Zavedení plošných integrálů

[1] Plošný integrál 1. druhu

$$\int_S f \, dS \quad \text{kde } f \text{ je skalár}$$

$S = \langle \varphi(I) \rangle$

význam: $f = 1 \Rightarrow$ obsah plochy S

$f = \varrho \Rightarrow$ hmotnost plochy S

[2] Plošný integrál 2. druhu

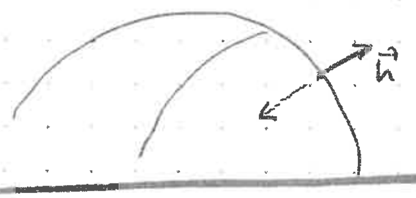
$$\int_S \vec{f} \cdot \vec{dS} \quad \text{kde } \vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\| $$

převod na plošný integrál 1. druhu

$$\int_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS$$

význam: tok veličiny $\vec{f}$ přes plochu S



Q: Jak plošné int. počítat?

Platí tvrzení: ~~Křivkový integrál nezávisí na volbě regulární parametrizace.~~

Je-li $\boxed{k=2}$ a $\boxed{d=3}$ tak zavádíme **plošný integrál**

Motivováni popisem sférických a cylindrických souřadnic definujeme plochu v $\mathbb{R}^3$ a její parametrizaci takto:

Def. Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}^3$ je regulární plocha

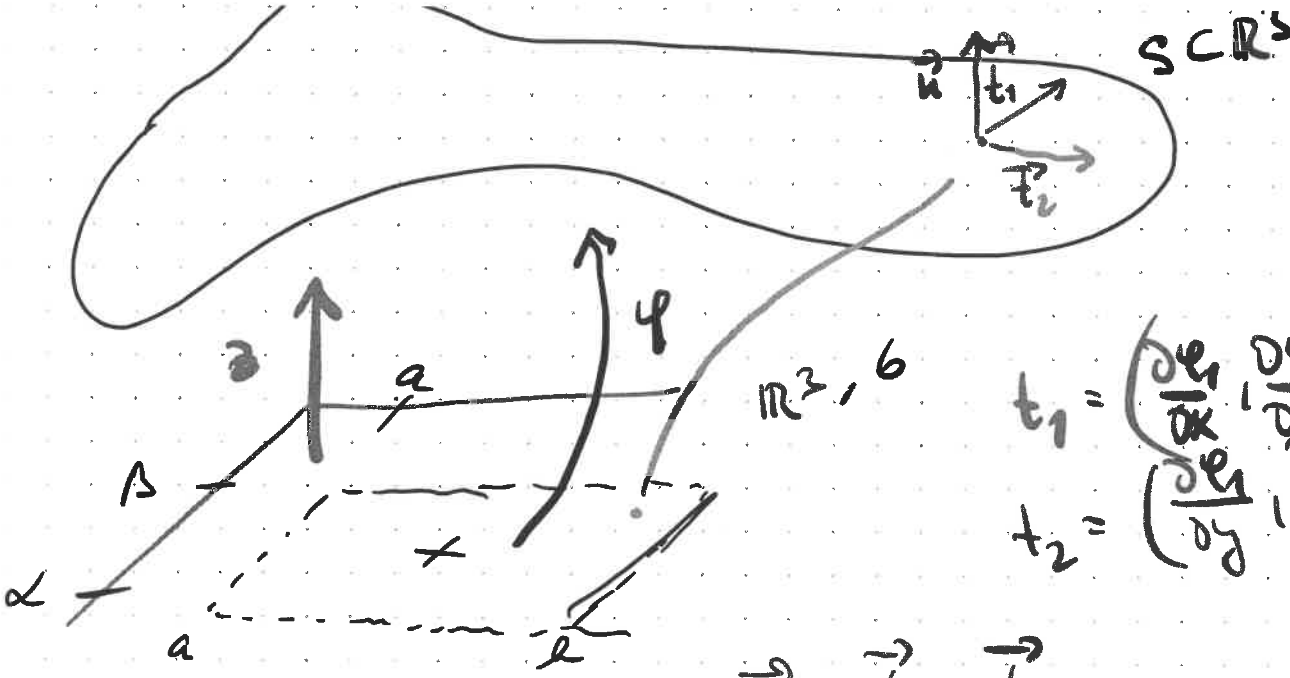
$\boxed{\varphi}$ regulární parametrizace plochy S

