

Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: _____ Cvičící: _____

Otázka	1	2	3	Body
Maximum bodů	6	6	8	20
Získané body				

[6] 1. Necht' $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je interval a necht' $f_n, g_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou posloupnosti funkcí na (a, b) .

- Definujte, co znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje [1 bod]
 - bodově na (a, b) ,
 - stejnoměrně na (a, b) .
- Formulujte Bolzano–Cauchyovu podmínku pro konvergenci řady funkcí a dokažte ji (ukážete ekvivalenci). [2 body]
- Uveďte nutnou podmínku pro stejnoměrnou konvergenci řady funkcí a dokažte ji. [1 bod]
- Formulujte Leibnizovu větu o stejnoměrné konvergenci řad funkcí a dokažte ji. [2 body]

Řešení:

- Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje **bodově** na (a, b) , jestliže pro každé $x \in (a, b)$ konverguje číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \iff \exists s(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

- Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje **stejnoměrně** na (a, b) , jestliže posloupnost částečných součtů

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

konverguje stejnoměrně k s na (a, b) , tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in (a, b)} |s_n(x) - s(x)| \right) = 0. \quad (1)$$

- Bolzano–Cauchyova podmínka.** Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na (a, b) právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m > n \geq n_0 \forall x \in (a, b) \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Důkaz: Bolzano–Cauchyova podmínka se dá ekvivalentně přepsat v řeči posloupnosti částečných součtů jako

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m > n \geq n_0 \forall x \in (a, b) |s_n(x) - s_m(x)| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Chceme tedy ukázat ekvivalenci (1) a (2). Z definice můžeme přepsat (1) jako

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in (a, b) |s_n(x) - s(x)| \leq \varepsilon. \quad (3)$$

Důkaz, že (3) $\implies$ (2), je přímý důsledek trojúhelníkové nerovnosti

$$|s_n(x) - s_m(x)| \leq |s_n(x) - s(x)| + |s(x) - s_m(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Obráceně, pokud je splněna (2) potom pro každé pevné x je posloupnost $s_n(x)$ Cauchyovská a má tedy limitu $s(x)$. Ukážeme, že limita je stejnoměrná. Použijeme (2) pro $\varepsilon > 0$ fixujeme n_0 . Potom pro každé $n, m > n_0$ a každé $x \in (a, b)$ máme

$$|s_n(x) - s_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Nyní necháme n pevné a spočteme $\lim_{m \rightarrow \infty}$. O té ale víme, že existuje a tedy

$$\varepsilon \geq \lim_{m \rightarrow \infty} |s_n(x) - s_m(x)| = |s_n(x) - s_m(x)|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Nutná podmínka stejnoměrné konvergence: Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na (a, b) , pak

$$f_n \rightrightarrows 0 \text{ stejnoměrně na } (a, b).$$

Důkaz: Použijeme Bolzano–Cauchyovu podmínku s $m = n + 1$ potom $|s_m(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x)|$ a vidíme, že tvrzení platí.

3. **Leibnizova věta:** Necht' $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na (a, b) splňující pro všechna $x \in (a, b)$ a $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

Pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x)$$

konverguje stejnoměrně na (a, b) právě tehdy, když

$$f_n \rightrightarrows 0 \text{ stejnoměrně na } (a, b).$$

Důkaz: Jedna implikace je zřejmá, neboť jde o nutnou podmínku konvergence. Budeme se věnovat druhé implikaci. Ukážeme platnost Bolzano–Cauchyovy podmínky. Protože

$$f_k(x) - f_{k+1}(x) \geq 0$$

máme

$$\underbrace{f_k(x) - f_{k+1}(x)}_{\geq 0} + \underbrace{f_{k+2}(x) - f_{k+3}(x)}_{\geq 0} \cdots \underbrace{f_{k+2m}(x) - f_{k+2m+1}(x)}_{\geq 0} \geq 0$$

na druhou stranu

$$f_k(x) - \underbrace{f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x)}_{\leq 0} - \cdots - \underbrace{f_{k+2m-1}(x) + f_{k+2m}(x)}_{\leq 0} \leq f_k(x)$$

a tedy

$$\left| \sum_{k=n}^m f_k(x) \right| \leq f_n(x)$$

a stejnoměrná konvergence f_k k nule implikuje platnost Bolzano–Cauchyovy podmínky.

