulární^{*)} v U
 - f zachovává nezávislost křivek ležících v U , tzn.
pro $\forall z_0 \in U$ a $\forall \gamma_1, \gamma_2$ křivky začínající v z_0 , $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$
a $\gamma_1'(0) \neq 0 \neq \gamma_2'(0)$ platí $\left| \arg \frac{\gamma_1'(0)}{\gamma_2'(0)} \right| = \left| \arg \frac{(f \circ \gamma_1)'(0)}{(f \circ \gamma_2)'(0)} \right|$

- [f je konformní 1. druhu $\Leftrightarrow$ zachovává orientaci]
[f je konformní 2. druhu $\Leftrightarrow$ f je $\overline{z}$]

^{*)} viz kapitola pro více proměnných

Příklad: $f(z) = \overline{z}$ není konformní v 0

Věta 15.25 Je-li $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřen a $f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$,
pak je f konformní v Ω

Důk 2 definice: a) derivování složek fce plyne:

$$\frac{(f \circ \gamma_1)'(0)}{(f \circ \gamma_2)'(0)} = \frac{f'(\gamma_1(0)) \gamma_1'(0)}{f'(\gamma_2(0)) \gamma_2'(0)} = \frac{f'(z)}{f'(z)} \frac{\gamma_1'(0)}{\gamma_2'(0)} = \frac{\gamma_1'(0)}{\gamma_2'(0)}$$

a) $\angle$ podvlněného plyne tutže.

Jinak také $\text{Arg}(f \circ \gamma_1)'(0) = \text{Arg } f'(z) + \text{Arg } \gamma_1'(0)$
 $\text{Arg}(f \circ \gamma_2)'(0) = \text{Arg } f'(z) + \text{Arg } \gamma_2'(0)$

a když kešné velky
 k určování
 otocit o stejný
 úhel $\text{Arg } f'(z)$
 a když se zachovávají.

Věta 15.26 (transformace Laplaceova operátorem holomorfní zobrazení)
 Pond $f: \Omega_1 \xrightarrow{\text{na}} \Omega_2$ holomorfní v Ω_1 . Necht $v \in C^2(\tilde{\Omega}_2)$, kde $\tilde{\Omega}_2 := \{s+it; s+it \in \Omega_2\}$

Položíme $u(x,y) = v(\text{Re } f(x+iy), \text{Im } f(x+iy))$. Pak

$$\Delta_{xy} u = \frac{1}{2} (|\nabla_x \text{Re } f|^2 + |\nabla_y \text{Im } f|^2) \Delta_{st} v(\text{Re } f, \text{Im } f) = \frac{|f'(z)|^2}{2} \Delta_{st} v(\text{Re } f, \text{Im } f)$$

Aplikace Máme-li spojit u , která je harmonická v nějaké jednoduše souvislé
 oblasti $\tilde{\Omega}_1 \subset \mathbb{R}^2$, pak najdeme zobrazení $\Omega_1 := \{z=x+iy; (x,y) \in \tilde{\Omega}_1\}$ holomorfní
 funkci (s nenulovou derivací; např. lineárním zomejn zobrazením) na
 polokružnici či kruh, kde lze harmonickou funkci explicitně nalézt
 či lépe shrnout: Pak dle věty 15.26 $u(x,y) = v(\text{Re } f(x+iy), \text{Im } f(x+iy))$ je harmo-
 nická.

Důk Věty 15.26 Plyne z derivování, reálného pravidla a $(\mathbb{C}-\mathbb{R})$ podměnu.

Víme: $s := \text{Re } f, t := \text{Im } f$ (zkráceně)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

a tedy $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial v}{\partial s} \Delta s + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 \right] + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 \right]$

Cauchy-Riemannovy podmínky implikují $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y}$ a $\frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\partial t}{\partial x}$
 a tak $\Delta t = 0, \Delta s = 0, \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial t}{\partial y} = 0$ a $|\nabla t|^2 = |\nabla s|^2$

což dává výsledek.

15.8. Analytické prodloužení, Gamma funkce a Riemannova zeta fce

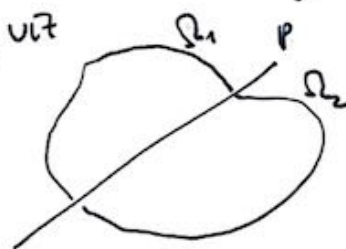
Analytické prodloužení je úloha najít z dané funkce $f \in H(\Omega)$ a množiny $\tilde{\Omega} \supsetneq \Omega$ funkci $\tilde{f} \in H(\tilde{\Omega})$ tak, aby $f = \tilde{f}$.

Z věty o jednoznačnosti víme, že tato $\tilde{f}$ je úněna jednoznačně. Existují některé podmínky, jak analytické prodloužení sestavit:

(I) $f_1 \in H(\Omega_1), f_2 \in H(\Omega_2), \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ a $f_1 = f_2$ na $\Omega_1 \cap \Omega_2$

$\Rightarrow \tilde{f} = \begin{cases} f_1 & \text{v } \Omega_1 \\ f_2 & \text{v } \Omega_2 \end{cases}$ plnění $\tilde{f} \in H(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ a $\tilde{f}$ je anal. prodloužení f_1 i f_2 na $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

(II) Spojité navrhávání holomorfních fce, viz důsledek Pórovy věty.



(III) Prodloužení mocniných řad
či lokální násobování
(viz komplexní logaritmus)



(IV) Schwarzův princip symetrie

Buď $\Omega \subset \{z; \text{Im} z > 0\}, \partial\Omega \supset I \subset \mathbb{R}$ a $\forall x \in I \exists u(x): u(x) \cap \{z; \text{Im} z > 0\} \subset \Omega$

Je-li $f \in H(\Omega)$, pak $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \Omega \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in \Omega^* = \{z; \bar{z} \in \Omega\} \end{cases} \in H(\Omega \cup \Omega^* \cup I)$.

Definice (Gamma funkce; Eulerova gamma fce)

$z \in \mathbb{C}, \text{Re} z > 0: \Gamma(z) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$
(*) Gamma funkce

► Ověrte, že $\Gamma(z)$ je definována všechna pro $\{z; \text{Re} z > 0\}$

► Γ je holomorfní v $\{z \in \mathbb{C}; \text{Re} z > 0\}$

(Dr) $g(x, z) = e^{-x} x^{z-1} \quad z = u + iv$

$\frac{\partial g}{\partial u}(x, z) = e^{-x} x^{z-1} \ln x$
 $\frac{\partial g}{\partial v}(x, z) = e^{-x} x^{z-1} i \ln x$
 $\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + i \frac{\partial g}{\partial v} \right) = 0 \Rightarrow g$ věluje $\&$ z plní C-R

Dále pro $z \in \mathbb{C}; \text{Re} z > 0 \exists \varepsilon > 0, \delta > 0 \text{ Re} z \in \langle \varepsilon, K \rangle$ a po tabulce z majdu integrace majdu $|\frac{\partial g}{\partial u}|$ a $|\frac{\partial g}{\partial v}|$ a tedy $\Gamma(z)$ plní C-R. podmínky dle věty o derivaci

integrálu dle parametru.

► pro $z \in \mathbb{R}^+$ integraci per partes platí

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^z dx = \left[e^{-x} x^z \right]_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx = z \Gamma(z)$$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ 0 & z-1 \\ -e^{-x} & z x \end{matrix}$

z větší o jednorázovost:

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0: \Gamma(z+1) = z \Gamma(z)}$$

Také máme

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(m+1) = m!$$

Odsud, že vztah $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ lze rozšířit

Γ i pro $z: \operatorname{Re} z > -1$ tím, že takto rozšíření je má v 0 pól násobnosti jedna.
indukcí rozšířit Γ na celou $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, \dots, -m, \dots\}$
a v $\mathbb{Z}^- \setminus \{0\}$ má takto rozšíření Gamma funkce
pól násobnosti 1.

Dále

$$\operatorname{res}_0 \Gamma = 1$$

a protože pro $a \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} a \in (0, 1), m \in \mathbb{N}, a \neq 1$

$$\boxed{\Gamma(-m+a) = \frac{\Gamma(a)}{(-m+a)(-m+a+1)\dots(-1+a)}}$$

$\Updownarrow \quad z = a - m$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(m+z)}{z(z+1)\dots(z+m-1)}$$

$m \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\Gamma(z) = \frac{\Gamma(m+1+z)}{z(z+1)\dots(z+m)}} \quad \begin{matrix} (m \mapsto l+1 \quad l \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ (l+1 \mapsto m) \end{matrix}$$

$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

tak

$$\underline{\underline{\operatorname{res}_{-m} \Gamma = \frac{1}{-m(-m+1)\dots(-m+m-1)} = \frac{(-1)^m}{m!}}}$$

Riemannova funkce zeta (The Riemann zeta function)

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konverguje absolutně pro $\forall s \geq \sigma_0$, kde $\sigma_0 > 1$ je libovolné

Tato řada je také majorantou řady

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{kde } s = \sigma + it$$

Zobrazení $s \mapsto \zeta(s)$ se nazývá Riemannova zeta-funkce;

je definována takto pro $\forall s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 1$.

Tato funkce má klíčovou roli v. aplikaci $\mathbb{C}$ v teorií čísel.

Platí:

► Pro $s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1$ $\zeta(s) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - p_m^{-s})}$ kde

(✿)

$p_1 < p_2 < \dots < p_m < \dots$
jsou prvočísla.

• $\zeta(s) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{\substack{m \text{ liché}}} \frac{1}{m^s}$

• $\zeta(s) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \text{ není dělitelné } 2 \text{ či } 3}} \frac{1}{m^s}$

• $\zeta(s) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m^s}\right) = \sum_{m \in A} \frac{1}{m^s}$

kde A jsou všechna přirozená čísla
ne dělitelná $2, 3, 5, 7, \dots, p_m$
první m prvočísly

kde v řadě napravo je $1 + \frac{1}{p_{m+1}^s} + \dots$

což konverguje k 1 pro $m \rightarrow \infty$

a tedy vztah (✿) platí (pořád je prvočísel ∞ mnoho).

Kdyby však prvočísel byl konečný počet, řekněme M , tak z výpočtů

vychází $\zeta(s) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_M^s}\right) = 1$

Odsud pro $\lim_{s \rightarrow 1} : \left[\zeta(1) < +\infty \right]$ ale to je spor, neboť $\zeta(1) = +\infty$

► Riemannova řeta-fce lze rozšířit analyticky na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Podobně jako u Eulerovy gamma-fce i zde lze využít "functional equation"

$$(2) \quad \zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

a vlastosti Γ funkce.

• $\zeta(s)$ má v 1 pól násobnosti 1, $\text{res}_1 \zeta = 1$.

• Rozšířená ζ -fce má zvrhny v bodech $\frac{\pi s}{2} = k\pi \Rightarrow s = 2k$
ale jen pro $k < 0$, neboť pro $k > 0$ jsou $\sin \frac{\pi s}{2} \Big|_{s=2k}$

"balancující" póly $\Gamma(1-s)$.

$$\zeta(s) = - \frac{(2\pi i)^k B_k}{2 k!}$$

kte B_k jsou Bernoulliho čísla
 $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6},$
 $B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}$

obecně:
$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} z^j$$

např.
$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

• Další zvrhny ζ -fce leží v pásmu $0 < \text{Re } z < 1$,
přičemž známé zvrhny leží na $\text{Re } z = \frac{1}{2}$.

Riemannova hypotéza říká, že všechny netriviální zvrhny
leží na přímce $\text{Re } z = \frac{1}{2}$

Problém úzce souvisí s distribucí prvočísel
na reálné ose: kolik je prvočísel menších než dané číslo x ?

► Z rovnice (2) plyne
$$\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi i} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Gamma(2) \zeta(2) = -\frac{1}{12}$$

tento vztah však platí pro ζ -fce definovanou pro $\text{Re } s < 1$
rovnici (2); nelze samozřejmě po přímé definici
Riemannovy řeta funkce. Tak jsme oteřžili "paradox":

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$$



V posledních přednáškách jsme viděli, že komplexní analýza je velice mocný nástroj ^(a zároveň podstatný) v teorii parciálních diferenciálních rovnic, v teorii ODE, algebře, ale také teorii matic, funkcionální analýze, geometrii, ale i v samotné reálné analýze.

"Between two truths of the real domain, the easiest and shortest path quite often passes through the complex plain."

Spousta informací a nových poznatků byla důsledkem Cauchy-Goursaty věty pro holomorfní funkce (dodatkem v našem případě ještě Greenova věty a pomocí Cauchy-Riemannových podmínek). Mimochodem,

víme, že $\boxed{\text{if-then}} \quad f \in H(\Omega) \implies f'(z) \text{ existuje } \forall z \in \Omega$, $\boxed{\text{pak}} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)} \in H(\Omega)$
 tzn. $f \in H^\infty(\Omega)$
 a tyto funkce lze psát
 vždy ve tvaru mocniné řady

Tato implikace je výrok o regularitě ^(hladkosti), který dosahujeme jině než studia mat. vlastností holomorfních fce.
 Dříve není potřeba holomorfnosti, ale spíše splnění předpokladů pro ovou větu.

Implikaci jsme dostali pomocí Cauchyho integračního vzorce:

$$f \in H(B_R(a)) : f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(z)}{z-w} dz \quad \text{ kde } w \in B_R(a)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) (z-w)^{-1} dz \quad \text{ kde } w \in \text{vnitřku } \Gamma$$

Zobecnění:
 $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ matice, f analytická (holomorfní) fce
 $f(A) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) (zI - A)^{-1} dz \quad \text{ kde } \Gamma \subset \Omega$
 a Γ uzavřená spektrum matice A .
 které lze dále zobecnit pro nekomutativní operátory.

• Ztotožnění $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ je specifické.
 Peatův Frobeniovův věta (1877): pro $d > 2$ lze na $\mathbb{R}^d$ definovat "rozumné" násobení jen pro $d=4$ (kvaterniony tvoří nekomutativní těleso ~ vektory v teorii fyziky), v porovnání s potasy, ...
 a pro $d=8$ (oktaniony, Cayleyho oktaedr)
 (*) Sabine Hossenfelder, teoretická fyzika v Frankfurtu, inštitut pro pokročilou studii.

KNÍHA:
 LOST IN
 MATH.

16. FOURIEROVA TRANSFORMACE V $L^1(\mathbb{R}^d)$, V $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ A V $L^2(\mathbb{R}^d)$

Nejdříve si řekneme, co znamená obecně TRANSFORMACE či přesněji INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE. Poté si "odvodíme" FOURIEROVU transformaci pomocí FOURIEROVÝCH řad.

Integrační TRANSFORMACÍ funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ s jádrem $k: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nazýváme funkci $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou vztahem

$$g(w) := \int_E f(t)k(t, w) dt, \quad \text{ kde } E \subset \mathbb{R} \text{ je měřitelná množina. }^*)$$

Použijeme-li TRANSFORMACI na nějaký objekt (např. ODR, PDR či IDR) lze AISTAT pomocí jednodušší (např. algebraická či obyčejnou dif. rovnici v případě PDR či IDR), kterou snadno vyřešíme. AVŠAK, řešení je obráceně řešením původního objektu. K úspěchu procesu hledání řešení pomocí transformace tedy potřebujeme umět transformaci invertovat.

[MOTIVACE SMĚREM K DEFINICI FOUR. TRANSFORMACE]

$$\left. \begin{array}{l} \text{Uvažujme } 2\pi\text{-periodickou hladkou funkci } f: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{Pak} \\ f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \\ c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \\ \text{a platí} \\ \|f\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \end{array} \right\} \quad (1)$$

! Připomente si, proč vztahy (1) platí a jak jsme je získali.

* V aplikacích reziduální uř. jsme vedli pojem Mellinova transformace
Mellinova transformace přivádí

$$\text{pro } I(a) = \int_0^{\infty} z^{a-1} f(z) dz$$

fci f jímou funkci I .
jádrem $k(z, a) = z^{a-1}$

Je-li $\tilde{f}$ hladká, aniž l -periodická, nemusím si vztahy analytické (1) pamatovat; snadno je odvodím Admersonovými proměnnými. Vskutku:

$$\text{je-li } \tilde{f}(x+l) = \tilde{f}(x) \text{ pro } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ pak } F(x) := \tilde{f}\left(\frac{l}{2\pi}x\right) \text{ splňuje}$$

$$F(x+2\pi) = \tilde{f}\left(\frac{l}{2\pi}(x+2\pi)\right) = \tilde{f}\left(\frac{lx}{2\pi} + l\right) = \tilde{f}\left(\frac{lx}{2\pi}\right) = F(x);$$

tedy F je 2π -periodická a splňuje vztahy (1), tj.

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \\ c_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx} dx \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 &= \|F\|_{L^2(0,2\pi)}^2 = \|F\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 \end{aligned} \right\} (1')$$

Přechodem od F k $\tilde{f}$ ($F(x) = \tilde{f}\left(\frac{l}{2\pi}x\right)$) a substitucí $y = \frac{lx}{2\pi}$, následované přeměněním y zpět na x , dostáváme

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{i\frac{2\pi}{l}kx}}{\sqrt{2\pi}} \\ c_k &= \frac{\sqrt{2\pi}}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \tilde{f}(x) e^{-i\frac{2\pi}{l}kx} dx \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 &= \frac{2\pi}{l} \int_{-l/2}^{l/2} |\tilde{f}(x)|^2 dx \end{aligned} \right\} (2)$$

Uvažujme nyní f , která není periodická, ale je definována na $\mathbb{R}$. Pak $f|_{(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})}$, tj. f zúžená na interval $(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$ pro $l \gg 1$, může být vztřena na $\mathbb{R}$, l -periodicky a pro tuto l -periodickou $\tilde{f}$ platí vztahy (2). Chceme přisumat chování (2) pro $l \rightarrow \infty$. K tomuto cíli označíme

$$f := \sqrt{2\pi} \tilde{f}$$

$$\xi_k := \frac{k}{l}$$

a

$$g(\xi_k) := lc_k$$

[jedná se o malinko odlišné označení dvou pojmů]

Pak z (2) dostáváme

$$(3) \quad \left[\begin{aligned} g(\xi) &= \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x) e^{-i2\pi \xi x} dx, \\ f(x) &= \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(\xi_\ell) \frac{e^{i2\pi \xi_\ell x}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\ell} = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(\xi_\ell) e^{i2\pi \xi_\ell x} (\xi_\ell - \xi_{\ell-1}), \\ \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |g(\xi_\ell)|^2 (\xi_\ell - \xi_{\ell-1}) &= \int_{-\ell/2}^{\ell/2} |f(x)|^2 dx, \end{aligned} \right]$$

což dává formální pro $\ell \rightarrow \infty$

$$(4) \quad \left[\begin{aligned} g(\xi) &\sim \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi \xi x} dx \\ f(x) &\sim \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{i2\pi \xi x} d\xi \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\xi)|^2 d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \end{aligned} \right]$$

Tyto advenční
formální úvahy
máš
přivést
→
následující
definici
a sdělení:

Definice Buď $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$. Definujeme:

- Fourierova transformace f , značenou $\mathcal{F}[f]$ či $\hat{f}$, vztahem

$$(F_T) \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i2\pi \xi \cdot x} dx$$

$\xi \in \mathbb{R}^d$
" $(\xi_1, \dots, \xi_d)$

$$x \cdot \xi := \sum_{j=1}^d x_j \xi_j$$

- Inverzní Fourierova transformace, značená $\mathcal{F}^{-1}[f]$ či $\check{f}$, vztahem

$$(IF_T) \quad \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i2\pi \xi \cdot x} d\xi$$

Potud nespecifikujeme, jaké vlastnosti má f , aby integrály
ve výše uvedené definici byly konvergentní, je tato definice
formální – nic nedefinuje, jen navrhuje značení.

Naše úvahy, které nás přivedly k (4), naznačují,
že lze očekávat platnost těchto vztahů

$$(5) \quad \boxed{\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f]) = \mathcal{F}[\check{f}] = f}$$

tzv. **FOURIERŮV
INVERZNÍ
VZOREC**

a
(6)

$$\boxed{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}$$

**PARSEVALOVA
nebo
PLANCHERLOVA
IDENTITA**

Naším cílem bude identifikace tříd funkcí, pro které vzorečky pro Fourierovu transformaci (F_T) a její inverzi (IF_T) spolu se vztahy (5) a (6) platí. Uvědomme si, že ačkoli, u obecně prvků $L^1(\mathbb{R}^d)$ dává smysl vztahům (F_T) i (IF_T), ale (5) ani (6) pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ platit nemusí. Tedy $L^1(\mathbb{R}^d)$ není obecně vhodný prostor.