$\equiv$ existuje-li zobrazení $\varphi : I \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tak, že ($I = (a,b)\times(\alpha,\beta)$)

- $\varphi(I) = S$
- $\varphi \in C^1(I)$
- φ je prosté
- $D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{pmatrix}$ má ve všech bodech I hodnost 2.

$\vec{\varphi}(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \varphi_3(x,y))$

$\vec{t}$ $\vec{v}$



$$t_1 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right)$$

$$t_2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\right)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{t_1} \times \vec{t_2}}{|\vec{t_1} \times \vec{t_2}|_2}$$

"Motivace" $\displaystyle\int_S dS = \int_I \sqrt{1 + |\nabla z|^2}$

$\varphi: (x, y) \longmapsto (x, y, z(x, y))$ plocha generovaná fcí jako graf funkce $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x}, \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \vec{t_1} \times \vec{t_2} =$$

$$= \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) \Rightarrow \vec{V}$$

velikost $\vec{V} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + |\nabla z|^2}$

Tedy

$\boxed{\text{1. DRUHU}}$

$$\boxed{\int_S f\,dS \overset{def}{=} (\mathcal{L})\int_I f(\vec{\varphi}(x,y)) \Bigg| \underbrace{\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x}}_{\vec{t}} \times \underbrace{\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}}_{\vec{r}} \Bigg| \, dx\,dy}$$

$\boxed{\text{2. DRUHU}}$

$$\boxed{\int_S \vec{f}\cdot d\vec{S}} = \int_S \vec{f}\cdot\vec{n}\, ds$$

$$= \int_I \vec{f}(\varphi(x,y)) \cdot \frac{\vec{t}_{(x,y)} \times \vec{r}_{(x,y)}}{\cancel{|\vec{t}_{(x,y)} \times \vec{r}_{(x,y)}|}} \cancel{|\vec{t}_{(x,y)} \times \vec{r}_{(x,y)}|} \, dx\,dy$$

$$\boxed{= (\mathcal{L})\int_I \vec{f}(\vec{\varphi}(x,y)) \cdot \Big(\underbrace{\frac{\partial \vec{\varphi}(x,y)}{\partial x}}_{\vec{t}(x,y)} \times \underbrace{\frac{\partial \vec{\varphi}(x,y)}{\partial y}}_{\vec{r}(x,y)} \Big) \, dx\,dy}$$

$\boxed{\text{Pozorování}}$ Počítejme $|\vec{t}\times\vec{r}|$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{t}\times\vec{r}|^2 = \underbrace{(t_2r_3 - t_3r_2,\ t_3r_1 - t_1r_3,\ t_1r_2 - t_2r_1)}\cdot(\qquad)$$

$$= t_2^2r_3^2 + t_3^2r_2^2 + t_3^2r_1^2 + t_1^2r_3^2 + t_1^2r_2^2 + t_2^2r_1^2$$
$$- 2t_2t_3r_2r_3 - 2t_1t_3r_1r_3 - 2t_1t_2r_1r_2$$
$$= (t_1^2+t_2^2+t_3^2)(r_1^2+r_2^2+r_3^2) - (t_1r_1+t_2r_2+t_3r_3)^2$$
$$= |\vec{t}|^2|\vec{r}|^2 - (\vec{t}\cdot\vec{r})^2$$
$$= \det\begin{pmatrix} |\vec{t}|^2 & \vec{t}\cdot\vec{r} \\ \vec{t}\cdot\vec{r} & |\vec{r}|^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vec{t}\cdot\vec{t} & \vec{t}\cdot\vec{r} \\ \vec{r}\cdot\vec{t} & \vec{r}\cdot\vec{r} \end{pmatrix}$$

kvadrát velikosti "normálového" vektoru je roven determinant matice 2x2

Zobecnění $\vec{t}_1,\dots,\vec{t}_k$ k-vektorů v $\mathbb{R}^d$ $1\le k<d$, kde $(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b}$

