

Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: _____ Cvičící: _____

Otázka	1	2	3	Body
Maximum bodů	8	6	8	22
Získané body				

- [8] 1. Necht' $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený omezený interval a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných funkcí definovaných na (a, b) . Definujte následující pojmy:

- 1) bodová konvergence posloupnosti funkcí $f_n \rightarrow f$ na (a, b) [1 bod]
- 2) stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b) [1 bod]
- 3) lokálně stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí $f_n \rightrightarrows_{loc} f$ na (a, b) [1 bod]

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Tvrzení buď dokažte nebo najděte protipříklad.

- a) Pro každé n je f_n spojitá na (a, b) a $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b) . Potom f je spojitá na (a, b) . [1 bod]
- b) Pro každé n je f_n spojitá na (a, b) a f je také spojitá na (a, b) . Pokud $f_n \rightarrow f$ na (a, b) bodově, potom $f_n \rightrightarrows_{loc} f$ lokálně stejnoměrně na (a, b) . [2 body]
- c) Pro každé n je f_n spojitá na (a, b) a f je také spojitá na (a, b) . Pokud $f_n \nearrow f$ na (a, b) bodově a monotónně, potom $f_n \rightrightarrows_{loc} f$ lokálně stejnoměrně na (a, b) . [2 body]

Řešení:

1): Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodově k funkci f na (a, b) , jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí (uvádíme dvě ekvivalentní definice)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (\iff \forall x \in (a, b) \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

2): Řekneme, že $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně k f na (a, b) , jestliže (uvádíme dvě ekvivalentní definice)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (a, b)} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad (\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall x \in (a, b) \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

3): Řekneme, že $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f na (a, b) , jestliže pro každé c, d takové, že $a < c < d < b$ platí (uvádíme dvě ekvivalentní definice)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (c, d)} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad (\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall x \in (c, d) \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

a): Tvrzení je **pravdivé**. Necht' $x_0 \in (a, b)$ a $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné konvergence existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $x \in (a, b)$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Protože f_{n_0} je spojitá v bodě x_0 , existuje $\delta > 0$ tak, že

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pro taková x pak platí (použijeme trojúhelníkovou nerovnost a výše uvedené nerovnosti)

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Tedy f je spojitá v bodě x_0 . Jelikož x_0 bylo libovolné, je f spojitá na (a, b) .

b): Tvrzení **neplatí**. Vezměme interval $(0, 1)$. Zvolíme posloupnost bodů

$$x_n := \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \geq 3.$$

Pak $x_n \in (0, 1)$ a $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$. Definujeme posloupnost "střechovitých" funkcí jako

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - n|x - x_n|, & |x - x_n| \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak každé f_n je dokonce stejnoměrně spojitá. Ukážeme, že $f_n \rightarrow 0 =: f$ bodově na $(0, 1)$, tzn f_n konverguje bodově k funkci, která je dokonce stejnoměrně spojitá. Fixujme $x \in (0, 1)$:

- Pokud $x \neq \frac{1}{2}$, pak existuje n_0 tak, že pro $n \geq n_0$ máme $|x - x_n| > \frac{1}{n}$, tedy $f_n(x) = 0$.
- Pokud $x = \frac{1}{2}$, pak $f_n(\frac{1}{2}) = 1 - n|\frac{1}{2} - x_n| = 0$.

Z toho plyne:

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in (0, 1).$$

Na druhou stranu ale máme pro interval $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

$$\sup_{x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})} |f_n(x)| \geq |f_n(x_n)| = 1.$$

Posloupnost tedy nekonverguje lokálně stejnoměrně na $(0, 1)$.

c) Tvrzení je **pravdivé** (lokální verze Diniho věty).

Definujme

$$g_n := f - f_n.$$

Pak platí:

- $g_n \in \mathcal{C}((a, b))$,
- $g_n \searrow 0$ bodově na (a, b) .

Chceme ukázat, že pro libovolný interval $[c, d]$, kde $a < c < d < b$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [c, d]} g_n(x) \rightarrow 0.$$

Předpokládejme spor. Pak existuje $\varepsilon_0 > 0$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [c, d] \quad \text{tak, že} \quad g_n(x_n) \geq \varepsilon_0.$$

Protože interval $[c, d]$ je kompaktní, existuje podposloupnost (x_{n_k}) a bod $x^* \in [c, d]$ tak, že

$$x_{n_k} \rightarrow x^*.$$

Fixujme libovolné $m \in \mathbb{N}$. Z monotónnosti posloupnosti $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ plyne, že pro všechna $n_k \geq m$ platí

$$g_m \geq g_{n_k}.$$

Tedy

$$g_m(x_{n_k}) \geq g_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0.$$

Protože g_m je spojitá, můžeme přejít k limitě:

$$g_m(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0.$$

Tento odhad platí pro každé m . Přejdem k limitě $m \rightarrow \infty$ dostaneme spor s bodovou konvergencí $g_m(x^*) \rightarrow 0$.