Na druhou stranu bych vztahy (F_T), (IF_T), (5) a (6) získať (heuristicky) z Fourierovy řady. Víme z minulého semestru, že vztah

$$f(x) = \sum c_k \frac{e^{itx}}{\sqrt{2\pi}}$$

platí pro s.v. $x \in \mathbb{R}$ pokud $f \in L^2_{\text{per}}$.

Je-li navíc f hladká, pak tvrzení platí všude.
 (mať. $f, f' \in L^2_{\text{per}}$ ← nebo po částech C^1 a spojitá)

Tedy L^2 -fce a hladké funkce by mohly být vhodné prostory. Uvědomme si skutečnost, že $L^2(\mathbb{R}^d)$ bude "dobrý" prostor, kde vztahy (5) a (6) platí, ale postup k tomuto prostoru bude komplikovanější. Důvodem je skutečnost, že množina $\mathbb{R}^d$ je neomezená a samotná hladkost fce existence integrálu přes $\mathbb{R}^d$ nezaručuje. Budeme muset přidat dostatečný pokles v ∞ . Tento požadavek nás přivede k definici Schwartzova prostoru $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, viz také příklad 3.

Nechť nyní $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Pak $|\hat{f}(s)| = |\mathcal{F}[f](s)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i2\pi s x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

Tedy $\forall s \in \mathbb{R}^d$: $|\hat{f}(s)| < \infty$ a vztah (F_T) má smysl

Také vidíme, že

► $\sup_{s \in \mathbb{R}^d} |\hat{f}(s)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ a tedy $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$

Dále,

► $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$ což plyne z věty o záměně $\int$ a limit.

Nyní si spočítáme dva příklady na Fourierovu transformaci. Hledáme první vlastnosti, že L^1 -prostor není "uzavřený" na Fourierovu transformaci, neboť pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ zůstane, že $\hat{f}$ pro $L^1(\mathbb{R}^d)$ není!!

Př. 1 Funkce $f \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{[-1,1]} = \begin{cases} 1 & \text{na } [-1,1] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ patří do $L^1(\mathbb{R})$.

Pro F.T. platí:

$$\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](s) = \int_{-1}^1 e^{-i2\pi s x} dx = \int_{-1}^1 \cos 2\pi s x dx + i \int_{-1}^1 \sin 2\pi s x dx$$

(kida funkce)

$$= \left[\frac{\sin 2\pi s x}{2\pi s} \right]_{-1}^1 = \frac{\sin 2\pi s}{\pi s}$$

Funkce $s \mapsto \frac{\sin 2\pi s}{\pi s}$ nemá Lebesgueov integrál $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin 2\pi s|}{|s|} ds = \infty \right)$

Také si všimneme, že $\hat{f}$ ačkoliv f je nemulova' jín na $(-1,1)$, tak $\hat{f}$ je nemulova' všude. Neplatí tedy, že F.T. fee s kompaktní nosičem $(\text{supp } f := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\})$ má kompaktní nosič.

② $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](s) = 0$.

Př. 2 Spátele F.T. $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Zřejmě (proč?) $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Rěšení

$$\left(\frac{1}{1+x^2} \right)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i2\pi s x} dx = \text{výpočet provedeme pomocí residu' v'ž aplikované na funkci } f(z) = \frac{e^{-i2\pi s z}}{1+z^2}$$

a žádnou obf. p'ž $v \pm i$

$$= \begin{cases} \boxed{s > 0} & \begin{array}{l} \text{Diagram: Upper semicircle from } -R \text{ to } R \text{ in the complex plane.} \\ -2\pi i \text{ Res}_i f(z) = -2\pi i \frac{e^{-2\pi s}}{-2i} = \pi e^{-2\pi s} \end{array} \\ \boxed{s < 0} & \begin{array}{l} \text{Diagram: Lower semicircle from } -R \text{ to } R \text{ in the complex plane.} \\ 2\pi i \text{ Res}_i f(z) = 2\pi i \frac{e^{2\pi s}}{2i} = \pi e^{2\pi s} \end{array} \end{cases} = \underline{\underline{\pi e^{-2\pi|s|}}}$$

kde jsme pro odhad integrálů p's největší polostranicou postupovali jako v důkazu JORDANOVA lemmatu, část (b).

Prostor L^1 , jak už jsme příklad 1, není vhodný prostor, na kterém by obecně platil Fourierův inverzní vzorec (5). Některé zajímavé vlastnosti však Fourierova transformace na prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$ má a stojí za to si ji uvěšit. Ještě předtím však zavědeme ještě jeden pojem: konvoluce dvou funkcí.

Def. Řekněme $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Definujeme konvoluci funkcí f a g předpisem

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$$

Protože evidentně neplatí implikace " $f \in L^1, g \in L^1 \Rightarrow fg \in L^1$ " (Najděte protipříklad!), je přetvářivé, že pro definici konvoluce stačí integrovatelnost f a g , jak ningsine! pouse uvažuje následující věta.

Věta 16.1 (Vlastnosti konvoluce) Platí následující:

- pokud $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g = g * f$ a $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$
- pokud $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$

Důk. Ověříme "pouse" druhé tvrzení. Platí pro $p > 1$,

$$\|f * g\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |(f * g)(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy \right|^p dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| |g(y)| dy \right)^p dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}}_{G} |g(y)| \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}}_{F} dy \right)^p dx$$

Hölderova
 $\leq$
 aplikováno na $G \in L^p, F \in L^{p'}$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| |g(y)|^p dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx \right)^{\frac{p}{p'}}$$

$$\leq \|f\|_{L^1}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| |g(y)|^p dy dx$$

$$\frac{p}{p'} = \frac{p(p-1)}{p} = p-1$$

Fubini

$$= \|f\|_{L^1}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| dx \right) |g(y)|^p dy = \|f\|_{L^1}^{p-1} \|g\|_{L^p}^p$$

Cvičení: Projděte si podrobně důkaz pro $p=1$ a dokažte symetrii konvoluce (substituce) negativně např. pro $d=1$.

Věta 16.2 Vlastnosti Fourierovy transformace na $L^1(\mathbb{R}^d)$

$$(i) f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C(\mathbb{R}^d) \text{ a } \sup_x |\hat{f}(x)| =: \|\hat{f}\|_{C(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

$$(ii) f, g \in L^1 \Rightarrow \widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$$(iii) \lim_{|s| \rightarrow \infty} \hat{f}(s) = 0 \text{ pro } f \in L^1$$

$$(iv) \widehat{\sigma_y f}(s) = e^{i2\pi y \cdot s} \hat{f}(s)$$

pricemž $(\sigma_y f)(x) = f(x+y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
(shift = posun o y)

$$(v) \widehat{f(\alpha x)}(s) = \frac{1}{|\alpha|^d} \hat{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Důkaz Ad (i) $|\hat{f}(s)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i2\pi x \cdot s} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$
 $|e^{i2\pi x \cdot s}| = 1$

Přechodem z sup dostáváme

druhou část tvrzení $\mathcal{F}: L^1 \rightarrow C$. skutečnost, že

$\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^d)) \subset C(\mathbb{R}^d)$ plyne a věty o spojitosti integrálu závislého na parametru.

Ad (ii) Dle věty 16.1 víme, že $f, g \in L^1$ plyne $f * g \in L^1$ a také $f * g = g * f$. Víme tedy, že $\widehat{f * g} \in C(\mathbb{R}^d)$.

Počítejme

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(s) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) e^{-i2\pi s \cdot x} dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) e^{-i2\pi s \cdot x} dx dy \\ &\stackrel{x-y=z}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) g(y) e^{-i2\pi y \cdot s} e^{-i2\pi z \cdot s} dy dz = \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) e^{-i2\pi z \cdot s} dz \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-i2\pi y \cdot s} dy \right) = \hat{f}(s) \hat{g}(s). \end{aligned}$$

Ad (iii) BÚNO le předpokládáme, že $f \geq 0$ (jinak $f = f^+ - f^-$),
BÚNO $f = \chi_{[-1,1]}$ (nebo pro $f \geq 0$ $\exists h_n \uparrow f$)

h_n sčítavě a $\sup h_n$ rovná se f .

Aniž, dle P. 1,

$$\hat{f}(s) = \hat{\chi_{[-1,1]}}(s) = \frac{\sin 2\pi s}{\pi s} \rightarrow 0 \text{ pro } s \rightarrow \infty.$$

Ad (iv) a (v) si dokažte sami pomocí věty o náhradě.



Dle Příkladu 2 víme, že v prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$ nemusejí platit Fourierovy inverzní vztahy (5). Zaujímá nás, že hladké funkce s dostatečnou rychlou chůzí (poklesu) v ∞ by mohly vést k cíli. Zde se jako první přirozené možnosti nabízejí prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, reprezentující hladké funkce s kompaktní podporou, definovaný

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) := \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) ; \text{supp } \varphi \text{ je kompaktní v } \mathbb{R}^d \}$$

$$= \{ \text{hladké funkce, které jsou nuly nejvyššího } d\text{-rozměrného intervalu nulové} \}$$

Připomeň: $\text{supp } \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d ; \varphi(x) \neq 0\}}$ — uzavřen

Dle Příkladu 1 však také víme, že Fourierova transformace $\mathcal{F}$ na L^∞ -fce s kompaktní podporou nemá kompaktní podporu. Tedy opět se F.T. dostáváme mimo prostor funkcí, kde jsme chtěli pracovat. Motivací k "šikovné" volbě prostoru nám pomůže i následující příklad.

Příklad 3 Ukážete, že pro $\lambda > 0$

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\frac{\lambda |x|^2}{2}}](s) = (\lambda \pi)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2 |s|^2}{\lambda}}$$

neboli

$$\mu > 0 : \mathcal{F}^{-1}[e^{-\mu |x|^2}](s) = \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2 |s|^2}{\mu}}$$

Rěšení:

Dodatečně (*) vezmeme pro $\mu = \pi$, tedy $(**) \mathcal{F}^{-1}[e^{-\pi |x|^2}](s) = e^{-\pi |s|^2}$ tedy F.T. i I.F.T. vedoucí k $e^{-\pi |x|^2}$ ve zmíněném.

Dle (**)

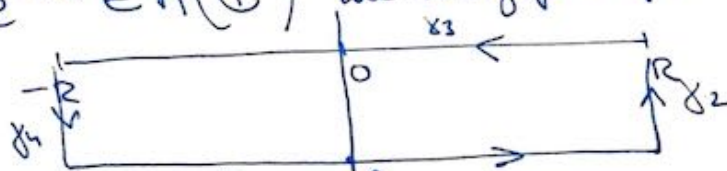
$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\pi |x|^2}](s) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi \left(\sum_{j=1}^d (x_j^2 - 2ix_j s_j - s_j^2) \right)} e^{-\pi |s|^2} dx$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} e^{-\pi |s|^2} \prod_{j=1}^d \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi (x_j - is_j)^2} dx_j$$

Zbývá tedy spočítat

$$Y := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi (y - is)^2} dy$$

K tomu využijeme residuovou (Cauchy) větu pro $f(z) = e^{-\pi z^2} \in H(\mathbb{C})$ kde integrujeme přes obdélník



Pak

$$0 = \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4} f(z) dz \Rightarrow$$

$$Y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = 1. \quad \text{Tak } (**) \text{ platí}$$

Pro (*) použijeme vztahy pro aditivní F.T. na $\mathbb{R}^d$ s důkazem:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[f\left(\frac{x}{\beta}\right)\right](s) = \beta^d \mathcal{F}^{-1}[f](\beta s)$$

obdobně

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{\lambda |x|^2}{2}}\right](s) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{|x|^2}{2\lambda}}\right](s) = \left(\frac{d}{2\lambda}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2 |s|^2}{2\lambda}}$$

Předchozí příklad říká, že funkce $e^{-\pi|x|^2}$ je invariantní vůči Fourierově transformaci a také, že má nekonečný plošný integrál. Funkce $e^{-\pi|x|^2}$ nemá kompaktní nosič, ale klesá nuly rychle k ∞ .

Definice Řekneme, že $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ je rychle klesající po $x \rightarrow \infty$ $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists M_n > 0$ tak, že $|f(x)| \leq M_n |x|^{-n}$

Ekvivalentně ke tomu, že f je rychle klesající po $x \rightarrow \infty$ jsou i tyto podmínky: $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)f(x) = 0$ pro libovolný polynom.

Definice (Schwartzův prostor $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).

$\mathcal{S} := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) ; f \text{ a všechny její derivace jsou rychle klesající} \}$.

Protože $e^{-\pi|x|^2} \in \mathcal{S}$, ale nemá kompaktní nosič ($\text{supp } e^{-\pi|x|^2} = \mathbb{R}^d$), tak $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Nyní si ukažme, že $\mathcal{S}$ má spoustu užitečných vlastností, které např. prostor L^1 nemá.

Vlastnosti $\mathcal{S}$

	VLASTNOST	MATEMATICKÝ ZÁPIS	L^1 ANO NE?
①	$\mathcal{S}$ je vektorový prostor	$f, g \in \mathcal{S}, \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha f + g \in \mathcal{S}$	✓
②	$\mathcal{S}$ je algebra	$f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow fg \in \mathcal{S}$	✗
③	$\mathcal{S}$ je uzavřený na násobení polynomy	$f \in \mathcal{S}, p \in \mathcal{P} \Rightarrow pf \in \mathcal{S}$	✗
④	$\mathcal{S}$ je uzavřený po derivaci	$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ multiindex $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ $f \in \mathcal{S} \Rightarrow D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} f \in \mathcal{S}$	✗
⑤	$\mathcal{S}$ je uzavřený na konjugaci a násobení $e^{ix \cdot s}$	$f \in \mathcal{S} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{S}, e^{ix \cdot s} f \in \mathcal{S}$	✓
⑥	$\mathcal{S}$ je ... podmnožinou integrovatelných funkcí	$f \in \mathcal{S} \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pro $\forall p \in [1, \infty]$	částečně $L^1 \not\subset L^p$ $L^p \not\subset L^1$ $p > 1$

POZOR! JSEM NA NEODPRAVDĚNÉ FUNKČINĚ

Vlastnosti ① - ⑤ is overité semi. Ukážeme, $\tilde{u}$:

$$\mathcal{G} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$$

Pond' $f \in \mathcal{G}$, pal $\exists M_{d+1} > 0$ tal, $|f(x)| \leq \frac{M_{d+1}}{|x|^{d+1}}$. d
 $\exists R \gg 1$ $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus B_R(0)$

$$\text{Tedy } \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx = \int_{B_R(0)} |f(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} |f(x)| dx$$

$$\leq \underbrace{\sup_{x \in B_R(0)} |f(x)| |B_R(0)|}_{< +\infty} + M_{d+1} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} \frac{dx}{|x|^{d+1}}$$

subst: zobecní sférické int.

$$\lesssim \int_R^\infty \frac{r^{d-1}}{r^{d+1}} dr \leq \frac{\tilde{C}}{R} < +\infty,$$

což jsme chtěli ukázat.

Z posledních vlastností plyne, že vše o vlastnostech Fourierovy transformace na L^1 platí i po Fourierovské transformaci na $\mathcal{G}$. Mimochodem máme

$$\boxed{f, g \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)}$$

Přestože $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f)](s) = \mathcal{F}[\mathcal{F}(f)](-s)$, tak také platí

$$\mathcal{F}^{-1}(f) \mathcal{F}^{-1}(g) = \mathcal{F}^{-1}(f * g)$$

Substitucí $f = \mathcal{F}(f)$ a $g = \mathcal{F}(g)$ dostaneme (za předpokladu, že platí Fourierovská inverzní vztahy)

$$f \cdot g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)).$$

Aplikujeme-li na tuto rovnici Fourierovskou transformaci, dostaneme

$$\boxed{\mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]}$$

Tedy, za předpokladu, že na $\mathcal{G}$ platí Fourierovská inverzní vztahy (což očišťujeme), dostaneme

- Fourierova transformace komutuje ji součin Fourierových transformací.
- Fourierova - - - součinu ji komutuje Four. transformací.

Následující tvrzení ilustrují jednu z klíčových vlastností Fourierovy transformace, opět ve dvou tvarech:

- Fourierova transformace derivace je "polynomiální" násobek Fourierovy transformace.
- Fourierova transf. "polynomiální násobek fce" je derivace Fourierovy transf.

Věta 16.3 (a) $\forall f \in \mathcal{S}$ platí

- $\widehat{D^\alpha f}(s) = (i2\pi s)^\alpha \hat{f}(s)$
- $\widehat{(-i2\pi x)^\alpha f(x)}(s) = D^\alpha \hat{f}(s)$

$(f, s) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}$ a $\mathcal{S}^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$

(Dě) **Ad (a)** Provedeme pro $\alpha = (0, \dots, 1, \dots)$
 $\uparrow$
 j -tý index

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right](s) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx$$

$$x \cdot s = \underbrace{x_1 s_1 + \dots + x_d s_d}_{\hat{x} \cdot \hat{s}} + x_j s_j = \hat{x} \cdot \hat{s} + x_j s_j$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{(-2\pi i x_j s_j - 2\pi i \hat{x} \cdot \hat{s})} dx_j \right) e^{-2\pi i \hat{x} \cdot \hat{s}} d\hat{x}$$

per partes - zde využíváme, že $f \in \mathcal{S}$

$$= 2\pi i s_j \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x_j s_j - 2\pi i \hat{x} \cdot \hat{s}} dx_j \right) e^{-2\pi i \hat{x} \cdot \hat{s}} d\hat{x} = 2\pi i s_j \mathcal{F}[f](s)$$

Dále

$$\mathcal{F}[-2\pi i x_j f(x)](s) = - \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi i x_j f(x) e^{-2\pi i x \cdot s}) dx = \frac{\partial}{\partial s_j} (e^{i x \cdot s})$$

zároveň integrujeme a derivace

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx \right) = \frac{\partial}{\partial s_j} \mathcal{F}[f](s)$$

Ad (b) Připomeň $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d); \sup |x^\beta D^\alpha f(x)| < +\infty \text{ pro libovolné multiindexy } \alpha \text{ a } \beta\}$.

- Protože $D^\alpha \hat{f}(s) = (-i2\pi x)^\alpha \hat{f}(x)(s)$ a $(2\pi i x)^\alpha f(x) \in \mathcal{S}$ a Fourierova transformace fukcí z $\mathcal{S}$ je lineární, tak $D^\alpha \hat{f}(s) < \infty$ pro $\forall \alpha$ a navíc je spojitá dle věty o spojitosti takových integrálů závislých na parametrech. Tj. $\forall \alpha \ D^\alpha \hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$.
- Chceme ukázat, že $\forall$ polynom p a $\forall \alpha$: $\sup_s |p(s) D^\alpha \hat{f}(s)| < \infty$ stačí $\sup_s |s^\beta \hat{f}(s)| < \infty$. Dle části (a), však tvrzení plyne ze skutečnosti, že $D^\beta f \in \mathcal{S}$.



Škriťme si rôzne vlastnosti Fourierovej transformácie do nasledujúcej tabuľky

Funícia f (x)	Fourierova transformácia $\hat{f}$ (s)
$f(x)$	$\hat{f}(s)$
$\sigma_y f(x) := f(x+y)$	$e^{2\pi i y \cdot s} \hat{f}(s)$
$e^{2\pi i x \cdot y} f(x)$	$\hat{f}(s+y) = \sigma_y \hat{f}(s)$
$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$	$2\pi i s_k \hat{f}(s)$
$-2\pi i x_k f(x)$	$\frac{\partial}{\partial s_k} \hat{f}(s)$
$p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) f(x)$	$p(2\pi i s_k) \hat{f}(s)$
$p(-2\pi i x_k) f(x)$	$p\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \hat{f}(s)$
$(f * g)(x)$	$\hat{f}(s) \hat{g}(s)$
$f(x) g(x)$	$(\hat{f} * \hat{g})(s)$

Ľahko vidieť, že existuje symetria operácií a Fourierovej transformácie.

$$\hat{f}(s) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx$$

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_d) \\ s &= (s_1, \dots, s_d) \\ dx &= (dx_1, \dots, dx_d) \end{aligned}$$

$$p(y) := a_0 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1d}y_d + a_{21}y_1^2 + a_{212}y_1y_2 + \dots$$

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right) := a_0 + a_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + a_{12}\frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + a_{1d}\frac{\partial}{\partial x_d} + a_{211}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a_{212}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + \dots$$

► Rěšení Cauchyho úlohy pro obecnou nehomogenní par vedení tepla

Uvažujme lineární evoluční PDR $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ v celém prostoru $\mathbb{R}^d$.
Cílem je nalézt řešení tzv. Cauchyho úlohy, tedy hledat řešení rovnice v celém prostoru $\mathbb{R}^d$ s danými počátečními podmínkami v čase $t=0$. Tedy

Cauchyho úloha pro rovnici vedení tepla

nalézt $u: (0, T) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$(T) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{v } (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{v } \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

kde $f: (0, T) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ a $u_0: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ jsou data problému, když daní libovolně.