Matice

$$\begin{array}{cc} k\text{-řádků} & \underbrace{\begin{pmatrix} (\vec{t}_1,\vec{t}_1) & (\vec{t}_1,\vec{t}_2) & \cdots & (\vec{t}_1,\vec{t}_k) \\ (\vec{t}_2,\vec{t}_1) & (\vec{t}_2,\vec{t}_2) & \cdots & (\vec{t}_2,\vec{t}_k) \\ \vdots & & & \\ (\vec{t}_k,\vec{t}_1) & (\vec{t}_k,\vec{t}_2) & \cdots & (\vec{t}_k,\vec{t}_k) \end{pmatrix}}_{k\text{-sloupců}} \end{array}$$

Gramova matice

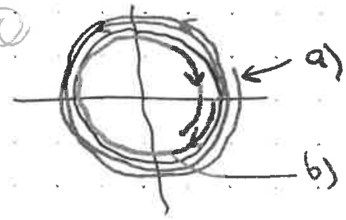
(Determinant Gramovy matice) je to zobecnění $|\vec{t}_1 \times \vec{r}|$ pro zobecněné k-plochy v $\mathbb{R}^d$
$k>2$, $d>3$

~~**Př.** Buď $I = \int_{\partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^2} x\,dy - y\,dx = \int_{\partial B_1(0)} (-y,x)\cdot(dx,dy)$~~ ~~$\vec{f}(x,y) = (-y,x)$~~

~~a uvaž $\boxed{k\in\mathbb{N}}$~~

~~a) $\varphi: (0,2k\pi) \xrightarrow{\text{na}} \partial B_1(0)$: $t \longmapsto (\cos kt, \sin kt)$~~

~~b) —||— : $t \longmapsto (\cos t, -\sin t)$~~



~~Výpočet~~

~~ad a) $I = \int_0^{2k\pi} (-\sin t, \cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt = 2k\pi$~~

~~ad b) $I = \int_0^{2k\pi} (\sin t, \cos t)\cdot(-\sin t, -\cos t)\,dt = -2k\pi$~~

~~Vidíme, že výsledek záleží na "počtu oběhnutí" a orientaci. Ukazuje se, že tohle jsou jediné podezřelé situace, na které je třeba dávat pozor.~~

Malinko obecněji o regulárních plochách dimenze k v $\mathbb{R}^d$

Def. $S \subseteq \mathbb{R}^d$ je regulární plocha dimenze k

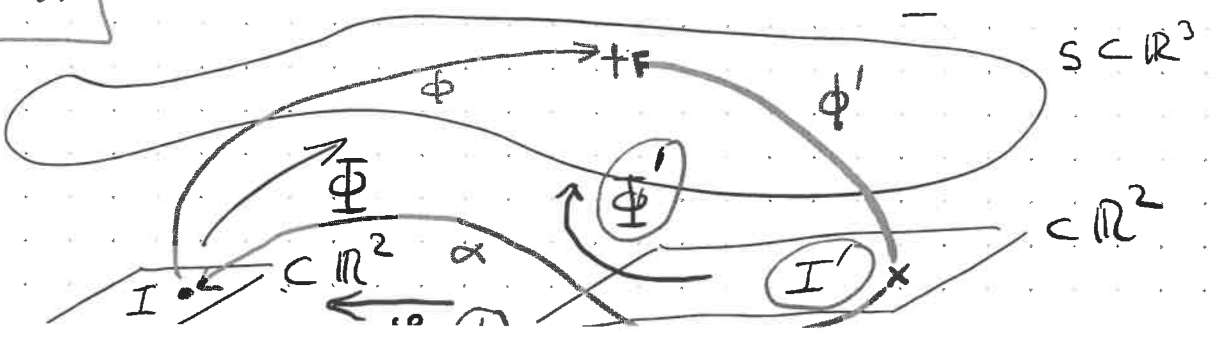
$\overset{\text{def}}{\equiv}$ $\exists\, I \subseteq \mathbb{R}^k$ a $\exists\, \Phi: I^\circ \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tak, že