- [6] 2. 1. Definujte pojem **regulární plocha** S v $\mathbb{R}^3$. (Definujte ji pomocí regulární paramterizace.) [1 bod]
2. Pro libovolný bod $z \in S$ definujte tečné vektory $\mathbf{t}_1(z), \mathbf{t}_2(z)$ generující tečný prostor (tečnou nadrovinu) k ploše S v bodě z . [1 bod]
3. Pomocí vektorů $\mathbf{t}_1(z), \mathbf{t}_2(z)$ definujte normálový vektor $\mathbf{n}(z)$ k ploše S v bodě z . [1 bod]
4. Definujte plošný integrál prvního druhu

$$\int_S f dS.$$

[1 bod]

5. Definujte pojem **Gramova matice** a vysvětlete, jak tento pojem souvisí s plošným integrálem prvního druhu. [2 body]

Řešení:

1. Regulární plocha Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}^3$ je regulární plocha, pokud existuje interval $U := (a, b) \times (\alpha, \beta)$ a zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ a je prosté, a které splňuje $S = \Phi(U)$. Navíc požadujeme, aby vektory $\partial_{u_1}\Phi(u_1, u_2)$ a $\partial_{u_2}\Phi(u_1, u_2)$ byly pro každé $u = (u_1, u_2) \in U$ lineárně nezávislé.

2. Tečné vektory a tečný prostor Tečné vektory v bodě $z = \Phi(u)$ definujeme jako

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_1(z) &:= \partial_{u_1}\Phi(u), \\ \mathbf{t}_2(z) &:= \partial_{u_2}\Phi(u).\end{aligned}$$

Tečný prostor k ploše S v bodě z je pak dán jako

$$T_z S := \text{span}\{\mathbf{t}_1(z), \mathbf{t}_2(z)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

3. Normálový vektor: Jednotkový normálový vektor k ploše S v bodě $z = \Phi(u)$ definujeme pomocí vektorového součinu

$$\mathbf{n}(z) := \frac{\mathbf{t}_1(z) \times \mathbf{t}_2(z)}{|\mathbf{t}_1(z) \times \mathbf{t}_2(z)|}.$$

4. Plošný integrál prvního druhu: Nechtě $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Plošný integrál prvního druhu definujeme předpisem

$$\int_S f dS := \int_U f(\Phi(u_1, u_2)) |\mathbf{t}_1(\Phi(u_1, u_2)) \times \mathbf{t}_2(\Phi(u_1, u_2))| du_1 du_2.$$

5. Gramova matice a její význam Necht' $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ jsou vektory. Gramova matice k této dvojici je definována jako (zde $(\cdot, \cdot)$ značí skalární součin v $\mathbb{R}^3$)

$$G := \begin{pmatrix} (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \\ (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) \end{pmatrix}.$$

V případě regulární plochy volíme

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{t}_1(z), \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{t}_2(z)$$

a platí vztah

$$\det G = |\mathbf{t}_1(z) \times \mathbf{t}_2(z)|^2$$

a tedy plošný integrál prvního druhu lze psát ve tvaru

$$\int_S f \, dS = \int_U f(\Phi(u_1, u_2)) \sqrt{\det G(u_1, u_2)} \, du_1 \, du_2.$$

[8] 3. Necht H je Hilbertův prostor a $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset H$.

1. Definujte pojmy: $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ je ortogonální; $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ je ortonormální. [1 bod]
2. Definujte Fourierovu řadu prvku $f \in H$ vzhledem k danému ortonormálnímu systému a definujte její částečný součet. [1 bod]
3. Formulujte a dokažte: [6 bodů]
 - větu o nejlepší aproximaci,
 - Besselovu nerovnost,
 - vztah mezi konvergencí Fourierovy řady, Parsevalovou rovností a úplností ortonormálního systému,
 - Riesz–Fischerovu větu.

Řešení:

1. Ortogonální a ortonormální systém: Systém $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ se nazývá **ortogonální**, jestliže

$$(\phi_n, \phi_m)_H = 0 \quad \text{pro } n \neq m.$$

Je-li navíc

$$(\phi_n, \phi_n)_H = 1 \quad \text{pro všechna } n,$$

nazývá se systém **ortonormální**.