Úloha (T) je lineární (Proč?) a lze ji přislat k rovnici bilance energie v termodynamice kontinua:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + v \cdot \nabla e = \Pi \cdot \left(\frac{\nabla v + (\nabla v)^T}{2} \right) - \operatorname{div} \vec{q} + r$$

Na předpokladech, že těleso je v klidu a tak rychlost $\vec{v} = 0$ a vnitřní energie e je úměrná teplotě u (tj. $e = c_v u$, kde c_v je měrné teplo při konstantním objemu) a teplotní tok $\vec{q}$ je nepřímým úměrným gradientu teploty (tj. $\vec{q} = -k \nabla u$, kde $k > 0$ je koeficient tepelné vodivosti)

Pak
$$c_v \frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = r,$$

kde r je daný objemový zdroj (radiace). [Symbol Π uvedený výše představuje tenzor napětí.]

Předpokládáme, že pro $\forall \sigma > 0$ je $f(\sigma, \cdot) \in \mathcal{G}$ a také $u_0 \in \mathcal{G}$. Hledáme řešení splňující (T) tak, aby $u(t, \cdot) \in \mathcal{G}$ pro $t > 0$.

Rěšení budeme hledat tak, že na rovnici vedení tepla aplikujeme Four. transformaci, tj. násobíme rovnici $e^{-2\pi i x \cdot s}$ integrujeme přes $\mathbb{R}^d$ vzhledem k x . Důležité: (čas t je nyní pro nás parametr.)

Pro (*) přepíšeme do tvaru

$$(*)_{\text{mod}} \quad \hat{u}(t,s) = \hat{u}_0(s) \hat{G}_t(x)(s) + \int_0^t \hat{f}_\tau(s) \hat{G}_{t-\tau}(s) d\tau$$

z věty 1.2 (ii), pro (*) mod přepíšeme do tvaru

$$\hat{u}(t,s) = u_0 * G_t(s) + \int_0^t f(\tau, \cdot) * G_{t-\tau}(\cdot)(s) d\tau$$

Aplikací Inverzní Fourierovy transformace nabudeme

$$(\mathbb{R}) \quad u(t,x) = (u_0 * G_t)(x) + \int_0^t (f(\tau, \cdot) * G_{t-\tau})(x) d\tau$$

což je hledaná řešení pro libovolné u_0 a f .

Dosadíme-li explicitní vzoreček pro G_t , dostaneme

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{d/2}} dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(\tau,y) \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}}}{(4\pi(t-\tau))^{d/2}} dy d\tau$$



Gaussian G_t se také nazývá Fundamentální ř. rovnice uvolněná tepla. Má určité význačné vlastnosti (viz následující) Lemma a ř. $\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \right] \rightarrow u(0, \cdot) = \delta_0$ je ř. vidíme potvrdit. Dávová distribuce v pod.

Lemma (Důležité vlastnosti Gaussianu G_t)

$$(1) \quad \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[G_t]] = G_t$$

$$(2) \quad G_t \geq 0$$

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(x) dx = 1$$

(rozdělení 1)

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} G_t(x) = 0 \text{ if } x \neq 0$$

(konvergence je stejnoměrná na $|x| \geq \varepsilon$ pro $\forall \varepsilon > 0$)

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} G_t * u_0 = u_0$$

(NABÝVÁNÍ POČ. PODMÍNĚK REŠENTM $(\mathbb{R}^*)$)

(Dě) (1) - (4) si provede sám pomocí Pr. 3, školování.

[Ad (5)] Platí

$$(G_t * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy = \frac{1}{(\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} u_0(x + \sqrt{t}z) dz$$

Záměnou $\lim_{t \rightarrow 0}$ a $\int_{\mathbb{R}^d}$, pomocí Lebesgueovy věty, dostáváme tvrzení. $\square$

Věta 16.4 (Schwartzova - Laurent Schwartz - Francouzský mat. 20. století)

$\mathcal{F}: \mathcal{S} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{S}$ a $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{S}$ a platí $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2 = \|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_2$

De Tvrzení dále platí, že overline plocha Fourierova umělého vzorečku.

Dělat uelre provést přímo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(s) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i s \cdot y} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i (x-s) \cdot y} dx dy = f(s) \quad \int_{\mathbb{R}^d} dy = +\infty. \end{aligned}$$

všechny x, y nemějí jin pro $x=s$

Využijeme vsk vlnovky G_t .

Bud $f \in \mathcal{S}$ libovolné. Definujeme $H_t(x) := (G_t * f)(x)$.

Pať $\hat{H}_t(s) = \hat{G}_t(s) \hat{f}(s)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\hat{H}_t(s)](x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot s} \hat{H}_t(s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot s} \hat{G}_t(s) \hat{f}(s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot s} \hat{G}_t(s) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i y \cdot s} dy \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} \hat{G}_t(s) e^{2\pi i s \cdot (x-y)} ds dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \hat{G}_t(s) e^{2\pi i s \cdot (x-y)} ds}_{\mathcal{F}^{-1}[\hat{G}_t]}(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) G_t(x-y) dy \stackrel{\text{Lemma (1)}}{=} (f * G_t)(x) \end{aligned}$$

z něj o rovnosti

$$\|f * G_t\|_1 \leq \|f\|_1 \|G_t\|_1$$

Tedy $\lim_{t \rightarrow 0} f * G_t = f$

Nalevo vsk máme

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \mathcal{F}^{-1}(\hat{H}_t(s))(x) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \mathcal{F}^{-1}(\hat{G}_t(s) \hat{f}(s))(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left(\lim_{t \rightarrow 0+} \hat{G}_t(s) \hat{f}(s) \right)(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(s))(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f)](x) \end{aligned}$$

$\lim_{t \rightarrow 0+} f * G_t(s)$

Zbyvá dovést platnost Parsevalovyho rovnosti. Bud' $f, g \in \mathcal{S}$,
 pak dle definice

$$\begin{aligned} \underline{(\hat{f}, \hat{g})_{L^2(\mathbb{R}^d)}} &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s) \overline{\hat{g}(s)} ds = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s) \overline{\int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s) \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)} e^{2\pi i x \cdot s} dx ds \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s) \overline{g(x)} e^{2\pi i x \cdot s} dx ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(s) e^{2\pi i x \cdot s} ds \right) \overline{g(x)} dx$$

$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\hat{f}]](x)$, což se dle dočítaného
 Fournierovy věty rovná $f(x)$
 invariance

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$= \underline{(\hat{f}, \hat{g})_{L^2(\mathbb{R}^d)}}$$

$$\text{Tedy } \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad (\star)$$

$$\text{Nechť } g \in \mathcal{S} \text{ a } \check{g} =: h, \text{ kde } h = g \text{ a dle } (\star)$$

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\check{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

vi
 h
 h
 h

$$\text{Ověříme, že výše, že } \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{F}^{-1}(\hat{G}_t(s) \hat{f}(s)) = \mathcal{F}^{-1}(\lim_{t \rightarrow 0} \hat{G}_t(s) \hat{f}(s)).$$

Naše věta

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{G}_t(s) \hat{f}(s))^{(y)} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i y \cdot t} \hat{f}(y) e^{2\pi i y \cdot s} dy =: I$$

$$\text{a } |I| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(y)| dy < \infty \quad \text{neboť } f \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S} \text{ dle věty 1.3 (b).}$$

$$\text{a } \mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$$

Tedy dle Lebesgueovy věty můžeme zaměnit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{ a } \mathcal{F}^{-1}.$$

Důkaz věty 16.4 je úplný. $\square$

Poslední část první kapitoly věnujeme potvrdění Fourierovy transformace z $\mathcal{S}$ na L^2 . Ukážem, bude Parsevalova rovnost dostávat ve větě 1.5, která platí pro funkce z $\mathcal{S}$ a hustota $\mathcal{S}$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$.

ÚMLUVA : v následující části

zadáme $\hat{f}$ značí Fourierov transform. pro $f \in \mathcal{S}$
 $\mathcal{F}[f] \mapsto \text{---} \mapsto \text{---}$ pro $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Tu teď budeme konstruovat. Potom,

$\mathcal{F}[f]$ pro $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ NEJ dána integrálem
 $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix \cdot s} dx$

Konstrukce [křížkový matematický postup.]

- ① Protože $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ jsou husté v $L^2(\mathbb{R}^d)$ a
 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, tak
 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ jsou husté v $L^2(\mathbb{R}^d)$

Pro $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tak $\exists \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ tak, u
 $f_n \rightarrow f$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$ tm. $\|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0$

Je-li $\{f_n\}$ konvergentní, je Cauchyovská. Tedy ($\forall \varepsilon > 0$)
od jistého n_0 $\|f_n - f_m\|_{L^2} < \varepsilon$ pro všechna $n, m \geq n_0$

- ② Aplikujeme-li Parsevalovu rovnost A věty 1.5
na $f_n - f_m \in \mathcal{S}$ dostáváme

$$\|f_n - f_m\|_{L^2} = \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{L^2} = \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{L^2}$$

Z Cauchyovskosti $\{\hat{f}_n\}$ a A křivky identity plyne,
že $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou Cauchyovské.

Mají tedy limitu (nebo L^2 je úplný) a tyto
limity jsou hledané Fourierovy transformace:

$$\mathcal{F}[f] \stackrel{\text{def}}{=} \lim \{\hat{f}_n\} \quad \text{a} \quad \mathcal{F}^{-1}[f] \stackrel{\text{def}}{=} \lim \{\hat{f}_n\}$$

Věta 16.6 (Vlastnosti Fourierovy transformace na $L^2(\mathbb{R}^d)$)

- (1) Je-li $f \in L^2$, pak $\mathcal{F}[f]$ existuje na volbě $\{f_n\}_{n=1}^\infty$
- (2) $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ jsou invertivní, tzn. $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$ pro $\forall f \in L^2$
- (3) Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, pak $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$ s.v. v $\mathbb{R}^d$
- (4) Je-li $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a $\hat{f}_n(s) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx$,
 $\mathcal{B}_n(0) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$

pak $\mathcal{F}[f](s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n(s)$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$

[toto je úvod, jak pochopit Four. transformaci pro $f \in L^2$].

- (5) $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ je izometrie: $\|\mathcal{F}[f]\|_2 = \|f\|_2$.

Dě **Ad (1)** Uvažujme dvě různé posloupnosti $\{f_n^1\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{Y}$ a $\{f_n^2\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{Y}$ konvergující k $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Pak však $f_n^1 - f_n^2 \rightarrow 0$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$.
 Dle níže, u prvky $h \in \mathcal{Y}$ splňující:

$$\|h\|_2 = \|\hat{h}\|_2 = \|h^\vee\|_2 \quad \text{a} \quad (\hat{h})^\vee = h.$$

(dle Schwarzovy věty).

Tedy $\|f_n^1 - f_n^2\|_2 = \|\hat{f}_n^1 - \hat{f}_n^2\|_2 = \|\hat{f}_n^1 - \hat{f}_n^2\|_2$.

Protože máme dvě konvergující řady, tak vidíme, že $\hat{f}_n^1$ a $\hat{f}_n^2$ (a $\hat{f}_n^1$ a $\hat{f}_n^2$) dávají stejnou limitu a to $\mathcal{F}[f]$ (resp. $\mathcal{F}^{-1}[f]$).

Ad (2) Bud $\{f_n\} \subset \mathcal{Y}$ takové, že $f_n \rightarrow f$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pak $\hat{f}_n \rightarrow \mathcal{F}[f] \in L^2(\mathbb{R}^d)$

Víme, že $g_n := \hat{f}_n \rightarrow \mathcal{F}[f] =: g \in L^2$ a $\{g_n\} \subset \mathcal{Y}$

Tedy $\tilde{g}_n \rightarrow \mathcal{F}^{-1}[g]$. Avšak tzn. $f_n \rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] \in L^2$.

Protože $f_n \rightarrow f$ v L^2 tak musí platit $f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$.

Ad (3) Je-li $f \in L^1 \cap L^2$, pak $\exists \{f_n\} \subset \mathcal{Y}$ tak, že $f_n \rightarrow f$ v L^1 a $f_n \rightarrow f$ v L^2

a $\hat{f}_n(s) = \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx$ (*)

Protože $f_n \rightarrow f$ v L^1 , tak $\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx$

[Schlechte] $\left| \int_{\mathbb{R}^d} (f_n - f)(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_n - f|(x) dx \leq \|f_n - f\|_1$

Problém $f \mapsto \hat{f} \in L^2$, tak $\hat{\hat{f}} \rightarrow \mathcal{F}[f] \in L^2$
 a dle Rieszovy věty existuje vybraný podprostor $\hat{f} \mapsto \hat{\hat{f}}$
 tak, že $\hat{\hat{f}} \rightarrow \mathcal{F}[f]$ s.v. v $\mathbb{R}^d$.

Tvrzení: Píše A lineárního přechodu v (3) aplikovaného
 na f^m .

Ad (5) Isometrie Fourierovy transformace píše R
 rozšířením vlastnosti Parsevalovy / Plancherovy rovnice
 z $\mathcal{S}$ na L^2 , viz bod (2).

Ad (4) Bude $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a omezení $f_m := f \chi_{B(0,m)}$.

Pak stejně $f_m \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a $f_m \rightarrow f$ v $L^2(\mathbb{R}^d)$,
 což znamená, že $\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_m|^2 \rightarrow 0$ pro $m \rightarrow \infty$.

Dále $\mathcal{F}[f_m] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dle (3)}}}{=} \hat{f}_m$ s.v. a $\mathcal{F}[f_m] \rightarrow \mathcal{F}[f] \in L^2(\mathbb{R}^d)$
 díky rozšíření vlasti
 Parsevalovy rovnice
 pro funkce v $L^2(\mathbb{R}^d)$.

DODATEK Vlastnosti $\hat{f}$ na $L^1(\mathbb{R}^d)$ 

Platí následující tvrzení, která nebudeme dokazovat.

Tvrzení 1 Bude $f \in L^1(\mathbb{R})$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že

(i) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x) = f(x_0 \pm)$

(ii) $\exists \delta > 0 \exists M \quad |f(x) - f(x_0 +)| \leq M|x - x_0| \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$
 $|f(x) - f(x_0 -)| \leq M|x - x_0| \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

Potom $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 +) + f(x_0 -)]$

Tvrzení 2 Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]] = f$.

Důsledek Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{F}[f] = 0$ s.v. $\Rightarrow f = 0$ s.v.

a
 $\mathcal{F}: L^1 \rightarrow$ "prostor funkcí s $\mathcal{F}[f] \in L^1$ " je jisté zobrazení.

Důkaz Fúrtzéní 2 provedeme pomocí Lemmatu

Lemma Necht $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ splní $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx = 0$
 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Pak $f = 0$ s.v. v $\mathbb{R}^d$.

—
 Necht $f, \mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Protož $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tak
 $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) \varphi(x) dx < \infty$
 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Namc:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[f](y) e^{2\pi i y \cdot x} \varphi(x) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[f](y) \mathcal{F}^{-1}[\varphi](y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} \mathcal{F}^{-1}[\varphi](y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]](x) dx \end{aligned}$$

Aniž $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a když $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a po tak φ
 je to inverzní Fourierův vztah, tj.

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]](x) = \varphi(x).$$

Tedy $\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) - f(x)) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),$

což dle Lemmy dává tuzeš.

□

17. TEORIE DISTRIBUCÍ

Na konci 20. let minulého století Paul Dirac zavedl, při bádání v oblasti kvantové mechaniky, tzv. δ -funkci, která má tyto vlastnosti:

(D1) • $\delta(x) = 0$ pro $x \neq 0$

(D2) • $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$ pro libovolnou spjatou fci φ .

Víme a podle Lebesgueova integrálu, že δ nemůže být (lokalně) integrovatelná funkce, neboť z druhé podmínky pro $\varphi \equiv 1$ plyne

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx,$$

přičemž z první podmínky plyne

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 0.$$

Trvalo několik let než se matematici podařilo najít přístup, který dá δ -funkci, vnímané jako lineární svojí funkcional definovanou na prostoru hladkých funkcí, přesný matematický význam.

Matematická teorie, která na tyto otázky odpovídá, se nazývá teorie distribucí.

(K. SYMBOLICKÉ)

17.1. FUNKCE A ZOBECNĚNÉ FUNKCE (NEBOLI DISTRIBUTUCE)

Distribuce zobecníjí pojem funkce tak, abychom mohli 'dobře' matematicky popsat pojem jako hustota bodu, hustota bodových nábojů či dipólů, intenzita bodových zdrojů, velikost okamžité síly působící v bodě.

Distribuce také zachycují skutečnost, že se skutečnost je těžší obtížně měřit např. teplotu v bodě a spíše měříme průměrné hodnoty v okolí a tak hodnotu v bodě pak poskládáme lineárně průměry.

Teorie distribucí byla vyvinuta Laurentem Schwartzem (Francie) a S.L. Sobolevem (SSSR). Pokusme se motivovat tuto teorii snahou porozumět významu distribuce náboje. Inženýři a fyzici vždy využívali různé typy distribuce náboje: bodový zdroj (náboj), střívkový náboj, plošný náboj, objemový náboj, bodový dipól, plošný vrstva dipólů, atd. Pokusme se dát tímto termínem přesnější matematický význam.

Jak můžeme rozpoznat jaký druh distribuce náboje máme? (typ)
Jediné možnosti je provedení experiment, který měří náboj. Půtón používáme antény, které nám zobrazí jakýsi průměr náboje v oblasti. Velikost obvodu zohlední se kvalitou instrumentu (měřicího aparátu). Pokud chceme měřit bodový náboj, musíme mít antény, které je schopné měřit náboj ve stále menší a menší oblasti obsahující bod našeho zájmu. I když podobně lze uvažovat i o kavitěch a i polích uvažujeme náboje, který by mohl náboj přenést v bodě.

Tuto situaci lze popsat matematicky takto:
bude φ měřicí aparát a $Q(\varphi)$ hodnota náboje daná
tímto aparát φ .

Například, pokud existují objemová hustota náboje $\rho = \rho(x)$,
($\rho \in L^1$) pak $Q(\varphi) := \int \rho(x) \varphi(x) dx$

$$\text{Zřejmě } Q(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 Q(\varphi_1) + \alpha_2 Q(\varphi_2) \\ \text{pro } \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \\ \forall \varphi_1, \varphi_2$$

neboli Q je lineární funkcionál
na množině měřicích aparátů

Prvky φ (dopad měřicí funkce) budeme nazývat testovací funkce. lze uvažovat spoustu variant pro prvky testovacích funkcí; už zavedeme $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Lineární spojité funkcionály na $\mathcal{D}(\Omega)$, viz funkcionál máboji $\mathbb{Q}$ výše, pak budeme nazývat distribuce či zobecněné nebo symbolické funkce.

Důvodů proč budeme pracovat s $\mathcal{D}$ či $\mathcal{S}$ je několik. Matematika:
 • funkcionály na těchto prostorech budou mít dobré konvergenční vlastnosti
 • třída distribučních bodů "veliká"

Fyzika:
 • měřicí funkce (testovací funkce) je efektivní v místě měření a daleko od něj jsou hodnoty pokleslé.