- Φ je hladké ($\Phi \in C^\infty(I^\circ)$ nebo $\Phi \in C^1(I^\circ)$)
- $\Phi(I) = S$
- Φ je prosté
- $$\frac{\partial(\Phi_1,\dots,\Phi_d)}{\partial(u_1,\dots,u_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_d}{\partial u_1} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_k} & \cdots & \frac{\partial \Phi_d}{\partial u_k} \end{pmatrix}$$ d sloupců, k řádků

  má hodnost k všude v I°.

Φ je regulární parametrizace plochy S

$\boxed{\phi' = \phi \circ \alpha}$



Def $\varphi : I' \to I$, kde $I, I' \subset \mathbb{R}^k$ otevřené

je **difeomorfismus** $\overset{def}{\equiv}$ $\varphi : I' \to I$ je
- prosté
- na
- hladké (C^1 nebo C^∞)
- φ^{-1} je hladké

$\boxed{\text{KOUKNI: } \cancel{\text{Věta 8.31}}}$

Def • Dvě **parametrizace** ϕ, ϕ', kde $\Phi : I \to \mathbb{R}^d$ ($I \subset \mathbb{R}^k$), $\Phi(I) = S$
$\phi' : I' \to \mathbb{R}^d$, $\phi(I') = S$

jsou **souhlasně orientované** $\equiv$ $\exists\, \alpha : I' \to I$ difeomorfismus tak, že $\det J_\alpha > 0$ a
$\phi' = \phi \circ \alpha$

$$J_\alpha = \frac{\partial(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}{\partial(u_1', \dots, u_k')}$$

• Pokud $\exists\, \alpha : I' \to I$ difeomorfismus tak, že $\phi' = \phi \circ \alpha$ a $\det J_\alpha < 0$, pak ϕ, ϕ' jsou **nesouhlasně orientované**

$\boxed{\text{Platí Tvrz.}}$ Existují právě dvě třídy ekvivalence regulárních parametrizací reg. ploch dim. k.

Def. • S je **orientovaná plocha** $\equiv$ pokud S je reg. plocha dim k a k S je přiřazena jedna z tříd ekvivalence.
Jakékoliv dvě parametrizace z této třídy jsou dle definice **kladně orientované** parametrizace, píšeme $\phi \sim \phi'$

• Je-li S orientovaná plocha, pak $-S$ nebo $\ominus S$ označuje tutéž plochu opatřenou druhou třídou ekvivalentních reg. ploch.

Př.

$$S = \phi(t, \theta) = (\cos t \cos\theta, \sin t \cos\theta, \sin\theta) : \underbrace{\overset{t}{(0, 2\pi)} \times \overset{\theta}{\left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)}}_{I} \to \mathbb{R}^3$$

$$= \Phi(t, \theta) = \phi(\theta, t) = (\cos\theta \cos t, \sin\theta \cos t, \sin t) : \underbrace{\underset{\theta}{\left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)} \times \underset{t}{(0, 2\pi)}}_{I'} \to \mathbb{R}^3$$

$$\alpha : I' \to I : (\theta, t) \longmapsto (t, \theta)$$

$$\det J_\alpha \overset{\det}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\Rightarrow \phi \not\sim \phi'$$

Otázka: Jak definovat plošné integrály po ploch dimense k ($k > 2$) v prostoru $\mathbb{R}^d$, $d > 3$. ?