2. Fourierova řada v Hilbertově prostoru: Necht $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ je ortonormální systém v H a $f \in H$. Fourierovy koeficienty prvku f vzhledem k systému $\{\phi_n\}$ definujeme jako

$$c_n := (f, \phi_n)_H.$$

Fourierova řada prvku f je řada

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n,$$

jejíž n -tý částečný součet má tvar

$$s_f^n := \sum_{k=1}^n c_k \phi_k.$$

3. Nejlepší aproximace, Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost, Riesz–Fischerova věta

Věta o nejlepší aproximaci: Necht $M := \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Potom pro každé $f \in H$ a $g^n \in M$ platí

$$\|f - s_f^n\|_H \leq \|f - g^n\|_H.$$

Besselova nerovnost: Pro každé $f \in H$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|^2.$$

Parsevalova rovnost: Je-li $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ úplný ortonormální systém v H , pak pro každé $f \in H$ platí

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad (4)$$

a

$$s_f^n \rightarrow f \text{ v } H. \quad (5)$$

Navíc i pro neúplný $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí, že (4) a (5) je ekvivalentní a platí, že $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplný právě tehdy, když Parsevalova rovnost platí pro každé $f \in H$.)

Rieszova–Fischerova věta: Necht $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortonormální systém v Hilbertově prostoru H a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$. Pak existuje prvek $f \in H$ takový, že

$$(f, \phi_n)_H = c_n \quad \text{pro všechna } n,$$

a platí

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

a

$$s_f^n \rightarrow f \text{ v } H.$$

Důkazy:

Začneme s větou o nejlepší aproximaci. Pokud $g^n \in M$ potom je ve tvaru $g^n = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k$ a dostaneme (díky ortonormalitě)

$$\begin{aligned} & \|f - g^n\|_H^2 - \|f - s_f^n\|_H^2 \\ &= \|f\|_H^2 + \|g^n\|_H^2 - (f, g^n)_H - (g^n, f)_H - \|f\|_H^2 - \|s_f^n\|_H^2 + (f, s_f^n)_H + (s_f^n, f)_H \\ &= \|g^n\|_H^2 - \|s_f^n\|_H^2 - \sum (f, g^n)_H - (g^n, f)_H + (f, s_f^n)_H + (s_f^n, f)_H \\ &= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 - |c_k|^2 + \overline{c_k}(f, \phi_k)_H + c_k(\phi_k, f)_H - \overline{a_k}(f, \phi_k)_H - a_k(\phi_k, f)_H \\ &= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 - |c_k|^2 + \overline{c_k}c_k + c_k\overline{c_k} - \overline{a_k}c_k - a_k\overline{c_k} \\ &= \sum_{k=1}^n |a_k - c_k|^2 = \|g^n - s_f^n\|_H^2. \end{aligned}$$

Pravá strana je nezáporná a tedy máme vlastnost nejlepší aproximace. Navíc, pravá strana je nulová pouze pokud $s_f^n = g^n$.

Pro Besselovu nerovnost použijeme opět ortonormalitu a získáme

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f - s_f^n\|_H^2 = \|f\|_H^2 + \|s_f^n\|_H^2 - (f, s_f^n)_H - (s_f^n, f)_H = \|f\|_2^2 + \sum_{k=1}^n |c_k|^2 - \overline{c_k}c_k - c_k\overline{c_k} \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \end{aligned}$$

Tím je dokázána Besselova nerovnost.

Zároveň vidíme, že (4) a (5) jsou ekvivalentní, což dokazuje část tvrzení pro Parsevalovu rovnost. Dále ukážeme, že úplnost $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ implikuje (4). Z Besselovy nerovnosti máme $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 < \infty$. Vidíme tedy, že posloupnost s_f^n je Cauchyovská v H , který je úplný a tedy existuje f^* takový, že $s_f^n \rightarrow f^*$ v H . Potom ale pro libovolné k

$$(f - f^*, \phi_k)_H = \lim_{n \rightarrow \infty} (f - s_f^n, \phi_k) = 0.$$

Z úplnosti tedy získáme $f^* = f$.

Obráceně, předpokládejme, že (4) platí pro každé $f \in H$. A chceme ukázat, že pokud $f \in H$ je takový, že $(f, \phi_k)_H = 0$, potom $f = 0$. Z (4) máme

$$s_f^n \rightarrow f \text{ v } H.$$

Na druhou stranu ale $(f, \phi_k)_H = 0$ a tedy i $s_f^n \equiv 0$. Potom

$$\|f\|_H^2 = (f, f)_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_f^n\|_H^2 = 0.$$

Pokračujme na Rieszovu–Fischerovu větu. Definujme posloupnost

$$f_n := \sum_{k=1}^n c_k \phi_k.$$

Z ortonormality plyne ($n > m$)

$$\|f_n - f_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \rightarrow 0 \text{ pro } m \rightarrow \infty,$$

takže $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je Cauchyovská posloupnost v H . Úplnost prostoru H zaručuje existenci limitního prvku $f \in H$. Přejdem k limitě dostaneme

$$(f, \phi_n)_H = c_n \quad \text{a} \quad \|f\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2.$$