Definice $\mathcal{D}(\Omega)$ Bude $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená. Řekneme, že $\varphi_k \rightarrow \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, píšeme $\boxed{\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ v } \mathcal{D}}$, pokud $\exists K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní tak, že:

- $\text{supp } \varphi_k \subset K$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $\text{supp } \varphi \subset K$
- $\varphi_k \Rightarrow \varphi$ v K a také $D^\alpha \varphi_k \Rightarrow D^\alpha \varphi$ v K pro každý multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

Připomeň: • $\text{supp } \varphi := \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}$ (málokter množiny bodů, kde je φ nenulová).

$$D^\alpha \varphi(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d), \alpha_i \in \mathbb{N}_0, |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$$

Definice (DISTRIBUTICE) DISTRIBUTICE nebo ZOBECNĚNÁ FUNKCE nebo SYMBOLICKÁ FUNKCE je funkcionál T na $\mathcal{D}(\Omega)$, který je lineární a spojitý, tzn.: $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$)

splňuje

- 1) $T(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2)$
LINEARITA pro každé $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$
- 2) $T(\varphi_k) \rightarrow 0$ pokud $\varphi_k \rightarrow 0$ v $\mathcal{D}$
SPLOITNOST

Potvorování Všimněme si, že A vlastnosti 1) a 2) plyne tvrzení:

Předpoklad $\varphi_k \rightarrow \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, pak $T(\varphi_k) \rightarrow T(\varphi)$.

① Označme $\psi_k := \varphi_k - \varphi$. Pak $\psi_k \rightarrow 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ dle předpokladu.

Z vlastnosti 2) plyne $T(\psi_k) \rightarrow 0$, což znamená $T(\varphi_k - \varphi) \rightarrow 0$.

Z vlastnosti 1) pak máme $T(\varphi_k) - T(\varphi) \rightarrow 0$ nebo $T(\varphi_k) \rightarrow T(\varphi)$.

POUŠTĚNÍ: U lineárních funkcionálů stačí zkontrolovat spojitost v 0.

Označení

- $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\Omega)$ je množina všech spojitých lineárních funkcionálů na $\mathcal{D}(\Omega)$.
je množina všech distribucí

- Temperované distribuce = spojitě lineární funkcionály na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
 $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ je množina všech temperovaných distribucí

PŘÍKLADY ① Integrovalelné funkce jsou distribuce. Buď $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

teh. $f \in L^1(K)$ pro každý kompaktní $K \subset \Omega$.

Definujeme $T(f) := \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$ pro libovolné $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Ukážeme, že T je distribuce. φ má nosič v nějakém K

a) $T(f) < \infty$ pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ neboť $\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = \int_K f(x) \varphi(x) dx$
 $\leq \max_{x \in \Omega} |\varphi(x)| \int_K |f(x)| dx < \infty$

b) T je lineární. $T(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \int_{\Omega} f(x) [\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x)] dx$
 $\xrightarrow{\text{lineární integrál}} \alpha_1 \int_{\Omega} f(x) \varphi_1(x) dx + \alpha_2 \int_{\Omega} f(x) \varphi_2(x) dx$
 $= \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2)$

c) T je spojitá. Buď $\varphi_k \rightarrow 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ libovolně. Pak existuje $K \subset \Omega$ kompaktní tak, že $\varphi_k \Rightarrow 0$ v K
 teh. $\sup_{x \in \Omega} |\varphi_k(x)| \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$.

Pak $|T(\varphi_k)| = \left| \int_{\Omega} f(x) \varphi_k(x) dx \right| = \left| \int_K f(x) \varphi_k(x) dx \right| \leq$

$$\int_K |f(x)| |\varphi_n(x)| dx \leq \underbrace{\sup_{x \in K} |\varphi_n(x)|}_{\downarrow 0} \underbrace{\int_K |f(x)| dx}_{< +\infty} \rightarrow 0.$$

Definice Distribuce T , kterou lze popsat ve tvaru $\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$,
tzn.

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

přičemž $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, nazýváme regulární distribuce.

Př. (2) Diracova distribuce Budeť $a \in \Omega$. Otáčíme δ_a funkcionál
na $\mathcal{D}(\Omega)$ definovaný $\delta_a(\varphi) := \varphi(a)$.
Speciálně $\delta(\varphi) := \delta_0(\varphi)$.

Ukažme, že δ_a je distribuce.

a) $\delta_a(\varphi) = \varphi(a) < \infty$ pro libovolné $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

b) lineární. $\delta_a(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = (\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x)) \Big|_{x=a}$
 $= \alpha_1 \varphi_1(a) + \alpha_2 \varphi_2(a) = \alpha_1 \delta_a(\varphi_1) + \alpha_2 \delta_a(\varphi_2)$.

c) spojitost. Budeť $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ libovolná
splňující $\varphi_k \rightarrow 0$ v $\mathcal{D}$,
pak speciálně
 $\varphi_k(a) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$

$$\text{tedy} \quad \delta_a(\varphi_k) = \varphi_k(a) \rightarrow 0.$$

Př. (3) Funkce, jejíž má integral ve smyslu hlavní hodnoty, jsou distribuce.

Lze definovat v.p. $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} dx$ podle v.p. $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} dx = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{x} dx \right]$

Vidíme, že zatímco $\frac{1}{x} \notin L^1(\mathbb{R})$, tak $\frac{1}{x}$ má integral ve smyslu hlavní hodnoty a platí

$$(*) \quad \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x| \right]_{-R}^{-\varepsilon} + \left[\ln|x| \right]_{\varepsilon}^R = 0$$

v.p. je zkratka francouzského „valeur principale“; někdy se používá také PV pro anglické „principal value“, či **p.v.** místo **v.p.**

Definujeme funkcionál $Tv.p. \frac{1}{x}$ následně

$$Tv.p. \frac{1}{x}(\varphi) := v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ukážeme, že $Tv.p. \frac{1}{x}(\varphi)$ je distribuční.

$$1) \boxed{|Tv.p. \frac{1}{x}(\varphi)| < \infty \text{ pro } \forall \varphi}$$

(Dě)

$$\begin{aligned} v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-K}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^K \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-K}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^K \frac{\varphi(0)}{x} dx \right] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-K}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \right] \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^K \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \right] \end{aligned}$$

$$=: I_1 + I_2 + I_3.$$

První člen I_1 je roven 0, dle (x), viz str 3/5 dle.

Dle Taylorova polynomu s Lagrangeovým zbytkem:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi'(\xi_x) \quad \text{kde } \xi_x \in (x, 0)$$

$$\text{tedy } |I_2| \leq \max_{\xi \in [-K, 0]} |\varphi'(\xi)| K < \infty$$

Člen $I_3 < \infty$ s použitím stejného argumentu

2) Linearity $Tv.p. \frac{1}{x}(\varphi)$ plyne z linearity $\int \dots dx$.

3) Spojitel Nechť $\varphi_k \rightarrow 0$ v $\mathcal{D}$. Specificky

$$\varphi_k \rightarrow 0 \text{ a } \varphi_k' \rightarrow 0 \text{ na jistém } [-K, K] \quad k \in (0, \infty)$$

Pak, podobně jako v 1), máme

$$\begin{aligned} Tv.p. \frac{1}{x}(\varphi_k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-K}^{-\varepsilon} \frac{\varphi_k(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^K \frac{\varphi_k(0)}{x} dx \right] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-K}^{\varepsilon} \frac{\varphi_k'(\xi_x)}{x} dx \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^K \frac{\varphi_k'(\xi_x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Opět, první člen je nulový a zbylí dva oddělně jdou k 0,

2K $\max_{s \in [-k, k]} |\varphi_k'(s)|$, který konverguje k 0, neboť

$$\varphi_k' \rightarrow 0 \text{ v } [-K, K].$$

□

Zavedi jme pojem distribúcie a ukázať, že Diracova δ -funkcia je vlastne špeciálny lineárny funkcionál na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ či $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.
Máme viac lípe motivovať vlastnosť (D2) δ -funkcie?
Poznaťme sa o to?

Z úvodu do variačného počtu vieme, že úskal podmienka existence minimálneho riešenia obmedzených nelineárných funkcionálov Φ je charakterizovaná podmienkou $g'(0) = 0$, kde $g(t) := \Phi(u + t\varphi)$.

Vieme teda, že v prípade, kedy

$$(VarP) \quad \Phi(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(x)|^2 dx - \int_{\Omega} f(x) u(x) dx,$$

podmienka

$$g'(0) = 0$$

implikuje

(E-L)_{PDR}

$$\int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx - \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0$$

Ω kľučí ploš' po $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

[Proveďte!]

Zde $a: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ je vhodná daná funkcia, máme byť kladná, ale také je omešenie a mätvkeho.

Ukázať jme si, že na predpoklade, že f, a, u jme kladné, (E-R)_{PDR} implikuje

$$(E-L)_{PDR} \quad \boxed{-\operatorname{div}(a(x) \nabla u) = f \quad \text{v } \Omega}$$

Soustředíme se nyní jen na druhý člen v (E-L)_{PDR} i j.

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \text{kde } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Zkusme spočítat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k(x) \varphi(x) dx$$

$$\text{po } f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{|B_k(0)|} & \text{pro } x \in B_k(0) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

(mimo 1-koule v $\mathbb{R}^d$)
 $x \in B_k(0)$

Pať $\int_{\Omega} f_k(x) dx = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. (Připokládáme, že $B_k(0) \subset \Omega$).

po libovolné pevné $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,
 Natic,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_R(x) \varphi(x) dx &= \frac{1}{|B_{\frac{1}{R}}(0)|} \int_{B_{\frac{1}{R}}(0)} \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{|B_{\frac{1}{R}}(0)|} \int_{B_{\frac{1}{R}}(0)} \varphi(0) dx + \underbrace{\frac{1}{|B_{\frac{1}{R}}(0)|} \int_{B_{\frac{1}{R}}(0)} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx}_I \\ &= \varphi(0) + I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \quad |I| &\leq \frac{1}{|B_{\frac{1}{R}}(0)|} \int_{B_{\frac{1}{R}}(0)} |\nabla \varphi(\xi_x) \cdot (x-0)| \leq \max_{s \in \overline{B_1(0)}} |\nabla \varphi(s)| \int_{B_{\frac{1}{R}}(0)} \frac{|x|}{|B_{\frac{1}{R}}(0)|} dx \\ &\leq \frac{1}{R} \max_{x \in \overline{B_1(0)}} |\nabla \varphi(x)| \rightarrow 0 \text{ po } R \rightarrow \infty. \\ &\quad \downarrow \\ &\quad 0 \end{aligned}$$

Tedy $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_R(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$

Nyní jsme nejen motivovali podmínku (D2) ze strany 3/1, ale také jsme ukázali, že f_R vnímáme jako regulární distribuce T_{f_R} (tzn. $T_{f_R}(\varphi) = \int_{\Omega} f_R(x) \varphi(x)$)

Splňují

$$\boxed{\lim_{R \rightarrow \infty} T_{f_R}(\varphi) = \delta(\varphi) \quad \text{po } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$$

, kde δ je δ -distribuce definovaná v příkladu ②.

Tento limit vztah motivují následující definice.

Definice Budť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $\{T_R\}_{R=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Růžeme, ť T_R konvergují k T slabě (nebo v $\mathcal{D}'$)

potud $\langle T_R, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Růžeme $\sum_{R=1}^{\infty} T_R = T$ v $\mathcal{D}'$ $\Leftrightarrow \sum_{R=1}^{\infty} \langle T_R, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$

17.2 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI DISTRIBUCE (DISTRIBUTIVNÍ POČET)

V této serii se budeme snažit pochopit operace s distribucemi: posunutí, sčítání, derivování, integrování, ...

Distribuce můžeme podělit na regulární a ostatní (singulární). Regulární distribuce jsou takové, které jsou měřeny lokálně integrovatelnými fce:

$$T_f(\varphi) := \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\updownarrow$$

$$f \in L^1_{loc}$$

kde ztotožňují funkce, které n. l. s. na množině m. m. x, neboť jin. pak je každá regulární distribuce určena jednoduše fci $f \in L^1_{loc}$ [přesněji vzhledem k ekvivalenci]. viz uče str. 3/14

Tedy $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$

Také vime

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^1(\Omega) \text{ je hustý v } L^1$$

Máme tedy

$$\boxed{\mathcal{D}(\Omega) \subset L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'(\Omega)}$$

Platí následující věta, kterou lze z předchozích pádků odvozovat.

Tvrzení

Bud' $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pak $\exists \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tak, že $f_n \rightarrow T$ v $\mathcal{D}'$.

Toto tvrzení nám umožňuje vybudovat distributivní počet tak, že nejdříve vprůběhu máme vztahy pro regulární distribuce generované funkcemi z $\mathcal{D}(\Omega)$ a pak provedeme rozšíření těchto vztahů pro libovolné distribuce přes hustotu.

Na ZNÁČENÍ ZÁLEŽÍ. Budeme psát

$$\boxed{\langle T, \varphi \rangle} \text{ místo } \boxed{T(\varphi)}, \text{ kde } T \in \mathcal{D}' \text{ a } \varphi \in \mathcal{D}$$

a také

$$\boxed{\langle f, \varphi \rangle} \text{ místo } \boxed{\langle T_f, \varphi \rangle = T_f(\varphi)} \text{ je-li } f \in L^1_{loc}(\Omega)$$

a T_f je respondující regulární distribuce.

Distributivní počet pro regulární distribuce

- POSUNUTÍ Připomeň, u pro $a \in \mathbb{R}^d$: $\tau_a f(x) := f(x+a)$

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x+a) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \varphi(z-a) dz = \langle f, \tau_{-a} \varphi \rangle$$

Posunutí distribuce o a

$$f \equiv 0 \text{ nüt } \Omega$$

$$\varphi \equiv 0 \text{ nüt } \Omega$$

Posunutí test. fct. o $-a$

- ŠKÁLOVÁNÍ (tj. změna měřítka)

zavedeme pro $\lambda > 0$: $d_\lambda f(x) := f(\lambda x)$

$$\langle d_\lambda f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(\lambda x) \varphi(x) dx = \frac{1}{\lambda^d} \int_{\Omega} f(z) \varphi\left(\frac{z}{\lambda}\right) dz = \frac{1}{\lambda^d} \langle f, d_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \rangle$$

$$z = \lambda x$$

$$dx = \frac{dz}{\lambda^d}$$

- DERIVOVÁNÍ Necht $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ je multi index, a $D_\alpha f$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
všechny derivace vyššího řádu jsou $\in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} D^\alpha f(x) \varphi(x) dx$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \varphi(x) dx$$

$$\text{per partes } \int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

- NÁSOBENÍ (skalární) funkce $m \in C^\infty(\Omega)$

$$\langle m f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} m(x) f(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) m(x) \varphi(x) dx$$

$$= \langle f, m \varphi \rangle$$

Důležité: $m \varphi \in \mathcal{D}!!$

pro $\varphi \in \mathcal{D}$

Příklad m není
veliké měřítka měřit. Uvažme
například $m(x) = \text{sgn } x$,
pak $m \delta$ nelze myslivě definovat
než $\langle m \delta, \varphi \rangle = m(0) \varphi(0)$ a není
konsistentní způsob jak definovat $m(0)$.

Všechny výše uvedené vztahy mají tvar.

$$\text{pro } \sigma f \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle \sigma f, \varphi \rangle = \langle f, \sigma \varphi \rangle \quad \text{pro } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

$$f \in \mathcal{D}(\Omega)$$

zde σ je operátor, který člene rovně - operátor posunutí, škálování,

a S je operátor, který dělá polynomy
všechny $\in C^\infty$ fct.

Je-li $T \in \mathcal{D}'$ takové, že $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ splňuje $f_n \rightarrow T \in \mathcal{D}'(\Omega)$
 pak $\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

neboli:

(★) $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T f_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
 a levou stranu (*) označme $\langle OT, \varphi \rangle$. Tedy
 $\langle OT, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

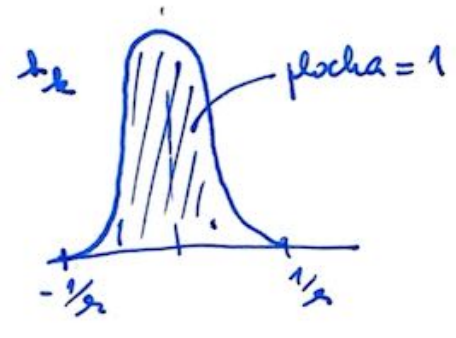
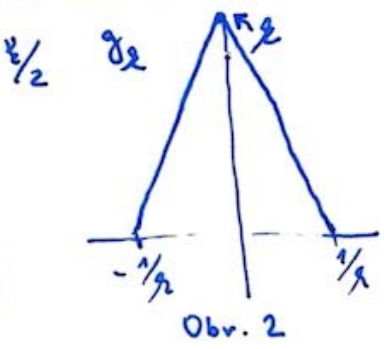
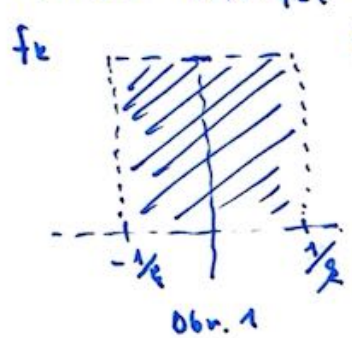
Máme tedy, pro lib. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

- | | | |
|-----|---|---|
| (1) | $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-a} \varphi \rangle$ | $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), a \in \mathbb{R}$ |
| (2) | $\langle d_\lambda T, \varphi \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle f, d_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \rangle$ | $\lambda > 0$ |
| (3) | $\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = \langle f, (-1)^{ \alpha } D^\alpha \varphi \rangle$ | $ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ |
| (4) | $\langle m T, \varphi \rangle = \langle T, m \varphi \rangle$ | $m \in \mathbb{C}^\infty$ |

Příklad ① Ze vztahu (3) plyne, že $(E-L)_{PDR}$ je pro $f \in L^1_{loc}$
 a pro $a, \nabla u \in L^1_{loc}$ (což plyne např. z předpokladu
 $a \in L^\infty(\Omega)$ a $\nabla u \in L^1_{loc}$) popis PDR $(E-L)_{PDR}$
 v $\mathcal{D}'(\Omega)$, přičemž oba členy představují regulární
 distribuce. Je-li však $f = \delta$ pak pro $a \in C^\infty(\Omega)$
 $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distributivní vůči $(E-L)_{PDR}$ rovnost

$$\langle U, -\operatorname{div}(a(x) \nabla \varphi) \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

② Víme, že $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ definované obrátke 1 konvergujú k δ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
 Overte, že také $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ definované obrátke 2 konvergujú k δ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
 Považte $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ + obrátke 3.



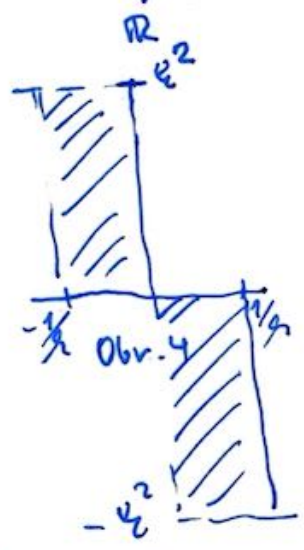
špeciálne $\langle g_k, \varphi \rangle = \int_{\Omega} g_k(x) \varphi(x) dx \rightarrow \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Počítame priamo $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega=\mathbb{R}} g'_k(x) \varphi(x) dx$. Funkcia g'_k je náčrtovaná

v Obr. 4. Tedy

$$\int_{\mathbb{R}} g'_k(x) \varphi(x) dx = k^2 \int_{-1/(2k)}^0 \varphi(x) dx - k^2 \int_0^{1/(2k)} \varphi(x) dx \approx \frac{\varphi(-1/(2k)) - \varphi(1/(2k))}{1/k}$$

$\downarrow k \rightarrow \infty$
 $-\varphi'(0)$



Tedy platí: $\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle$
 v súlade s vlastnosťou (3), a také:
 porad $g_k \rightarrow \delta$ v $\mathcal{D}'$, keď $g'_k \rightarrow \delta'$ v $\mathcal{D}'$. □

③ Spochtíme $m\delta'$ po $m \in \mathbb{C}^{\infty}$. Uvidíme, že náš návrh
 nepodporuje:
 $\langle m\delta', \varphi \rangle = -m(0)\varphi'(0)$
 nebude správny.

Platí:

$$\begin{aligned} \langle m\delta', \varphi \rangle &\stackrel{(4)}{=} \langle \delta', m\varphi \rangle \stackrel{p.2}{=} -(m\varphi)'(0) \\ &= -m'(0)\varphi(0) - m(0)\varphi'(0) = \langle -m'(0)\delta + m(0)\delta', \varphi \rangle \end{aligned}$$

Tedy
 $m\delta' = +m(0)\delta' - m'(0)\delta$

- ④ Ukážeme, že pro libovolné $a > 0$, je f_a definovaný předpisem
- $$\langle f_a, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{-a} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx + \int_a^{\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx + \int_{-a}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} dx$$

je distribuce.