INTEGRÁL PŘES k-plochu v dimenzi d

Definice

$\mathbb{R}^d \supseteq S = \Phi(I)$ - regulární k-plocha $I \subseteq \mathbb{R}^k$

$$\int_S f \, dS := \int_I f(\Phi(x_1, \dots, x_k)) \sqrt{\det G(\nabla \Phi)} \, dx_1 \dots dx_k$$

kde
$$G(\nabla \Phi) = \begin{pmatrix} \partial_1\Phi \cdot \partial_1\Phi & \cdots & \partial_1\Phi \cdot \partial_k\Phi \\ \partial_2\Phi \cdot \partial_1\Phi & \cdots & \partial_2\Phi \cdot \partial_k\Phi \\ \vdots & & \\ \partial_k\Phi \cdot \partial_1\Phi & \cdots & \partial_k\Phi \cdot \partial_k\Phi \end{pmatrix}$$

Grammova matice

Pokud $k = d-1$, definujeme integrál 2. druhu

$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{f} \cdot \vec{\nu}) \, dS$$

kde $\vec{\nu}$ - je vektor normály -

- udávající orientaci

PŘ: POVRCH PLÁŠTĚ 3-kužele v $\mathbb{R}^5$

parametrizace $\Phi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi, \rho, \rho)$

$$\rho \in [0,1], \quad \theta \in [0,2\pi] \quad \varphi \in [0,\pi]$$

"KUŽEL" jehož podstava je 3-d koule v 5 dimenzích

$$\text{POVRCH} = \int_S 1\, dS = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{\det G(\Pi\theta)}\, d\varphi\, d\theta\, d\rho = \underset{(*)}{\longrightarrow}$$

$$\partial_\rho\Phi = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi, 1, 1)$$
$$\partial_\varphi\Phi = (\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\cos\varphi\sin\theta, -\rho\sin\varphi, 0, 0)$$
$$\partial_\theta\Phi = (-\rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, 0, 0, 0)$$

$$G = \begin{pmatrix} \partial_\rho I\cdot\partial_\rho I & \partial_\rho I\cdot\partial_\varphi I & \partial_\rho I\,\partial_\theta I \\ \partial_\rho I\cdot\partial_\varphi I & \partial_\varphi I\cdot\partial_\varphi I & \partial_\varphi I\cdot\partial_\theta I \\ \partial_\rho I\cdot\partial_\theta I & \partial_\varphi I\cdot\partial_\theta I & \partial_\theta I\cdot\partial_\theta I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2\sin^2\varphi \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(*) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\det G(D\phi)} \, d\varphi \, d\theta \, d\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{3\rho^4 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \, d\theta \, d\rho$$

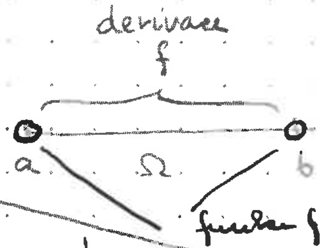
$\varphi \in (0, \pi)$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho =$$

$$= 4\sqrt{3}\pi \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi$$

▷ Existují, a to v dimenzi 3, několik vzorců, které spojují objemové, plošné a křivkové integrály. Tyto mají zobecňují Newtonův vzorec

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



Věta o potenciálu

Nechť $\vec{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ má potenciál: $\exists U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\vec{f} = \nabla U$

$$\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \vec{ds}$$

$$\parallel \text{ def. křivk. int. 2. druhu}$$

$$\int_a^b \vec{f}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t)\,dt$$

$$\parallel$$

$$\int_a^b \nabla U(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^d \frac{\partial U(\vec{\varphi}(t))}{\partial x_i} \varphi_i'(t)\,dt$$

řetízkové pravidlo

$U(x_1, \dots, x_d)$

$$\stackrel{\text{ř}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt}\left[U(\vec{\varphi}(t)) \right] dt$$

$$\stackrel{\text{Newtonův vzorec}}{=} U(\vec{\varphi}(b)) - U(\vec{\varphi}(a))$$

Tedy:

$$\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \vec{ds} = U(\vec{\varphi}(b)) - U(\vec{\varphi}(a))$$

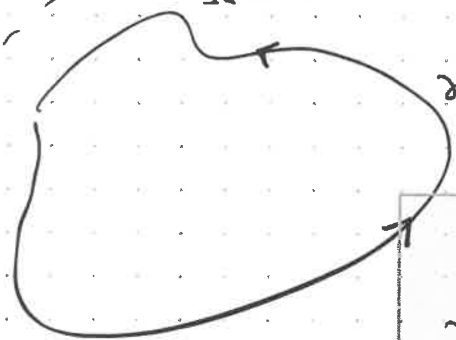
UŽ BYLO

$\boxed{\mathbb{R}^2}$ body, křivky, 2d oblasti — Zbývá 2D otevřená množina souvislá