Rěšení: ① $\langle f_a, \varphi \rangle < \infty$ pro $\forall \varphi$ $\text{supp } \varphi \subset \langle -k, k \rangle$
pro nějaké $k > 0$

Intervaly $\langle -k, -a \rangle$ a $\langle a, k \rangle$ jsou kompaktní a funkce

$\frac{\varphi(x)}{|x|}$ je zde omezená, tedy

$$\int_{-\infty}^{-a} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx + \int_a^{\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx < \infty$$

$$\text{Ode} \quad \left| \int_{-a}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} dx \right| = \left| \int_{-a}^a \frac{\varphi'(s)x}{|x|} dx \right| \leq \underbrace{\max_{s \in [-a, a]} |\varphi'(s)|}_{< +\infty} 2a < \infty$$

② lineární ano, ověřte.

③ spojitost $\varphi_R \rightarrow 0$ v $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \begin{matrix} \varphi'_R \rightarrow 0 \\ \varphi_R \rightarrow 0 \end{matrix}$ na jehle $\langle -L, L \rangle$ $L > 0$.

Pro argumenty vizuálně v bodě ① výše, lze vyvodit, že

$$\langle f_a, \varphi_R \rangle \rightarrow 0 \quad \text{pro } R \rightarrow \infty.$$

POUČENÍ Funkce $\frac{1}{|x|}$ není prvkem $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, ani není integrovatelná se simple hlavní hodnoty. K této funkci existují ∞ -distribuce (parametrizované parametrem $a > 0$).

Ačkoliv $\frac{1}{|x|} \geq 0$, tak neplatí $\langle f_a, \varphi \rangle \geq 0$ pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$.

Tedy f_a není nezáporná distribuce; zatímco není δ_0 je nezáporná distribuce.

Definice Říkáme, že $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je nezáporná $\equiv \langle T, \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \geq 0, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Kontrolní otázky

- 1) Je $\langle f, \varphi \rangle := \varphi(0)$ distribuce?
 2) Je $\langle f, \varphi \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ distribuce?

NE

ANO

KONSISTENCE DERIVACÍ

Nechť $f, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ jsou spojité v Ω . Ztotožníme f s $T_f \in \mathcal{D}'$ a uvažujeme $\frac{\partial T_f}{\partial x_2}$. Platí pak, že $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ a $\frac{\partial T_f}{\partial x_2}$ se rovnají v distribuci smyslu? Odpověď je kladná. Důkaz:

pro $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_2} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \, dx$$

integraci per-partes
vzhledem k
přímému x_2 .

pro T_f platí

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_2}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\rangle.$$

Akci f je regulární distribuce, tak

$$\left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\rangle = \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \, dx$$

Tedy a předchozí předli

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_2}, \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_2} \varphi \, dx$$

což znamená, že
 $\frac{\partial T_f}{\partial x_2}$ je regulární distribuce

a $T_{\frac{\partial f}{\partial x_2}}$, což jsou dvě věci.

Jestli jedna potudova a regulární distribuce.

• Pokud $f, g \in L^1_{loc}$ a $f = g$ s.v. v Ω , pak $T_f = T_g$ v $\mathcal{D}'$.

• Navíc jsou-li T, U dvě regulární distribuce, pak $T = U$ v $\mathcal{D}'$, pak $(T = T_f \text{ a } U = U_g) \Rightarrow f = g$ s.v.

Ověření $T_f = U_g$ v $\mathcal{D}' \Rightarrow \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

to více implikuje $\int_{\Omega} [f(x) - g(x)] \varphi(x) \, dx = 0$ —

tedy $f = g$ s.v. v Ω .

Derivace jsou konsistentní pro systém dvou funkcí, viz uveřejnění:

Věta 3.1 Necht $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ a

$$g(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+he_1) - f(x)}{h} \text{ existuje a je spojitá vyjma}$$

bodu y a $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Potom:

$$\text{je-li } d \geq 2, \text{ pak } \frac{\partial T_f}{\partial x_2} = g = T \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$\text{je-li } d=1, \text{ pak } \frac{\partial T_f}{\partial x_1} = T \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

jinak pokud f
je spojitá vy

POUČENÍ V $d=1$, jsou funkce se skokovou nepojitostí problémy, neboť jejich distribuční derivace nes regulární část. Naopak, v $d \geq 2$, nepojitost je jediná část nes problém, avšak v $d=2$, skoková nepojitost na čáře (úsečce) by byl problém.

(Dě) V dvou spec. případech.

(a) $d=1, y=0$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dx} T_f, \varphi \right\rangle &= - \left\langle T_f, \varphi' \right\rangle \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x) \varphi'(x) dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx \right\} \\ &\stackrel{\text{tes}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} g(x) \varphi(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x) \varphi(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) - f(-\varepsilon) \varphi(-\varepsilon)] \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \varphi(x) dx + [f(0+) - f(0-)] \varphi(0) \\ &= \left\langle T_g = f', \varphi \right\rangle + \underbrace{[f(0+) - f(0-)] \varphi(0)}_{=0 \text{ pokud } f(0+) = f(0-)} \end{aligned}$$

(b) $d=2, \frac{\partial}{\partial x_1}$

$f(x_1, x_2)$ je spojitě diferencovatelná dle x_1
vyjma $(x_1, x_2) = (0, 0)$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} T_f, \varphi \right\rangle &= - \left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle = - \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \\ &= \left\langle T \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle \text{ po Leibnizovi } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Přklady na procvičení

① Bud' $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

(Heavisidova funkce) ≈ 0 lze definovat libovolně.

Ukažte, že

• $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

• $\left\langle \frac{d}{dx} T_H, \varphi \right\rangle = \left\langle H', \varphi \right\rangle = \left\langle \delta, \varphi \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

neboli

$$H' = \delta \quad \text{v } \mathcal{D}'$$

② $\left\langle \delta^{(k)}, \varphi \right\rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$

③ Bud' $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ a f má v 0 vlnitě $f(0+)$ a $f(0-)$. Pak

$$T'_f = \underline{f'} = \underline{[f(0+) - f(0-)] \delta} + T_{f'}$$

④ Bud' $f(x) = \log|x|$. Pak ukážete

• $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

• $(T_f)' = T_{v.p. \frac{1}{x}}$ v $\mathcal{D}'$

• $(T_f)'' = -T_{v.p. \frac{1}{x^2}}$ v $\mathcal{D}'$.

17.3 Temperované distribuce a Fourierova transformace

Nejmenší prostor, na kterém jsme doposud zavedli Fourierovu transformaci, byl Schwartzův prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ není pro Fourierovu transformaci vhodný kvůli

1) Je-li $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $\mathcal{F}[\phi] \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

2) Je-li $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{F}[\phi] \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $\phi \equiv 0$.

z toho

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \text{a} \quad \text{platí} \quad f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$$

Připomeňme, že

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \left\{ \phi \in \overset{\text{hladší}}{\mathcal{C}^\infty}(\mathbb{R}^d); \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^d: \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < \infty \right\}$$

rychlý pokles v ∞
(rychlejší než polynomiální)

Víme také, že $\boxed{e^{-\frac{|x|^2}{2}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$ a $\boxed{\mathcal{F}[e^{-\frac{|x|^2}{2}}](s) = e^{-\frac{|s|^2}{2}}}$

Def. (temperované distribuce) Temperované distribuce jsou spojitě lineární funkcionály na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tzn.

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) := \{T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R} \text{ (nebo } \mathbb{C})\}; T \text{ je lineární, spojitý},$$

přičemž spojitost uvedeme takto:

potud $\{\phi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ splňují $p D^\alpha \phi_n \rightarrow 0$ v $\mathbb{R}^d$ po libovolný polynom,

pak $T(\phi_n) = \langle T, \phi_n \rangle \rightarrow 0.$

Platí

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

přičemž všechny inkluze jsou vložité. Třetí inkluze není (jáť si většinu všimni) úplně v pořádku neboť porovnávání funkcí a funkcionálů, které si sice odpovídají, ale jsou to jiné objekty. Je to však analogické sítinai

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \text{ kde poslední}$$

inkluze platí a předposlední Abotouh $x \in \mathbb{R}$ a $(x, 0) = x + i0$.

Bude
přibíráno
v 3. semestru
v kurzu
Funkční
Analýza
pro
fyziky

Přesněji: pro separabilní Hilbertův prostor $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ platí Rieszova věta
o reprezentaci, která říká
 $(\forall f \in H') (\exists! a \in H) (\langle f, \varphi \rangle = (a, \varphi)_H)$
 množina všech
spoj. lin. funkcí
na H

Navíc $\|f\|_{H'} = \|a\|_H$
 Speciálně: $L^2(\Omega)$ a $(L^2(\Omega))'$ lze ztotožnit

Tedy: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \approx [L^2(\mathbb{R}^d)]' \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Potomco víme, že platí Hölderova nerovnost: $(\forall f \in L^p) (\forall \varphi \in L^{p'})$

$$\int_{\Omega} f \varphi \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

což lze zapsat

$$\langle T_f, \varphi \rangle \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Platí:

$$[L^p(\Omega)]' = L^{p'}(\Omega)$$

$$p \in [1, \infty]$$

$$L^p(\Omega)$$

$$p'$$

$$L^{p'}(\Omega)$$

duální exponent

duální prostor

Zpět k temperovaným distribucím:

- Zatímco $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$
 tak $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \not\subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
- (Př.) $f(x) = e^{x^2}$, pak $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} e^{x^2} \varphi(x) \, dx \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))'$
 a $T_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Proč? Neboť pro speciální
 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a to $e^{-\frac{x^2}{2}}$ platí
 $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} e^{x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{x^2}{2}} \, dx = +\infty$

Pro distribuce $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ jsou vlastně platnost čtyř dualních (adjungovaných) identit (1) - (4) (viz strana 13/11), které jsou typu

$$\langle OT, \varphi \rangle = \langle T, S\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Tyto čtyři identity platí i po $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a zidinyf dodatek: po násobení skaláru m potřebujeme nejen bodlosk, $m \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, ale také nějaký polynomický růst $n \in \infty$:

$$\boxed{(\exists N \in \mathbb{N})(\exists C > 0): m(x) \leq C|x|^N \text{ po } |x| \rightarrow \infty},$$

neboť teprve pak $m\varphi \in \mathcal{S}$ po libovoln $\varphi \in \mathcal{S}$.

Pomocí druhé identity uvedeme Fourierovu transformaci po temperovan $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Je-li $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ pak

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[f](s) \varphi(s) ds &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot s} dx \varphi(s) ds \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s) e^{-2\pi i x \cdot s} ds f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathcal{F}[\varphi](x) dx \end{aligned}$$

neboli

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

define

$$\boxed{\text{Jeli } T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \text{ pak definujm } \mathcal{F}[T] \text{ dualitou} \\ \langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$$

Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$ a $\boxed{\varphi \mapsto \int \hat{f}(x) \varphi(x) dx}$ a platí:

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{\varphi}(x) dx$$

Tedy

$\hat{f}$ chápáno jako Four. transf. po $f \in L^1$ se shoduje s distributiv Four. transf. $\hat{f}$. (taky distr. Four. transf. je reg. distribuce).

TVRZENÍ

Na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ platí inverzní Fourierův vztah:

$$\boxed{T = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[T]] \quad \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}$$

De) Vyjádříme platnost inverzního Fourierova vztahu pro $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pro lib. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \langle T, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]] \rangle = \langle \mathcal{F}[T], \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T]], \varphi \rangle \end{aligned}$$

neboli

$$\underline{T = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T]]}$$

Příklady ① Buď $T = \delta$. Společně $\hat{T}$.

Rěšen: Dle definice

$$\begin{aligned} \langle \hat{\delta}, \varphi \rangle &= \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int \varphi(s) e^{-2\pi i x \cdot s} ds \Big|_{x=0} \\ &= \int \varphi(s) ds = \langle 1, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Tedy $\underline{\hat{\delta} = 1}$

Připomejme si, že $\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}] = c \frac{\sin s}{s}$. Nyní $\mathcal{F}[\delta] = \text{const}$
 $\mathcal{F}[e^{-\pi|x|^2}] = e^{-\pi|s|^2}$

f kompaktní nosič $\rightarrow \hat{f}$ zůstává polezen, ale $\hat{f}$ kladí
 f bodový nosič $\rightarrow \hat{f}$ roste k ∞ , $\hat{f}$ kladí.

② Buď $T = \delta'$. Společně $\hat{T}$, kde / navíc $\frac{\partial}{\partial x_k}$

Platí $\langle \hat{\delta}', \varphi \rangle = \langle \delta', \hat{\varphi} \rangle = -\langle \delta, (\hat{\varphi})' \rangle$

$$= + \langle \delta, \widehat{ix_k \varphi} \rangle = 2\pi \langle ix_k, \varphi \rangle \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s) e^{-2\pi i x \cdot s} ds \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} \hat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} -2\pi i s_k \varphi(s) e^{-2\pi i x \cdot s} ds}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} \delta = 2\pi i x_k}$$

Př. 3) Spočítejte Fourierovu transformaci funkce $e^{i\alpha|x|^2}$, $\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$

Rěšení Funkce $e^{i\alpha|x|^2} = \cos \alpha|x|^2 + i \sin \alpha|x|^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$,
ale $\notin L^1(\mathbb{R}^d)$ ani $\notin L^2(\mathbb{R}^d)$. Tedy $\widehat{e^{i\alpha|x|^2}}$ nemá smysl
v $\mathcal{S}, L^1, L^2$, ale jistě

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\alpha|x|^2} \varphi(x) \in \mathcal{S}' \quad (\text{je to temperovaná distribuce})$$

Jediná možnost jak dát smysl $\mathcal{F}[e^{i\alpha|x|^2}]$ je v $\mathcal{S}'$.

Obecně pro výpočet Fourierovy transformace temperovaných distribucí platí, že ji nemůžeme spočítat z definice. Postup je tedy takový, že zkusíme najít nějaké kandidáty (nejde o úvahu) valét vhodného kandidáta na F.T. k dané temperované distribuci, a pak bychom měli ověřit, že tento kandidát splňuje identitu $\langle \text{kandidát}, \phi \rangle = \langle \text{funkce, která byla zadaná}, \hat{\phi} \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}$

V našem případě vyjdeme z identity

$$(*) \quad \mathcal{F}[e^{-\mu|x|^2}](s) = \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi}{\mu}|s|^2}$$

kde zkusíme vložit za $\mu = -i\alpha$. Pak

$$(\circ) \quad \mathcal{F}[e^{i\alpha|x|^2}](s) \stackrel{(*)}{=} \left(\frac{\pi}{-i\alpha}\right)^{d/2} e^{\frac{\pi}{i\alpha}|s|^2} = \left(\frac{\pi i}{\alpha}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi i}{\alpha}|s|^2}$$

Na pravé straně je třeba správně definovat $\left(\frac{\pi i}{\alpha}\right)^{d/2}$ po d kdek. Proveďte se pomocí $z^{1/2}$.

$$\left(\frac{\pi i}{\alpha}\right)^{1/2} = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}} & (\text{pro } \alpha > 0) \\ \left(\frac{\pi}{-\alpha}\right)^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}} & (\text{pro } \alpha < 0) \end{cases} = \left(\frac{\pi}{|\alpha|}\right)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}(\alpha)}$$

S touto upřesněnou vztahovanou pravou stranou v $(\circ)$, stačí už jen

$$(\circ\circ) \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\alpha|x|^2} \hat{\phi}(x) dx = \left(\frac{\pi i}{\alpha}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\pi i}{\alpha}|x|^2} \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{S}$$

$\left\langle \text{funkce, která byla zadaná}, \hat{\phi} \right\rangle \stackrel{?}{=} \left\langle \text{kandidát}, \phi \right\rangle$

K důkazu $(\circ\circ)$ opět vyjdeme z $(*)$ a využijeme hlubokých vlastností komplexní analýzy.

Vzťah (6) implikuje

$$(**) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mu |x|^2} \hat{\phi}(x) dx = \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\pi^2}{\mu} |x|^2} \phi(x) dx \quad \mu > 0$$

Uvažujme nyní dvě funkce $F, G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované

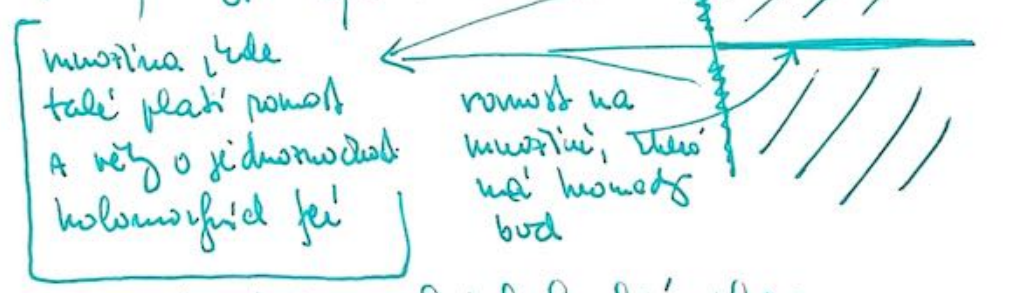
$$F(\mu) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mu |x|^2} \hat{\phi}(x) dx \quad G(\mu) := \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\pi^2}{\mu} |x|^2} \phi(x) dx$$

Připomeňme, že $\frac{1}{\mu} = \frac{\bar{\mu}}{|\mu|^2}$ a tedy pro $\operatorname{Re} \mu > 0$ jsou

- $F(\mu)$ a $G(\mu)$ konvergují (neboli $D_F \supset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$ a $D_G \supset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$)
 - Navíc, $e^{-\mu |x|^2} = e^{-\mu_1 |x|^2} (\cos \mu_2 |x|^2 + i \sin \mu_2 |x|^2)$ splňuje C-R podmínky
 $\mu = \mu_1 + i\mu_2$
- a tedy F a polehčí G jsou holomorfní v $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$

- Pro $\mu \neq 0$ (pěsík) $F(-i\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\varepsilon - i\alpha)$
 $G(-i\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\varepsilon - i\alpha)$

Ale $G(\mu) = F(\mu)$ pro μ typu $(\mu, 0)$



Tedy A věž o jednoznačnosti holomorfních funkcí plyne
 $F(-i\alpha) = G(-i\alpha) \quad \forall \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$
 což je základem tvrzení (6.6).

Citát (Paul Painlevé): "Between two truths of the real domain, the easiest a shortest path quite often passes through complex domain."

Pi. 4 Spočítejte Fourierovou transformaci $f(x) = e^{-t|x|}$, $t > 0$.

Rěšení V tomto případě $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, klesá v ∞ rychleji než libovolný polynom, ale není v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

neboť $e^{-t|x|} \notin C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (problém je počítat).

► Nejprve spočítáme F.T. $\hat{f}$ přímo pro $d=1$

Výpočet $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t|x|} e^{-2\pi i x s} dx$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{(t-2\pi i s)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(t+2\pi i s)x} dx$$

$$= \left[\frac{e^{(t-2\pi i s)x}}{t-2\pi i s} \right]_{-\infty}^0 + \left[-\frac{e^{-(t+2\pi i s)x}}{(t+2\pi i s)} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{t-2\pi i s} + \frac{1}{t+2\pi i s} = \frac{2t}{t^2 + 4\pi^2 s^2}$$

Vidíme, že pro $\forall t > 0$ je $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dle Twrzení na konci kapitoly F.T. platí:

$$f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$$

což implikuje

$$\boxed{e^{-t|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 + 4\pi^2 s^2} e^{2\pi i x s} ds} \quad (*)$$

► Ve vyšších dimenzích $[d > 1]$ použijeme jiný obecný postup:

a) Napíšeme $e^{-t|x|}$ (nebo obecně danou funkci f) jako "průměr" Gaussianů s jistou vahou g , tj.

$$(I) \quad \boxed{e^{-t|x|} = \int_0^{\infty} g(ts) e^{-s|x|^2} ds}$$

b) Na (I) užitíme F.T., což dává

$$\mathcal{F}[e^{-t|x|}](z) = \int_0^{\infty} g(ts) \mathcal{F}[e^{-s|x|^2}](z) ds$$

$$= \int_0^{\infty} g(ts) \left(\frac{\pi}{s}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi}{s}|z|^2} ds$$

c) Zkusíme spočítat (upravit) poslední integrál.