$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (f_1(x,y), f_2(x,y))$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$



$\partial\Omega$ ... tvoří hraniční křivku

GREENOVA VĚTA

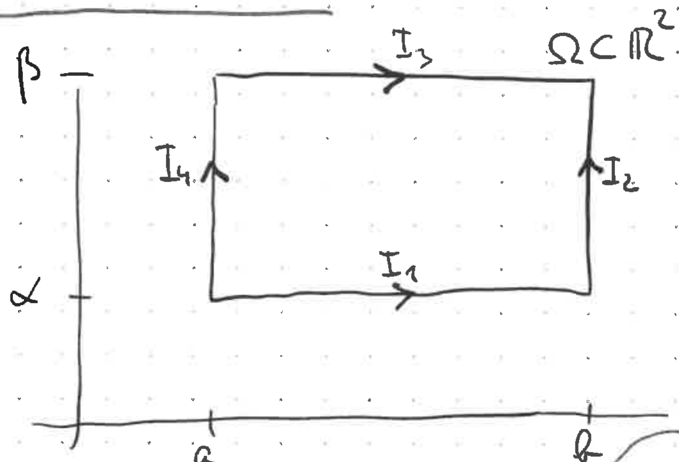
Platí:

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{ds}}_{\text{křivkový int. 2. druh}} = \underbrace{\int_{\Omega} \Big(\underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}}_{\operatorname{curl} \vec{f}}\Big)\, dx\, dy}_{\text{dvourozměrný Leb. } \int}$$

skalár ve 2D

$$\boxed{\operatorname{curl} \vec{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}}$$

Proč vzorečku věřit?



$\Omega = (a,b) \times (\alpha, \beta)$

		$\vec{t} = (t_1, t_2)$
I_1	$s \in (a,b) \longmapsto (s, \alpha)$	$(1,0)$
I_2	$s \in (\alpha,\beta) \longmapsto (b, s)$	$(0,1)$
I_3	$s \in (a,b) \longmapsto (s, \beta)$	$(1,0)$
I_4	$s \in (\alpha,\beta) \longmapsto (a, s)$	$(0,1)$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_{I_1 \oplus I_2 \ominus I_3 \ominus I_4} (f_1 t_1 + f_2 t_2)\, ds = \int_{I_1} \dots + \int_{I_2} \dots - \int_{I_3} \dots - \int_{I_4} \dots$$

$$= \int_a^b f_1(s,\alpha) + \int_\alpha^\beta f_2(b,s) - \int_a^b f_1(s,\beta) - \int_\alpha^\beta f_2(a,s)$$

$$\overset{\text{2x Newt.}}{=} \int_\alpha^\beta \int_a^b \frac{\partial f_2}{\partial x}(\tau, s)\, d\tau\, ds - \int_a^b \int_\alpha^\beta \frac{\partial f_1}{\partial y}(s, \xi)\, d\xi\, ds$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \int_\alpha^\beta \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x}(u,v) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(u,v)\Big)\, dv\, du$$

$$= \int_\Omega (\operatorname{curl} \vec{f})\, dv\, du.$$

$\boxed{\Sigma}$

$\boxed{\mathbb{R}^3}$ body, křivky, plochy, 3d-oblasti → Gauss

Stokes ("Green ve 3D")

věta o potenciálu

Stokesova věta

$G \subset \mathbb{R}^3$ plocha (dim 2) a její hranice

$\partial G \subset \mathbb{R}^3$ křivka (dim 1)

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \mapsto (F_1(\dots), F_2(\dots), F_3(\dots))$

$$\underbrace{\int_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{ds}}_{\text{křivkový } \int \text{ 2. druhu}} = \underbrace{\int_{G} \operatorname{curl} \vec{F} \cdot \vec{dS}}_{\text{plošný } \int \text{ 2. druhu}}$$