Zkusme aplikovat schéma (a)-(c) na $f(x) = e^{-t|x|}$.

Ad a) Hledáme tedy g tak, $\tilde{e}(I)$ platí. Otevčme $\lambda = |x|$. Tedy $(\lambda > 0)$
 hledáme $g = g(t,s)$ tak, $\tilde{e}$

$$(I') \quad e^{-t\lambda} = \int_0^\infty g(t,s) e^{s\lambda^2} ds$$

Vyjde me ze vztahu (83) (viz předchozí strana) a porovnáme:

$$\int_0^\infty e^{-\beta t^2} e^{-\beta(2\pi s)^2} d\beta = \int_0^\infty e^{-\beta(t^2 + (2\pi s)^2)} d\beta = \frac{1}{t^2 + 4\pi^2 s^2}$$

Tedy dle (83):

$$e^{-t|x|} = 2t \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\beta t^2} e^{-\beta(2\pi s)^2} d\beta e^{2\pi i x s} ds$$

Fubini = $\int_0^\infty 2t e^{-\beta t^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(2\pi s)^2} e^{2\pi i x s} ds \right) d\beta$

strana 17/21 $\rightarrow$ (*)
 $\mu = +\beta 4\pi^2$
 $dx = 1$

$$= \int_0^\infty 2t e^{-\beta t^2} \left(\frac{\pi}{\beta 4\pi^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4\beta} x^2} d\beta$$

$$= \frac{t}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta t^2}}{\sqrt{\beta}} e^{-\frac{1}{4\beta} x^2} d\beta$$

neboli

$$e^{-t\lambda} = \int_0^\infty \frac{t e^{-\beta t^2}}{\sqrt{\beta}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}} d\beta$$

a (I') je nalezena.

Ad b)

Aplikujeme-li na (I') Four. transformaci (opět $\lambda = |x|$), máme

$$\mathcal{F}[e^{-t|x|}](s) = \int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta t^2}}{\sqrt{\beta}} \mathcal{F}\left[e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}\right](s) d\beta \stackrel{(*)}{=} \int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{\pi}} (4\pi)^{d/2} e^{-4\pi^2 |s|^2 \beta} e^{-\beta t^2} d\beta$$

$$\stackrel{\text{substituce } y = \beta(t^2 + 4\pi^2 |s|^2)}{=} \frac{2^d t \pi^d}{(t^2 + 4\pi^2 |s|^2)^{\frac{d+1}{2}}} \int_0^\infty y^{\frac{d-1}{2}} e^{-y} dy = \frac{(2\pi)^d \Gamma(\frac{d+1}{2}) t}{(t^2 + 4\pi^2 |s|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$$

$d\beta = \frac{dy}{t^2 + 4\pi^2 |s|^2}$

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$$

Porovnáme!

$$(i) \mathcal{F}^{-1}[e^{-t|x|}](s) = \mathcal{F}[e^{-t|x|}](-s) = (2\pi)^d \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2}) t}{(t^2 + 4\pi^2 |s|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$$

- (ii) f klesá rychle v $\infty \rightarrow \hat{f}$ hladká
 f není hladká v 0 $\rightarrow \hat{f}$ klesá jen polynomiálně.

Příklad 5

Společná Fourierova transformace $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
kde $\operatorname{Re} \alpha \in (-d, 0)$, tm. $|x|^\alpha \in L^1_{loc}$.

Rěšení

Ačkoliv $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, tak $f \notin L^1(\mathbb{R}^d)$, ale f
"má" (pro $\alpha > -d$) příslušnou měru ∞ ,
tedy $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \phi(x) dx$$

► K určení Fourierovy transformace $\hat{T}_f$ použijeme obecný postup
z předchozího příkladu, kdy hledáme g tak, aby

$$(I'') \quad |x|^\alpha = \int_0^\infty g(\alpha, s) e^{-s|x|^2} ds$$

Platí:

$$\int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1} e^{-s|x|^2} ds = \int_0^\infty |x|^\alpha y^{-\frac{\alpha}{2}-1} e^{-y} dy = \Gamma(-\frac{\alpha}{2}) |x|^\alpha$$

$y = s|x|^2$
 $s = \frac{y}{|x|^2}$
 $ds = \frac{1}{|x|^2} dy$

přičemž integrál maleno je konvergentní právě když $\alpha < 0$
Tedy pro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (-d, 0)$, (I'') má tvar

$$(*) \quad |x|^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1} e^{-s|x|^2} ds$$

► Nyní k (*) aplikujeme F.T.

$$\mathcal{F}[|x|^\alpha](z) = \frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1} \mathcal{F}[e^{-s|x|^2}](z) ds$$

$$\stackrel{(\star) \text{ p } 17/21}{=} \frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1} \left(\frac{\pi}{s}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{s}|z|^2} ds$$

(*)

$$= \frac{(\pi)^{d/2}}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty s^{-\frac{\alpha+d}{2}-1} e^{-\frac{\pi^2}{s}|z|^2} ds$$

$$= \frac{(\pi)^{d/2}}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \left[\pi |z| \right]^{-\frac{\alpha+d}{2}} \int_0^\infty y^{\frac{\alpha+d}{2}-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{\alpha}{2}+\alpha}} \frac{\Gamma(\frac{\alpha+d}{2})}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \frac{1}{|z|^{\alpha+d}}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\pi^2 |z|^2}{s} \\ s &= \pi^2 |z|^2 \frac{1}{y} \\ ds &= -\frac{\pi^2 |z|^2}{y^2} dy \\ (y \text{ od } +\infty \text{ do } 0) \end{aligned}$$

Poznámky • pro $\alpha \in (-d, 0)$ i $-\alpha-d \in (-d, 0)$

• Výpočet proveden pro $\alpha \in \mathbb{R}$, rozšíření pro $\alpha \in \mathbb{C}$ možná pomocí věty o analyt. pokračování

• Speciálně $\mathcal{F}\left[\frac{1}{|x|}\right](z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{|z|^2} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{|z|^2}\right] = \frac{\pi}{|x|}$
 $\alpha = -1$
 $d = 3$
 $\sqrt{\pi}$

úloha Najděte fundamentální řešení Laplaceova operátoru v $\mathbb{R}^d$

kon. hledáme $\Delta u = \delta$ v $\mathcal{D}'$

Přímá řešení $\Delta u = \delta$ v $\mathcal{D}'$ pomocí F.T.

Par

$$4\pi^2 |z|^2 \hat{u}(z) = 1 \Rightarrow \hat{u}(z) = \frac{1}{4\pi^2 |z|^2}$$

cit: INVERZ
VAT

$z \in \mathcal{D}'$ plyne, že pro $\alpha \in (-d, 0) \Leftrightarrow -\alpha - d \in (-d, 0)$

$$\mathcal{F}[|x|^\alpha](z) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}+d}} \frac{\Gamma(\frac{\alpha+d}{2})}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \frac{1}{|z|^{\alpha+d}} \quad |x|$$

$$\Uparrow \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{|z|^{\alpha+d}}\right](x) = \pi^{\frac{d}{2}+d} \frac{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+d}{2})} |x|^\alpha$$

chceme použít pro $\alpha+d=2 \Rightarrow \alpha=2-d$ a $2-d \in (-d, 0) \Leftrightarrow d > 2$

Par

$$u(x) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}+2-d}}{4\pi^2} \frac{\Gamma(\frac{d-2}{2})}{\Gamma(1)} \frac{1}{|x|^{d-2}} = \frac{1}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d-2}{2})}{|x|^{d-2}}$$

Připomeň: $\Gamma(m) = (m-1)!$ $\Gamma(m+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2}+m-1) \sqrt{\pi}$

Speciálně pro $d=3$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$u(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$$

Obecněji si říkáme:

je-li ω_d obsahem jednotkové koule v $\mathbb{R}^d$,

par

$$u(x) = \frac{1}{d(2-d)\omega_d} \frac{1}{|x|^{d-2}}$$

($x \neq 0$)

Pro $d=2$ je F.řešení $-\Delta u = \delta$

dáno vzhledem

$$u(x) = \frac{1}{2\omega_2} \ln|x| = \frac{1}{2\pi} \ln|x|$$

což si vrátíme přímo a definice následujících výpočtů.

Problém d=2 Ukažte, že $u_F(x) := \frac{1}{4\pi} \ln|x|^2$ řeší $-\Delta u = \delta$ v $\mathcal{D}'$.

Řešení Každý funkci v , u Δu v polárních souřadnicích má tvar

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)(r, \theta)$$

$$\left[\text{Chebyshevův vztah, že } \langle -\Delta u_F, \phi \rangle = \phi(0) \quad \forall \phi \in \mathcal{D} \right]$$

De definice derivace distribuce

$$\langle -\Delta u_F, \phi \rangle = - \int_{\mathbb{R}^2} u_F(x) \Delta \phi(x) dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon(0)} u_F(x) \Delta \phi(x) dx$$

$$= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\ln r}{4\pi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right)(r, \theta) r d\theta dr$$

$$\text{Protože } \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_0^{2\pi} g(r) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} d\theta dr = \int_{\varepsilon}^{\infty} \left[g(r) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]_0^{2\pi} dr = 0,$$

$$\text{tak } \langle -\Delta u_F, \phi \rangle = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_0^{2\pi} r \ln r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\ln r}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} d\theta dr$$

$$\begin{aligned} \text{nebo} &= +\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \phi - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \ln r \right) \phi - \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left[\ln r \phi + r \ln r \frac{\partial \phi}{\partial r} - (r \ln r + 1) \phi \right]_{\varepsilon}^{\infty} d\theta \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (r \ln r + 1) \\ &= \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$= +\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left(\varepsilon \ln \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial r}(\varepsilon, \theta) + \phi(\varepsilon, \theta) \right) d\theta = \phi(0,0) \quad \text{Q.E.D.}$$

Vyřešení počáteční úlohy po rovnici vedení křep (kdy $u(t, x) = (u_0 * G_t)(x) + \int_0^t (f(\tau, \cdot) * G_{t-\tau})(x) d\tau$)

a nalezení fundamentálních řešení po Poissonovu/Laplacovu rovnici, získáme pocit, že teorie distribucí a konice PDR (parciálních dif. rovnic) budou více propojeny. Je tomu tak. Přidejme ještě dvě další vztahy pro partie příštího semestru.

Vlnová rovnice pro d=1 Uvažujme vlnovou rovnici v jedné prostorové dimenzi:

$$\square u := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

► Snadno ověříme, že je-li $f \in C^2(\mathbb{R})$, pak $f(x-kt)$ řeší $\square u = 0$.

► Uvěříme, že je-li $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, pak $f(x-kt)$ řeší

$[k > 0 \text{ (rychlost šíření)}]$ $\square u = 0$ v $\mathcal{D}'$ (tj. ve smyslu distribucí)

Rěšení $\langle \Box u, \varphi \rangle \stackrel{(3)}{=} \langle u, \Box \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-kt) \Box \varphi(t, x) dx dt$
 $\uparrow$
 u generaci regulární distribuci

Substituce
 $z = x - kt$
 $s = x + kt$
 implikují $x = \frac{z+s}{2}$
 $t = \frac{s-z}{2k}$
 a $J = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2k} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2k} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2k}$

Označme-li:

$\tilde{\varphi}(s, z) = \varphi\left(\frac{s-z}{2k}, \frac{s+z}{2}\right)$

pak $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial s} = \frac{1}{2k} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$

a $\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z \partial s} = -\frac{1}{4k^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{4k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} - \frac{1}{4k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$
 $= -\frac{1}{4k^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{4k^2} \Box \varphi$

Tedy

$\langle \Box u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(z) \left(-4k^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z \partial s} (z, s) \right) dz ds$
 $= -4k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) ds \right) dz = 0$

nebo $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ má kompaktní nosič. 😊

Schrödingerova rovnice

"vlnovou funkci" φ definovanou v $\mathbb{R}^3$. Jediný požadavek na φ je konečnost $\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^2$, tj. $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Označme-li $u(t, x)$ "vlnovou funkci" v čase t , pak u splňuje

Počáteční úloha pro Schrödingerovu rovnici.

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - i\hbar \Delta_x u = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$ v $(0, t) \times \mathbb{R}^3$

Rovnice obecně obsahuje další členy (potenciál, interakční mechanismy)

Rěšení lze ujmout pomocí v $\mathcal{S}'$, aplikací F.T.:

$\left[\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + (2\pi)^2 i \hbar |s|^2 \hat{u} = 0 \quad \text{a} \quad \hat{u}(0, \cdot) = \hat{\varphi} \right]$

Odtud $\frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{u}(t, s) e^{(2\pi)^2 i \hbar |s|^2 t} \right) = 0 \Rightarrow \hat{u}(t, s) = \hat{\varphi}(s) e^{-(2\pi)^2 i \hbar |s|^2 t}$ ***

a dle (Pr. 3), viz strana 17/21:

$\hat{u}(t, s) = \hat{\varphi}(s) \left(\frac{i}{4\pi \hbar k t} \right)^{3/2} e^{\frac{i|x|^2}{4\hbar t}}(s)$

$u(t, x) = \frac{e^{\pm \frac{3}{4}\pi i}}{(4\pi \hbar k t)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i|x-y|^2}{4\hbar t}} \varphi(y) dy$

Porad platí vztah pro konvoluce, a F.T. konvoluce distribuci, tak

VZOREC *** $\Rightarrow |\hat{u}(t, s)| = |\hat{\varphi}(s)|$

Poissonův sčítací vzorec Víme, že $\mathcal{F}[\delta] = 1$. Pomocí translačního vztahu nebo z definice také platí

$$\mathcal{F}[\delta_y](s) = e^{-2\pi i y \cdot s}$$

Nechť po jednoduchost vezdíváme $d=1$ Uvažme předchozí vztah pro $y=k$, $k \in \mathbb{Z}$ a provedeme součet přes $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k\right](s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i k s}$$

tento součet definuje legitimní temperovanou distribuci představující nekonečný "hřebek" rovnoměrně umístěných hmotných bodů.

Řada vpravo vypadá komplikovaně, ale uvažme, že tomu tak není. Naopak dostaneme stejnou sumu jako dříve, tedy:

$$(P) \quad \mathcal{F}\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k\right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \quad \text{v } \mathcal{S}'$$

**Poissonův
sumovací
vzorec**

Odvození Součet $\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i k s}$ neexistuje v obvyklém smyslu. K odvození využijeme metodu periodizace: pro $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ nebo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definujeme

$$(\star) \quad P f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x-k)$$

Paž Pf je 1-periodická fce. Klíčová otázka, která vede k vzorci (P), jst: jaký je vztah mezi koefficienty c_k Fourierovy řady fce Pf a Fourierovou transformací f ?

Víme (viz vzorce na začátku kapitoly 16), že

$$c_k = \sqrt{2\pi} \int_0^1 P f(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

$$\text{a } P f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{2\pi i k x}}{\sqrt{2\pi}}$$

Dosažením $(\star)$:

$$c_k = \sqrt{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(x-j) e^{-2\pi i k x} dx$$

$$= \sqrt{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-j}^{-(j-1)} f(y) e^{-2\pi i k y} dy$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i k y} dy = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k)$$

Tedy

$P f(x)$ je dána jdnou součtem $(\star)$ a tak

$$P f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

Dosažení $x=0$ do obou řad dokážeme

$$(*) \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)$$

manipulo po póci F.T. na φ

což lze napřít tak:

$$\left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k, f \right\rangle = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k, \hat{f} \right\rangle = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k, f \right\rangle,$$

pro $f \in \mathcal{S}$
(nebo $\mathcal{D}$)

což dává slibovaný Poissonův vzorec P.

Pro $d > 1$ lze postupovat velmi podobně a získat vztahy pro periodické mřížky (sítě) lattice

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(k)$$

↑
d-tice celých čísel

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \delta_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \delta_k$$

tento vztah bohužel neplatí univerzálně (pro $f \in \mathcal{S}$ a $\mathcal{D}$ o.k.)

! Existují funkce, kdy obě řady konvergují absolutně, ale

- k jinému číslu.

Aplikace

- teorie čísel
- krystalografie
- pozoruhodné vztahy, pokud $\hat{f}$ le explicitně specifik.

(kvazi-periodické mřížky) $\left[\begin{array}{l} \delta_0 \text{ atom v } k \\ \hat{f} \text{ výstup } \end{array} \right]$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 t k^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{e}^{-4\pi^2 t k^2}(k) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$$

např.

LITERATURA K TEORII DISTRIBUCIÍ

- ① Příklady z matematiky pro fyziky [V], str. 1-20.
Matfyzpress 2002
dále kapitoly 3, 4, jednodušejší příklady, Čížek, Černý, Kopáček
- ② Pavel Čížek a kol.
Matematická analýza nejen pro fyziky (V), str. 1-72, Matfyzpress 2016
- ③ J. LUKEŠ a JAN MAREŠ : Measure and integral, Matfyzpress, 2005
- ④ Robert S. Strichartz : A guide to Distribution theory and Fourier transform
World Scientific, 1993.
- ⑤ V. S. Vladimirov : Generalized functions in mathematical physics,
Mir Publishers, Moscow, 1979
- ⑥ A. Friedman : Generalized functions and partial differential equations, 1963, Prentice-Hall

Regularizace (zhlazování) a jeho vlastnosti:

Bud'

$$w(x) = \begin{cases} c e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{pro } |x| < 1 \\ 0 & \text{pro } |x| \geq 1 \end{cases}$$

kde $c > 0$ je takové, že $\int_{\mathbb{R}^d} w(x) dx = 1$

Paž

- $w \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $\text{supp } w = \overline{B_1(0)}$

Tedy

- $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a navíc $w(x) = w(-x)$ a $w \geq 0$.

Nyní sestavíme ∞ -mnoho funkcí z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ řádkováním a posouváním. Definujeme

$$w_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \varepsilon \in (0, \infty)$$

Paž

- $w_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$; $\text{supp } w_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}$; $\int_{\mathbb{R}^d} w_\varepsilon(x) dx = 1$,
 $w_\varepsilon(-x) = w_\varepsilon(x)$

Také

- $\tau_{-y} w_\varepsilon(x) = w_\varepsilon(x-y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp } \tau_{-y} w_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(y)}$,
 a také $w_\varepsilon(x-y) = w_\varepsilon(y-x)$

Platí následující tvrzení

Věta 17.2. Bud' $p \in [1, \infty)$.

(i) Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $f_\varepsilon := w_\varepsilon * f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a platí

(i1) $\|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ a $f_\varepsilon \rightarrow f$ a.e. in $\mathbb{R}^d$ pro $\varepsilon \rightarrow 0+$

(i2) $\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$ pro $\varepsilon \rightarrow 0+$

(ii) Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezené. Pak $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustý v $L^p(\Omega)$.

(iii) Je-li $f \in C(\Omega)$ a $\text{supp } f \subset \Omega$ je kompaktní,
 "pak

$$f_\varepsilon \Rightarrow f \text{ v } \Omega.$$

(Dě) Ad (i) Z důvodu věty 1.1. plyne

$$\|f_\varepsilon\|_p = \|w_\varepsilon * f\|_p \leq \|w_\varepsilon\|_1 \|f\|_p$$

aniž $\|w_\varepsilon\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} w_\varepsilon(x) dx = 1$, což dává tvrzení (i1).
(část)

Stejně, i $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ je jasná resp. ponechána čtenáři.

Dále, dle věty o Lebesgueových bodech (viz učeň) platí

$$(\Rightarrow) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \text{ po s.v. } x \in \mathbb{R}^d.$$

Pro tato x platí

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \int_{B_\varepsilon(x)} w_\varepsilon(x-y) [f(y) - f(x)] dy \right|$$

neboť

$$\bullet \supp w_\varepsilon(x-\cdot) = B_\varepsilon(x)$$

$$\bullet \int_{\mathbb{R}^d} w_\varepsilon(x-y) dy = 1$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{B_\varepsilon(x)} w\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) |f(y) - f(x)| dy$$

$$\leq c \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - f(x)| dy \rightarrow 0 \text{ dle } (\Rightarrow).$$

Tedy (i1) je dokázáno.

Ad (iii) Je-li $f \in C(\Omega)$ a $\supp f$ je kompaktní v Ω ,
pak f je stejnoměrně spojitá: k danému $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,
tak, i $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ když $|x - y| < \delta$. Pak
a předchozí výpočet plyne, i

$$\sup_{x \in \supp f} |f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq c\varepsilon.$$

Tedy $f_\varepsilon \rightarrow f$ v Ω .

Ad (i2) Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $\exists g \in C(\mathbb{R}^d)$, $\supp g$
je kompaktní tak, i $\|f - g\|_p < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je dano
libovolně. Pak $\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_p \leq \|f - g\|_p < \varepsilon$ dle (i1),
a $g_\varepsilon \rightarrow g$ v $\mathbb{R}^d$. Tedy

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|g - g_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|g - g_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &\stackrel{\substack{\text{! } \supp g|_{g_\varepsilon} \\ \text{je kompaktní}}}{\leq (2+C)\varepsilon.} \end{aligned}$$

Ad (ii) plyne z předchozího, neb
je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $f \chi_{[-N,N]} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$ v $L^p(\mathbb{R}^d)$

a $f \chi_{[-N,N]}$ má kompaktní nosič. Tedy
 $(f \chi_{[-N,N]})_\varepsilon \rightarrow f \chi_{[-N,N]} \quad \text{pro } \varepsilon \rightarrow 0,$

Tyto dvě konvergence dávají hustotu. □

následující

V teorii míry platí důležitá věta, která říká, že každá integrovatelná funkce je "přibližně spojitá" ve skoro všech bodech.

Věta (o Lebesgueových bodech) Buď $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

Pak
(i) pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d$: $\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} f(y) dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(x)$

(ii) —||— $\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - f(x)| dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

Nanic, je-li $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$,

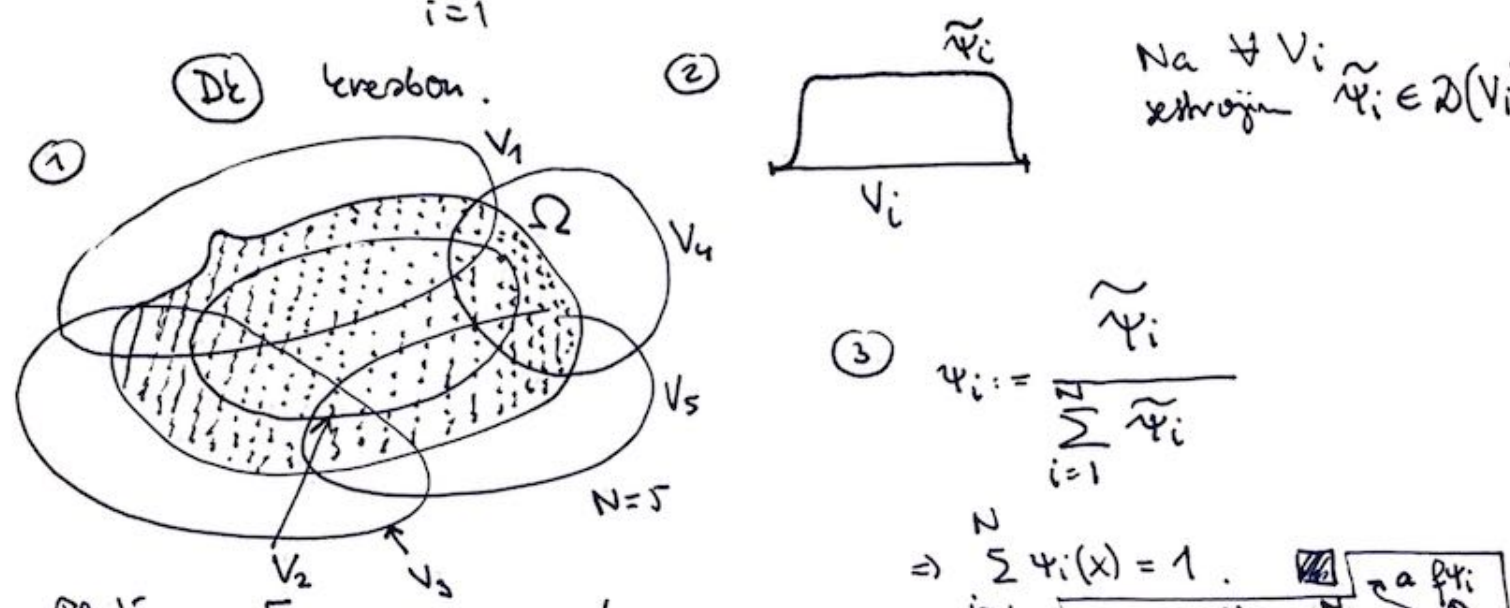
$1 \leq p < \infty$, pak:

pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d$: $\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - f(x)|^p dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$

Často je výhodné studium chování globálně definovaných objektů lokalizací.
 S lokalizací je spojen pojem: „rozdělení jednotky“ (partition of unity). Platí

[Tvzení] (o rozdělení jednotky) Pond Ω omezená
 a $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^N V_i$ (okružné polychy $\bar{\Omega}$)
 okružné konvergent

Paž $\exists \psi_i \in \mathcal{D}(V_i) \dots C^\infty$ -fce p. podpoře v V_i
 tal, u $\sum_{i=1}^N \psi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$.



Platí $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^5 V_i$, V_i okružné

LOKALIZACE: $f \in L^p(\Omega) \Rightarrow f = f \cdot 1 = f \sum_{i=1}^N \psi_i = \sum_{i=1}^N f \psi_i$
 globálně $L^p(V_i)$ lokaliz

Věta 17.3 (Schwartzova věta o nemoznosti zavést násobení distribucí)
 Nežse na $\mathcal{D}'$ zavést násobení tal, aby bylo komutativní, asociativní
 a platilo $x\delta = 0$ a $x T_{v.p. \frac{1}{x}} = 1$.

Přípona • $\langle x\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, x\varphi \rangle = 0 \varphi(0) = 0$
 • $\langle x T_{v.p. \frac{1}{x}}, \varphi \rangle = \langle T_{v.p. \frac{1}{x}}, x\varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\epsilon, \epsilon]} \frac{x\varphi(x)}{x} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) = \langle 1, \varphi \rangle$

(Dě) Spore. Necht talové násobení by zavést. Paž

$$0 = 0 T_{v.p. \frac{1}{x}} = (x\delta) T_{v.p. \frac{1}{x}} = \delta(x T_{v.p. \frac{1}{x}}) = \delta 1 = \delta,$$

est je spor.

□

Příklad Ukážte, že $x\delta = 0$ v $\mathcal{D}'$ a $x T_{v.p. \frac{1}{x}} = 1$ v $\mathcal{D}'$.

Riešení

$$(1) \langle x\delta, \varphi \rangle \stackrel{(4)}{=} \lim_{x \in \mathbb{C}^\infty} \langle \delta, x\varphi \rangle = (x\varphi)(0) = 0 = \langle 0, \varphi \rangle$$

$$(2) \langle x T_{v.p. \frac{1}{x}}, \varphi \rangle = \langle T_{v.p. \frac{1}{x}}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x(\varphi(x))}{x} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle T_1, \varphi \rangle$$

T_1 je regulární distribuce odpovídající 1.

Věta 17.3. (Schwartzova věta o nemožnosti zavést uspořádanou distribuci)

Na $\mathcal{D}'$ nelze zavést uspořádanou tak, aby bylo

- komutativní, asociativní a platilo $x\delta = 0$ v $\mathcal{D}'$ a $x T_{v.p. \frac{1}{x}} = T_1$ v $\mathcal{D}'$.

(Dě) když ano, pak

$$0 = 0 T_{v.p. \frac{1}{x}} = (x\delta) T_{v.p. \frac{1}{x}} = \delta(x T_{v.p. \frac{1}{x}}) = \delta 1 = \delta,$$

což dává spor.

NOSIČ DISTRIBUCE

Víme, že nosič f je množina bodů, v jejich okolí se f nespojitě chová; přesněji
 $\text{supp } f := \{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$ - uzavřená množina bodů, ve které je f nenulová.

Problém distribuce je definovaný na funkcích, nebo mluvit o hodnotách distribuce v bodech. Nosič distribuce je tak třeba trochu opatrněji:

Bud $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a $G \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezení množiny,

pak T_G definovaná vzhledem $\langle T_G, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$

je distribuce na G ; tzn. $T_G \in \mathcal{D}'(G)$.

Překlademe, že T vymizí na $G \stackrel{\text{d.}}{=} \langle T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$

$\cdot T = S$ na $G \stackrel{\text{d.}}{=} \langle T - S, \varphi \rangle = 0 \quad \rightarrow$

Potom T vymizí na každém G_α , kde G_α je prvek ze souboru omezených množin, pak T vymizí na jejich sjednocení. [Lze nahlednout pomocí vzorce o rozkladu jednotky str. 17/34] postavíme na

$\Omega = \text{vnitřní nosič } f$ φ , kde $\varphi \in \mathcal{D}(\bigcup_\alpha G_\alpha)$

Tedy existuje největší množ. $N_T : T$ vymizí na N_T

Pak nosič distribuce T je definován jako doplněk N_T , tj. $\mathbb{R}^d - N_T$.

(Př.) Uvaž. nosič δ ($\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$)

Zjevně $\langle \delta, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Tedy nosič $\delta = \{0\}$.

17.6. SOUČIN DISTRIBUCE, TENSOROVÝ SOUČIN A KONVOLUCE DISTRIBUCE

Tensorový součin distribuce

Bud $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^p)$
 pak lze definovat součin $f \otimes g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{d+p})$ podle
 $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y) \quad (x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^p)$

Odtud

$$\begin{aligned} \langle f \otimes g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x)g(y)\varphi(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^p} g(y)\varphi(x, y) dy \right) dx \\ &= \langle f, \langle g, \varphi(x, \cdot) \rangle \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+p}) \end{aligned}$$

Tento vzťah zobecňuje a definujeme:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Pre } T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \text{ a } S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p) : \\ \text{Potom } T \otimes S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+p}) \end{array} \right.$$

$$\langle T \otimes S, \psi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \langle S, \psi(x, y) \rangle \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+p})$$

$$\Rightarrow \text{Toľak pre } T, S \in \mathcal{G}' \Rightarrow T \otimes S \in \mathcal{G}'$$

Priklad Pre $T = \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $S = \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Pre $T \otimes S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ je $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

Rieši sa ľahko: $\delta(x, y) = \delta(x) \otimes \delta(y)$ alebo $\delta(x) \delta(y)$,
čo je veľmi jasné, musí vzťahovať dojem, že
jde o součin distribúcií ale ide tenzorový součin
neboť $\delta(x), \delta(y)$ nejsou definovány nad stejným
prostorom test. fun.

Konvolúcie temperovaných distribúcií (vypádujú opatrnosti)

Musíme aplikovať Axiómy konvolúcie, kde žaden faktor
je temperovaná distribúcia. Vime

$$(f * g)(x) = \int f(x-y) g(y) dy$$

a rovnako $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$ pre $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\psi}$ (viz strana 16/10)

Tento vzťah nemôže platiť pre temper. distribúcie,
neboť součin distribúcií nemáme paven, neboť nedáva
dobry smysl. Vime však, že má smysl součin $m \in \mathcal{G}$
a temperované distribúcie.

$$\boxed{\text{Nechť } \varphi \in \mathcal{G} \text{ a } T \in \mathcal{G}'} \quad \text{k zavedení Fourierovy}$$

transformace $\varphi * T$ potřebujeme adjungovaná (dualní)
identita:

Pro $\varphi \in \mathcal{G}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{G}$. Pre

$$\begin{aligned} \langle \varphi * \varphi_1, \varphi_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi * \varphi_1)(x) \varphi_2(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y) \varphi_1(y) \varphi_2(x) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y) \varphi_2(x) dx \right) \varphi_1(y) dy \\ &= \langle \varphi_1, \tilde{\varphi} * \varphi_2 \rangle \quad \text{kde } \tilde{\varphi}(y) = \varphi(-y) \end{aligned}$$

ukholi:

$$\boxed{\langle \varphi * T, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} * \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{G}}$$

(Definice #1) $\uparrow$ pro $T \in \mathcal{G}'$

Tohle je dualní
identita (6)

Odešd rovnice:

$$\boxed{\mathcal{F}[\psi * T] = \hat{\psi} \hat{T}} \quad \text{pro } \psi \in \mathcal{S} \text{ a } T \in \mathcal{S}'$$

(De) Počítáme

$$\psi \in \mathcal{S} : \quad \langle \mathcal{F}[\psi * T], \varphi \rangle \stackrel{(5)}{=} \langle \psi * T, \hat{\varphi} \rangle \stackrel{(6)}{=} \langle T, \tilde{\psi} * \hat{\varphi} \rangle$$

pobíre

$$\tilde{\psi} * \hat{\varphi} \in \mathcal{S},$$

tak platí po této řadě

Fourierův inverzní vztah

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi} * \hat{\varphi}]] = \tilde{\psi} * \hat{\varphi}$$

F. transform. konvoluce
(viz str. 1/10)

$$\stackrel{(5)}{=} \langle T, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi} * \hat{\varphi}]] \rangle$$

$$\stackrel{(5)}{=} \langle \hat{T}, \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi} * \hat{\varphi}] \rangle$$

$$\stackrel{(5)}{=} \langle \hat{T}, \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}] \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}] \rangle$$

$$= \langle \hat{T}, \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}] \varphi \rangle$$

$$= \langle \hat{T}, \hat{\psi} \cdot \varphi \rangle$$

$$= \langle \hat{\psi} \hat{T}, \varphi \rangle, \text{ což dává tvrzení}$$

$$\text{nebo platí } \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}](x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(s) e^{-ix \cdot s} ds = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(-s) e^{-ix \cdot s} ds$$

$$\stackrel{s' := -s}{ds' = -ds} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(s') e^{ix \cdot s'} ds' = \hat{\psi}(x)$$

(Pozor: Uvědom si integraci:
 $(-\infty, +\infty) \rightarrow (+\infty, -\infty)$)



└

Konvoluce $f \in \mathcal{S}'$ a $\psi \in \mathcal{S}$ lze také chápat jiným
 přírodnějším způsobem. Protože pro $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$(\psi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y) f(y) dy$$

můžeme psát

$$(\psi * f)(x) = \langle f, \tau_{-x} \tilde{\psi} \rangle \quad \text{ kde } (\tau_{-x} \tilde{\psi})(y) = \tilde{\psi}(y-x) = \psi(x-y)$$

Výsledek má i val. smysl
 nejen pro $f \in \mathcal{S}$, ale i pro temperované dist. $f \in \mathcal{S}'$.

Nanic zkontroluj

$x \mapsto \langle f, \tau_{-x} \tilde{\psi} \rangle$ definuje funkci, která je C^∞ ,
 neb $\tilde{\psi} \in C^\infty$ a platí:

$$D_x^\alpha (\varphi * f)(x) = D_x^\alpha \langle f, \tau_{-x} \tilde{\varphi} \rangle = \langle f, D_x^\alpha \tau_{-x} \tilde{\varphi} \rangle = \langle f, D_x^\alpha \varphi(x-\cdot) \rangle.$$

Vidíme, že konvoluce $\varphi \in \mathcal{S}$ a $f \in \mathcal{S}'$ lze definovat podobně

$$\text{(Definice \#2)} \quad (\varphi * f)(x) := \langle f, \tau_{-x} \tilde{\varphi} \rangle$$

a tato definovaná konvoluce je C^∞ -fce (i po $f \in \mathcal{S}'$)!

Máme dvě definice konvoluce temperovaných distribucí a hladké funkce. Je vhodné ukázat, že se shodují.

$$\begin{aligned} \text{(Dk)} \quad \int (\varphi * f)(x) \varphi(x) dx & \stackrel{\text{def. \#2}}{=} \int \langle f, \tau_{-x} \tilde{\varphi} \rangle \varphi(x) dx \\ & \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{hladá fce} \\ \text{dle Def. 2}}}{=} \langle f, \int \tau_{-x} \tilde{\varphi} \varphi(x) dx \rangle \\ & = \langle f, \int \varphi(x-y) \varphi(x) dx \rangle \\ & = \langle f, \tilde{\varphi} * \varphi \rangle \stackrel{\text{def. \#1}}{=} \langle \varphi * f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Shrnutí: ① Zavedli jsme 2 definice pro konvoluci $\varphi \in \mathcal{S}$ a $f \in \mathcal{S}'$. Tyto definice se shodují. Ta druhá usnadní práci, třeba KONVOLUCE JE ZNAČUJÍCÍ PROCES. Vezměme speciální Diracovu distribuci. Pak

$$(\varphi * \delta)(x) = \langle \delta, \tau_{-x} \tilde{\varphi} \rangle = \varphi(x-y)|_{y=0} = \varphi(x)$$

Tedy $\boxed{\varphi * \delta = \varphi}$ (což koreponduje mj. s výpočtem: $\hat{\varphi * \delta} = \hat{\varphi} \cdot \hat{\delta} = \hat{\varphi} \cdot 1 = \hat{\varphi}$)

② KONVOLUCE JE ČASTÁ OPERACE. NAPŘ.

(i) Derivování je speciální případ distribuce, neboť

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} (\varphi * \delta) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} * \delta$$

(ii) Fourierův inverzní vztah lze interpretovat jako spec. případ konvoluce.

$$\text{Platí: } \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{is \cdot x} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-is \cdot y} dy ds$$

$$\boxed{f \in \mathcal{S}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-is \cdot (x-y)} ds dy = (f * g)(x) \quad \text{ kde } g(x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-is \cdot x} ds$$

$$\text{Avšak } g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \mathcal{F}^{-1}[1](x) = \delta \quad \left(g \text{ tedy není fce, ale distribuce} \right)$$

viz. ①, str. 3/20

a tedy platí

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f * \delta = f \quad \text{což je "jinf" Diracova Fourierova inverzní rovnice.}$$

$$\text{Tedy jsme ukázali: } \delta = \int_{\mathbb{R}^d} e^{is \cdot x} ds$$

Tento úkol zobecníme na del. dim.:

Je-li $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ a $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, pak

$T \otimes S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d})$ a jeho nosič je

$$\langle T \otimes S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle \langle S, \varphi_2 \rangle \quad \varphi(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_2(y)$$

KONVOLUCE DISTRIBUCÍ POTŘEBNĚ

Na stránkách 3/26 - 3/28 jsme zavedli konvoluci distribucí f a g a $\varphi \in \mathcal{D}$. V některých případech lze však povést konvoluci dvou distribucí, což si nyní uvidíme.

Pro $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$: $(f * g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$

$$\text{a } \langle f * g, \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) \varphi(x) dy dx$$

$$\stackrel{\substack{z = x-y \\ \varphi(x) = \varphi(z+y)}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(z) \varphi(y+z) dy dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2d}} (f \otimes g)(y, z) \varphi_*(y+z) dy dz$$

$$= \langle f \otimes g, \varphi_* \rangle \quad \text{ kde } \varphi_*(y+z) = \varphi(y+z)$$

pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

Problém: $\varphi_* \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+p})$ neboť zůstává nesmělejší
v druhé proměnné
(je-li posunutá)

Příklad Pond $T = \delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Pro $T \otimes S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1})$

lze být symbolicky psát

$$\delta(t, x) = \delta(t) \otimes \delta(x)$$

Tento problém lze odstranit pokud víme více o nosiči jedné či obou distribucí. Platí (viz Černý, Pólya DAF V, str. 108-110)

Věta 17.4. (o existenci konvoluce distribucí). Buď $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

(1) Pokud S má kompaktní nosič, pak $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

$$\text{a platí } \langle T * S, \varphi \rangle = \langle T \otimes S, \eta \varphi * \rangle$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \text{ a } \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \\ \text{splňující } \eta \equiv 1 \\ \text{na okolí } \text{supp } S.$$

(1') totéž platí ji-li $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ a $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ má kompaktní nosič.

(2) Je-li $d=1$ a $\text{supp } T$ a $\text{supp } S$ jsou reálné omezené. Pak $T * S$ existuje a platí

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T \otimes S, \xi \eta \varphi * \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

kde ξ, η jsou libovolné funkce, u kterých $\xi \equiv 1$ na $\text{supp } T$ resp. $\text{supp } S$ a $\eta = \xi \equiv 0$ na nějakém $(-\infty, -k)$.

(Dě) viz Černý, Pólya.