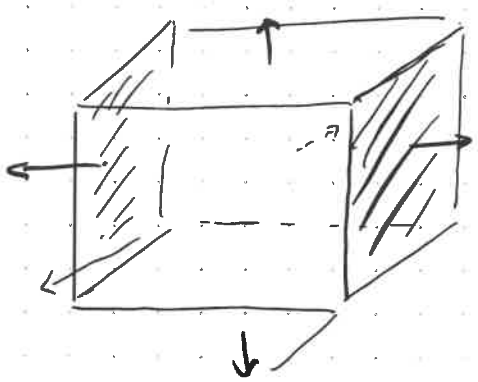
$$\operatorname{curl} \vec{F} = -\left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y}, \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right)$$

Gaussova věta

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a její hranice $\partial\Omega$, tj. plocha dim 2 v $\mathbb{R}^3$.

Platí

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{dS}}_{\text{plošný } \int \text{ 2. druhu}} = \underbrace{\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz}_{\text{3-rozměrný Lebesg. } \int}$$



a   b

Q: Dají se tyto rovnosti ① nahlédnout jako důsledky jediné formule

② zobecnit do vyšších dimenzí?

Ano   V jazyce dif. forem:

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} F = \int_{\Omega} dF}$$

Důsledky Gaussovy věty

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec F = \int_{\partial\Omega} \vec F \cdot \vec n \, dS$$

Speciálně $\vec F = (0, \dots, f, \dots, 0) \subset \mathbb{R}^3$

(f na i-té místo)

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx = \int f n_i \, dS}$$

Volbou $f = uv$

$\Downarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

Integrace per partes pro fce více prom.

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v = \int_{\partial\Omega} u v n_i \, dS - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}}$$

Pozorují: $\underline{(-\Delta u) v} = -\operatorname{div}(\nabla u) v = -\operatorname{div}(\underbrace{v \nabla u}_{\vec F}) + \underline{\nabla v \cdot \nabla u}$

Pak po integraci přes Ω

$$\int_\Omega (-\Delta u) v \, dx = -\int_\Omega \operatorname{div}(v \nabla u) \, dx + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dx$$

$\downarrow$ Gauss

$$= -\int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n \, dS + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dx$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u \cdot n = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int_\Omega (-\Delta u) v = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS}$$

$\Downarrow$

$$\int_\Omega (-\Delta v) u = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n}$$

A tedy

$$\boxed{\int_\Omega (-\Delta u) v - (-\Delta v) u = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS}$$

Aplikace ve variačním počtu

Uvaž: $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a definujme pro dané fce $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$

funkcionál:

$$\boxed{\Phi[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega fu - \int_{\partial\Omega} gu}$$

Dirichletův integrál

Q: <u>nalézt E-L. rovnici</u>

Je-li u bodem lok. max./minima $\Rightarrow$ $\delta\Phi[u](h) = 0 \quad \forall h \in \underline{X}$

[<u>Poznámka:</u> Dříve jsme pracovali s C^1-fcemi na $\overline{\Omega}$.
Nyní máme k dispozici i funkce, pro které $\underline{|\nabla u|^2 \in L}$, $\underline{fu \in L}$, $\underline{gu \in L}$

$$\delta\Phi[u](h) := \lim_{t\to 0} \frac{\Phi[u+th] - \Phi[u]}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big\{ \frac{1}{2}\int_\Omega \underbrace{|\nabla(u+th)|^2 - |\nabla u|^2} - \int_\Omega \overbrace{\big(f(u+th) - fu\big)}^{tfh} - \int_{\partial\Omega} \underbrace{g(u+th) - gu}_{tgh} \Big\}$$

$$(\nabla u + t\nabla h)\cdot(\nabla u + t\nabla h) = |\nabla u|^2 + 2t\nabla u\cdot\nabla h + t^2|\nabla h|^2$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\cancel{t}} \int_\Omega \cancel{2}\nabla u\cdot\nabla h + \frac{t}{2}\underbrace{\int_\Omega |\nabla h|^2}_{<+\infty} - \int_\Omega fh - \int_{\partial\Omega} gh$$