Příklad Platí pro lib. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ a $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} \langle \delta * T, \varphi \rangle &= \langle \delta \otimes T, \varphi * \eta \rangle = \langle T \otimes \delta, \varphi * \eta \rangle = \\ &= \langle T, \langle \delta, \varphi * \eta \rangle \rangle = \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Tedy } \delta * T = T.$$

(E)

Teorie distribucí (Přednáška 7)

Program 17.4 "Bump"-fce. Regularita (zhlazování) funkcí.
 Hrubota $\mathcal{D}(\Omega)$ fce $\sim L^p(\Omega)$.

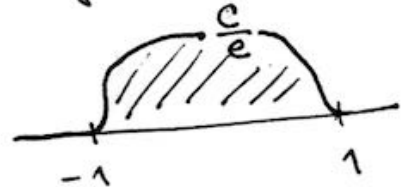
Lemma $f \in L^1_{loc}$: $\int_{\Omega} f \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow f = 0$ s.v. Ω

17.5 Řád a mocniny distribucí. Struktura distribucí.
 17.6 Součet, tenzorový součin a konvoluce distribucí.

17.4 "Bump" (málo známá) fce

$$w(x) = C \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & x \in B_1(0) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

kde $C > 0$ je takové, že
 $\int_{\mathbb{R}^d} w(x) dx = 1$



$$\Rightarrow w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d); \text{supp } w = \overline{B_1(0)}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} w dx = 1$$

$\varepsilon > 0$:

$$w_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d); \text{supp } w_{\varepsilon} = \overline{B_{\varepsilon}(0)}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} w_{\varepsilon} dx = 1$$

$y \in \mathbb{R}^d$:

$$w_{\varepsilon}(x-y) = \frac{1}{\varepsilon^d} w\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d); \text{supp } w_{\varepsilon}(\cdot - y) = \overline{B_{\varepsilon}(y)}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} w_{\varepsilon}(x-y) dx = 1$$

Cvičení Ukázat, že $T_{w_{\varepsilon}} \rightarrow \delta$ v $\mathcal{D}'$ pro $\varepsilon \rightarrow 0$

Zhlazování fce

fce $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ přivedeme f_{ε} : $f_{\varepsilon}(x) = (f * w_{\varepsilon})(x) = \int_{\mathbb{R}^d} w_{\varepsilon}(x-y) f(y) dy$
 $\Rightarrow f_{\varepsilon} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ & $\|f_{\varepsilon}\|_p \leq \|f\|_p$
 Víme: $w_{\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\Rightarrow$ také $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ (pro $1 \leq p \leq \infty$)

Platí Věta 17.2.

- (i) $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f_{\varepsilon} \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap C^{\infty}(\mathbb{R}^d); \|f_{\varepsilon}\|_p \leq \|f\|_p$ & $\|f_{\varepsilon} - f\|_p \rightarrow 0$
- (ii) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ oteví. $\Rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ je hustý v L^p
- (iii) $f \in C(\Omega)$ a $\text{supp } f \subset K$ komp. $\subset \Omega \Rightarrow f_{\varepsilon} \rightarrow f$ v K .

Tvrzení

Pro $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ platí: $\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak $f = 0$ s.v. Ω .

Důk Předpokládejme $\phi \in L^{\infty}(K), K \subset \Omega$ kompakt. Pak $\phi \in L^1$ a $\exists \phi_{\varepsilon} \in \mathcal{D}(\Omega)$ tak, že $\phi_{\varepsilon} \rightarrow \phi$ s.v. K a $\|\phi_{\varepsilon}\|_{\infty} \leq \|\phi\|_{\infty}$. Pak $\exists$ vybranou posloupnost $\phi_{\varepsilon_j} \rightarrow \phi$ s.v. K ($j \rightarrow \infty$)
 a $\|\phi_{\varepsilon_j}\|_{\infty} \leq \|\phi\|_{\infty}$. Tedy: $0 = \int_{\Omega} f(x) \phi_{\varepsilon_j}(x) dx \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx$ Vol $\phi(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \chi_K \in L^{\infty}$. Pak $0 = \int_K |f(x)| dx \Rightarrow f = 0$ s.v. v K .

17.5 Nosič a řád distribuce. Struktura distribucí

- Pro funkce $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ je $\text{supp } f := \{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$
- U distribucí, kde může mluvit o její hodnotě v x , ji třeba definovat pomocí operací:

- $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $G \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ dvě oblasti $\Rightarrow T_G: \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathbb{R}^d$ definované pomocí $\langle T_G, \psi \rangle = \langle T, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(G)$ je dostatečně potírá do $\mathcal{D}(G)$.

(zúžení T na G)

- Def T vymizí na G $\equiv \langle T, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(G)$

$$T=S \text{ na } G \equiv \langle T-S, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(G)$$

Před T vymizí na každém G_α , kde $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je soubor otevřených množin, pak T vymizí na jejich sjednocení (ne nahlédnout pomocí tvrzení o rozdělení 1 apod. na $\psi \in \mathcal{D}(\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha)$). Odsud plyne existence největší

(otevřená) množiny N_T takové, že T vymizí na N_T

Def. Nosičem distribuce T nazýváme doplněk N_T .

Platí: $\mathcal{D} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$, kde $\mathcal{E} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)\}$ a $\mathcal{A}$ polem spojitých lineárních funkcí. $\mathcal{E}' \subset \mathcal{G}' \subset \mathcal{D}'$.

$$\begin{aligned} \text{Př. } \langle \delta, \varphi \rangle &= \varphi(0) \\ \Rightarrow \langle \delta, \varphi \rangle &= 0 \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d - \{0\}) \\ \Rightarrow \text{nosič } \delta \text{ je } \{0\}. \end{aligned}$$

Uvažuj se, že $\mathcal{E}'$ jsou distribuce a kompaktním nosičem

Připomeňme:

$$T \in \begin{cases} \mathcal{D}' \\ \mathcal{G}' \end{cases} \text{ lineární}$$

$$\langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ pokud}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D} \\ \varphi_n \rightarrow 0 \text{ v } \mathcal{D} \\ \mathcal{G} \end{aligned} \right\}$$

$$\exists K: D^\alpha \varphi_n \rightarrow 0 \quad \forall \alpha$$

$$\begin{aligned} |x^\alpha D^\beta \varphi_n(x)| &\rightarrow 0 \\ &\sim \mathbb{R}^d \\ |(1+|x|)^N D^\beta \varphi_n(x)| &\rightarrow 0 \\ &\Rightarrow |\beta| = N \end{aligned}$$

Def. Řád distribuce je nejmenší $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tak, že platí: $D^\alpha \varphi_n \rightarrow 0 \quad \forall \alpha: |\alpha| \leq q \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow 0$

- Regulární distribuce a δ -distribuce jsou nulového řádu

- v.p. $\frac{1}{x}$ je distribuce řádu 1.

Struktura distribucí

Platí:

► Je-li Ω omezená, otevřená, pak $\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ platí: T má konечný řád.

► Je-li $T \in \mathcal{E}'$ (distribuce s kompaktním nosičem),
pak $\exists$ konечný spojitý funkci f_α tak, že
a pro $\forall \alpha$ $D^\alpha f_\alpha$ má komp. nosič

$$T = \sum_{\alpha} D^\alpha f_\alpha$$

↑
konечný nosič

► Je-li $T \in \mathcal{S}'$ (temperované distribuce),

pak $\exists$ konечný spojitý funkci f_α splňující $|f_\alpha(x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^N$
a

$$T = \sum_{\alpha} D^\alpha f_\alpha$$

↑
konечný nosič

► Je-li $T \in \mathcal{D}'$ (distribuce),

pak $\exists$ spojitý funkci f_α tak, že

$$T = \sum_{\alpha} D^\alpha f_\alpha$$

↑
konечný nosič

přičemž pro $\forall \Omega$ omezenou, otevřenou

je konечný počet přechodů derivací.

Příklad Před $T = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_m^{(n)}(-1)^n$ tm. $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(m)$

Víme, že $H' = \delta$ a tedy $(x^+)' = H(x)$ tedy

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(x-m)^+ \right]^{(n)} \Big|_{x=m}$$

17.6 Součet distribucí, levcový součet distribucí a konvoluce distribucí

Příklad Ukážte, že $[x\delta = 0 \vee \mathcal{D}']$ a $[x T_{v.p. \frac{1}{x}} = 1 \vee \mathcal{D}']$.

Řešení

① $\langle x\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, x\varphi \rangle = (x\varphi)(0) = 0$

② $\langle x T_{v.p. \frac{1}{x}}, \varphi \rangle = \langle T_{v.p. \frac{1}{x}}, x\varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) = \langle 1, \varphi \rangle$

Věta 17.3 (Schwartzova)

Na $\mathcal{D}'$ nelze definovat násobení (distribucí) tak, aby bylo

• komutativní, asociativní a platilo $x\delta = 0 \vee \mathcal{D}'$, a $x T_{v.p. \frac{1}{x}} = 1 \vee \mathcal{D}'$

Dů Kdyby ano, pak

$$0 = 0 T_{v.p. \frac{1}{x}} = (x\delta) T_{v.p. \frac{1}{x}} = \delta (x T_{v.p. \frac{1}{x}}) = \delta 1 = \delta, \text{ což dává}$$

pro $f, g \in L^1$ platí: $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$. Dle věty 17.3. nelze očekávat, že

by uvaž $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$ platil pro distribuce bez omezení.



Temerová součin při distribucích

$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, pak $(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y): \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$
 $f, g \in L^1 \Rightarrow f \otimes g \in L^1$ (Fubini)

Rozšíření pro distribuce
 $\langle T_{f \otimes g}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{d+p}} (f \otimes g)(x,y) \varphi(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^p} g(y) \varphi(x,y) dy \right) dx$

$= \langle T_f, \langle T_g, \varphi(x, \cdot) \rangle \rangle$
 Tedy: $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p) \Rightarrow \langle T \otimes S, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \langle S, \varphi(x, \cdot) \rangle \rangle$

Příklad Bud' $T = \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a $S = \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Pak $T \otimes S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$: $\langle T \otimes S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(t, 0) \rangle = \varphi(0, 0)$

tedy $T \otimes S = \delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \delta(t) \otimes \delta(x) = \delta(t) \delta(x)$

POTOM! NEJDE O SOUČIN DVOU DISTRIBUCÍ
 JE ČISTĚ JEJICH PRODUKT

Konvoluce temperovaných distribucí

víme: $f, g \in L^1 \Rightarrow f * g \in L^1$, $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy$

Počkejme $\langle T_{f * g}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{f(x-y) g(y)}_z \varphi(x) dx dy$

$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) g(y) \varphi(z+y) dz dy$

$= \langle f \otimes g, \varphi_* \rangle$ kde $\varphi_*(x,y) = \varphi(x+y)$

Problem: i když $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, tak $\varphi_* \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d})$

Ověření konstrukce/definice

Bud' $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d})$, $\varphi|_x \equiv 1$ pro $|x| \leq R$,
 $|D^\alpha \varphi| \leq M_\alpha$ v $\mathbb{R}^{2d}$.

Necht' existují

$\lim_{R \rightarrow \infty} \langle T \otimes S, \varphi_R * \varphi_* \rangle = C_\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

Pak funkcionál U def. $\langle T, \varphi \rangle = C_\varphi$

nazveme konvoluce T a S
 znotřine $U = T * S$

Tato komplikovaná konstrukce má zjednodušenou v následujícím případě.

Věta 17.4

(O existenci konvoluce distribucí, dle Čený, Požang)
 Bud' $T, S \in \mathcal{D}'$ nebo φ' a S má kompaktní nosič. Pak
 $T * S \in \mathcal{D}'$ a platí $\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T \otimes S, \varphi * \varphi_* \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$
 a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ splňující $\varphi = 1$ na $\text{supp } S$.

(Pi) Bud' $T, S \in \mathcal{D}'$:

$\langle \delta * T, \varphi \rangle = \langle \delta \otimes T, \varphi * \varphi_* \rangle = \langle T \otimes \delta, \varphi * \varphi_* \rangle = \langle T, \langle \delta, \varphi * \varphi_* \rangle \rangle$
 $= \langle T, \langle \delta, \varphi_* \rangle \rangle = \langle T, \varphi \rangle$

Existují jiné, ale stále konstruktivní postupy jak získat konvoluci distribuční $T \in \mathcal{D}'$ nebo $\mathcal{G}'$ a hledí funkce $\varphi \in \mathcal{D}$ nebo $\mathcal{G}$.

I

Bud $\psi \in \mathcal{G}$ a $T \in \mathcal{G}'$

Hledíme nejdříve adjungovanou (dual) identitu: $\psi, T \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \langle \psi * T, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} (\psi * T)(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y) T(y) \varphi(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} T(y) \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} T(y) \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\psi}(y-x) \varphi(x) dx \\ &= \langle T, \tilde{\psi} * \varphi \rangle \end{aligned}$$

$\tilde{\psi}(z) := \psi(-z)$

$\tilde{\psi} * \varphi \in \mathcal{G} \Rightarrow$ pravé straně má smysl pro $T \in \mathcal{G}'$

Ue tedy přidat do naší sady identit:

Def #2
 $T \in \mathcal{G}'$

$\langle \psi * T, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\psi} * \varphi \rangle$ kde $\tilde{\psi}(z) = \psi(-z)$
 $\varphi \in \mathcal{G}$

Dokážeme, že platí:

Je-li $\psi \in \mathcal{G}, T \in \mathcal{G}'$, pak $\widehat{\psi * T} = \hat{\psi} \hat{T}$

(D₂) $\langle \widehat{\psi * T}, \varphi \rangle \stackrel{(5)}{=} \langle \psi * T, \hat{\varphi} \rangle \stackrel{(6)}{=} \langle T, \tilde{\psi} * \hat{\varphi} \rangle$

Na $\mathcal{G}$ platí i inverzní Fourierův vztah

$= \langle T, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi} * \hat{\varphi}]] \rangle$
 $= \langle \mathcal{F}[T], \mathcal{F}^{-1}[\hat{\psi}] \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}] \rangle = (*)$

Počítáme $\mathcal{F}^{-1}[\hat{\psi}](x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(s) e^{+2\pi i x \cdot s} ds = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(-s) e^{+2\pi i x \cdot s} ds$
 $s' = -s \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \psi(s') e^{-2\pi i x \cdot s'} ds' = \tilde{\psi}(x)$

$(*) = \langle \hat{T}, \hat{\psi} \hat{\varphi} \rangle \stackrel{(4)}{=} \langle \hat{\psi} \hat{T}, \hat{\varphi} \rangle$



II Bud $\psi \in \mathcal{G}, T \in \mathcal{G}'$

Konvoluci lze zavést i pro primárníjším

problém. Je-li totiž $T \in \mathcal{G}$ pak

$(\psi * T)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y) T(y) dy = \langle T, \sigma_{-x} \tilde{\psi} \rangle$ kde
 $(\sigma_{-x} \tilde{\psi})(y) = \tilde{\psi}(y-x) = \psi(x-y)$

Nanic však výraz vpravo má smysl i pro $T \in \mathcal{G}'$

Tedy

Def #3

$\psi \in \mathcal{G}, T \in \mathcal{G}' : \psi * T = \langle T, \sigma_{-x} \tilde{\psi} \rangle$

(*) Nanič, zobrazu
 $x \mapsto (\psi * T)(x)$ tm. zobrazu $x \mapsto \langle T, \tau_{-x} \tilde{\psi} \rangle \in \mathbb{C}$
 a tedy konverguje distribúcia $\Delta \mathbb{C}^\infty$ -fci dáva $\mathbb{C}^\infty$ -fci.
 (regulárnej distribúcia)

Pro $\psi \in \mathcal{G}$ a $T \in \mathcal{G}'$ máme dve definície konverguje. Ukážime,
 že se shodujú:

$$\begin{aligned} \langle \psi * T, \varphi \rangle &\stackrel{\text{def 3}}{=} \int (\psi * T)(x) \varphi(x) dx \\ &\stackrel{\text{dli}(\psi) \text{ j} \psi * T \in \mathbb{C}^\infty}{=} \int \langle T, \tau_{-x} \tilde{\psi} \rangle \varphi(x) dx \\ &= \langle T, \int (\tau_{-x} \tilde{\psi}) \varphi(x) dx \rangle \\ &= \langle T, \int \underbrace{\psi(x-y)}_{\tilde{\psi}(y-x)} \varphi(x) dx \rangle \\ &= \langle T, \tilde{\psi} * \varphi \rangle \stackrel{\text{def 2}}{=} \langle \psi * T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

□

17.7 Distribúcie a Fourierov rady

TVARU Nech $|a_k| \leq A|k|^q + B$, kde $A, B \geq 0, q \geq 0, k \in \mathbb{Z}$,
 pak řada $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k x}$ konverguje v $\mathcal{G}'$

(D) Ukážime řadu $\sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \frac{a_k}{(2\pi i k)^{q+2}} e^{2\pi i k x} =: \check{R}(x)$

pak $|\check{R}(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \frac{|a_k|}{2\pi |k|^{q+2}} \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|k|^2} < \infty$

a tedy $|\langle \check{R}(x), \varphi(x) \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} \check{R}(x) \varphi(x) dx \right| \leq \tilde{C} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| dx < +\infty.$

$\mathbb{R}$ Naše řada konverguje $(q+2) \times$ Aditivně řady $\check{R}$, j. když distribúce v $\mathcal{G}'$.

□

Speciálně: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k x}$ konverguje v $\mathcal{G}'$

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i k x}$ konverguje v $\mathcal{G}'$

Poissonův sčítací vzorec Víme, že $\mathcal{F}[\delta] = 1$. Pomocí translačního vztahu nebo z definice tak platí

$$\mathcal{F}[\delta_y](s) = e^{-2\pi i y \cdot s}$$

Nechť po zjednodušení vejde $d=1$ Uvažme předchozí vztah pro $y=k$, $k \in \mathbb{Z}$ a provedme součet přes k :

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k\right](s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i k s}$$

tento součet definuje legitimní temperovanou distribuci představující nekonečný "hřebek" rovnoměrně umístěných hmotných bodů.

Řada vpravo vypadá komplikovaně, ale uvažme, že tomu tak není. Naopak dostaneme stejnou sumu jako vlevo, tedy:

(P)
$$\mathcal{F}\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k\right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \quad \text{v } \mathcal{S}'$$

Poissonův
sumační
vzorec

Odvození Součet $\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i k s}$ neexistuje v klasickém smyslu. K odvození využijeme metodu periodizace: pro $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ nebo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definujeme

(★)
$$P f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x-k)$$

Pak $P f$ je 1-periodická fce. Kečová otázka, která vede k vzorci (P), jistě je vztah mezi koefficienty c_k Fourierovy řady fce $P f$ a Fourierovou transformací f ?

Víme (viz vzorce na A2cátlu kapitoly 16), že

$$c_k = \sqrt{2\pi} \int_0^1 P f(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

$$\text{a } P f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{2\pi i k x}}{\sqrt{2\pi}}$$

Dosazení (★):

$$c_k = \sqrt{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(x-j) e^{-2\pi i k x} dx$$

$$= \sqrt{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-j}^{-(j-1)} f(y) e^{-2\pi i k y} dy$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{2\pi i k y} dy = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k)$$

substituce
 $y = x-j$

$k, j \in \mathbb{Z}$
 $e^{2\pi i k j} = 1$

Tedy

$P f(x)$ je dána jdnou řádkou (★) a tak
$$P f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

Dosaadim $x=0$ do obou řad dohromady

$$(*) \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)$$

pravidlo po práci F.T. na $\mathcal{G}'$

což lze napřít tak!

$$\left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k, f \right\rangle = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k, \hat{f} \right\rangle = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k, f \right\rangle$$

pro $f \in \mathcal{G}$
(nebo $\neq \mathcal{D}$)

což dává slibovaný Poissonův vzorec P.

Pro $d > 1$ lze postupovat velmi podobně a říkat vztahy po periodické mřížce (samy)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(k)$$

↑
d-tice celých čísel

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \delta_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \delta_k$$

tento vztah budeš neplatit univerzálně (pro $f \in \mathcal{G}$ a $\mathcal{D}$)

Existují funkce, kdy obě řady konvergují absolutně, ale k jinému číslu.

Aplikace

- teorie čísel
- krystalografie
- pozoruhodné vztahy

(vlastně periodické mřížky)

pro $\hat{f}$ lze explicitně spočítat

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 k^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 k^2} (k) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$$

např.

δ_0 atom v $\mathcal{G}$
 $\hat{f}$ výstup v $\mathcal{G}'$