$t \to 0+$: $\searrow 0$

$\Rightarrow$

$$\delta\Phi[u](h) = 0 \ \forall h \iff \boxed{\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla h - \int_\Omega fh - \int_{\partial\Omega} gh = 0 \quad \forall h \text{ např. } \in C^1(\overline{\Omega})}$$

Integrace per-partes ✓

$$(\star) \Rightarrow \int_\Omega -\Delta u\, h + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} h\, dS - \int_\Omega fh - \int_{\partial\Omega} gh\, dS = 0 \quad \Leftarrow \star \qquad \forall h \in C^1(\overline{\Omega})$$

Volbou $h \in C^1(\overline{\Omega})$ ale $h|_{\partial\Omega} = 0$

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f)\, h \, dx = 0 \qquad \forall h$$

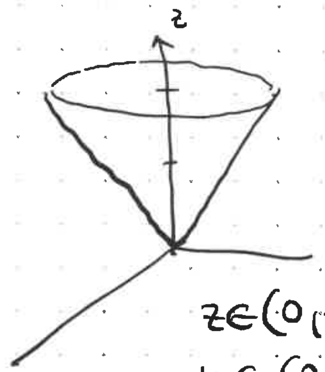
Dle zákl. lemmy variačního počtu $\boxed{-\Delta u = f \text{ v } \Omega}$

Dosazením této rovnice zpět do (Σ☆) zbude

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g\right) h \, dS = 0 \qquad \forall h \in C^1(\overline{\Omega})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ na } \partial\Omega}$$

$\boxed{\text{Př. 1}}$ Spočítejte obsah kuželové plochy



$z \in (0,1)$
$u \in (0,2\pi)$

$$\vec{\varphi} : (u,z) \longmapsto (z\cos u, z \sin u, z)$$

$$\vec{t} := \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} = (-z \sin u, z\cos u, 0)$$

$$\vec{r} := \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial z} = (\cos u, \sin u, 1)$$

$|\vec{t} \times \vec{r}|$ a víme, že $|\vec{t} \times \vec{r}|^2 = \det G$,

$$G = \begin{pmatrix} t\cdot t & t\cdot r \\ t \cdot r & r \cdot r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \det G = 2z^2$$

$$S = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{2} z \, dz \right) du = 2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\sqrt{2}\pi}}$$

Př. 2) Spočtěte $I = \int_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$

S ... sféra v $\mathbb{R}^3$ o pol. 1.

Řeš.

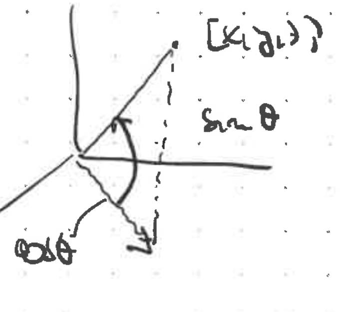
$$I = \int_S \underset{(x,y,z)}{\vec F(x,y,z)} \cdot \vec n \, dS$$

$$\vec n = (n_x, n_y, n_z) = (dy\,dz, dz\,dx, dx\,dy)$$

$x = \cos\varphi \cos\theta \qquad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \sin\varphi \cos\theta \qquad \varphi \in (0, 2\pi)$

$z = \sin\theta$



$\vec t = (-\sin\varphi\cos\theta, \cos\varphi\cos\theta, 0) \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi}$

$\vec r = (-\cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\sin\theta, \cos\theta) \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}$

$$\vec t \times \vec r = \Big(\cos\varphi\cos^2\theta, \sin\varphi\cos^2\theta, \underbrace{\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta + \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta}_{\sin\theta\cos\theta}$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} (\vec t \times \vec r)\cdot \vec F(x,y,z)\, d = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\varphi\cos^3\theta + \sin^2\varphi\cos^3\theta + \sin^2\theta\cos}_{\cos\theta}$$

$$= 4\pi$$