- [6] 2. 1. Definujte pojem **regulární plocha** S v $\mathbb{R}^3$. (Definujte ji pomocí regulární paramterizace.) [1 bod]
2. Pro libovolný bod $z \in S$ definujte tečné vektory $\mathbf{t}_1(z), \mathbf{t}_2(z)$ generující tečný prostor (tečnou nadrovinu) k ploše S v bodě z . [1 bod]
3. Pomocí vektorů $\mathbf{t}_1(z), \mathbf{t}_2(z)$ definujte normálový vektor $\mathbf{n}(z)$ k ploše S v bodě z . [1 bod]
4. Definujte plošný integrál prvního druhu

$$\int_S f dS.$$

[1 bod]

5. Definujte pojem **Gramova matice** a vysvětlete, jak tento pojem souvisí s plošným integrálem prvního druhu. [2 body]

Řešení:

1. Regulární plocha Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}^3$ je regulární plocha, pokud existuje interval $U := (a, b) \times (\alpha, \beta)$ a zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ a je prosté, a které splňuje $S = \Phi(U)$. Navíc požadujeme, aby vektory $\partial_{u_1}\Phi(u_1, u_2)$ a $\partial_{u_2}\Phi(u_1, u_2)$ byly pro každé $u = (u_1, u_2) \in U$ lineárně nezávislé.

2. Tečné vektory a tečný prostor Tečné vektory v bodě $z = \Phi(u)$ definujeme jako

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_1(z) &:= \partial_{u_1}\Phi(u), \\ \mathbf{t}_2(z) &:= \partial_{u_2}\Phi(u).\end{aligned}$$

Tečný prostor k ploše S v bodě z je pak dán jako

$$T_z S := \text{span}\{\mathbf{t}_1(z), \mathbf{t}_2(z)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

3. Normálový vektor: Jednotkový normálový vektor k ploše S v bodě $z = \Phi(u)$ definujeme pomocí vektorového součinu

$$\mathbf{n}(z) := \frac{\mathbf{t}_1(z) \times \mathbf{t}_2(z)}{|\mathbf{t}_1(z) \times \mathbf{t}_2(z)|}.$$

4. Plošný integrál prvního druhu: Nechtě $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Plošný integrál prvního druhu definujeme předpisem

$$\int_S f dS := \int_U f(\Phi(u_1, u_2)) |\mathbf{t}_1(\Phi(u_1, u_2)) \times \mathbf{t}_2(\Phi(u_1, u_2))| du_1 du_2.$$

5. Gramova matice a její význam Necht' $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ jsou vektory. Gramova matice k této dvojici je definována jako (zde $(\cdot, \cdot)$ značí skalární součin v $\mathbb{R}^3$)

$$G := \begin{pmatrix} (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \\ (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) \end{pmatrix}.$$

V případě regulární plochy volíme

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{t}_1(z), \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{t}_2(z)$$

a platí vztah

$$\det G = |\mathbf{t}_1(z) \times \mathbf{t}_2(z)|^2$$

a tedy plošný integrál prvního druhu lze psát ve tvaru

$$\int_S f \, dS = \int_U f(\Phi(u_1, u_2)) \sqrt{\det G(u_1, u_2)} \, du_1 \, du_2.$$

[8] 3. Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je 2π -periodická funkce, která je po částech třídy $\mathcal{C}^1$.

1. Uveďte přesné definice uvedených vlastností funkce f . [0.5 bodu]
2. Definujte n -tý částečný součet s_f^n Fourierovy řady funkce f . [1 bod]
3. Zformulujte tvrzení o:
 - a) konvergenci $s_f^n \rightarrow f$ v prostoru $L^2((-\pi, \pi))$, [0.5 bodu]
 - b) bodové konvergenci $s_f^n(x) \rightarrow f^*$ pro vhodné f^* , [1 bod]
 - c) stejnoměrné konvergenci $s_f^n \rightarrow f$ na vhodných intervalech. [1 bod]
4. Dokažte (resp. popište hlavní myšlenky důkazu) tvrzení o bodové a stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady funkce f . Pokud byste chtěli v důkazu použít větu o úplnosti trigonometrického systému, musíte jí dokázat. [4 body]

Řešení:

1. Definice vlastností funkce: Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je 2π -periodická, jestliže

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Funkce f je po částech třídy $\mathcal{C}^1$, jestliže existuje konečné dělení intervalu $[-\pi, \pi]$

$$-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_m = \pi$$

takové, že $f \in \mathcal{C}^1((x_{k-1}, x_k))$ pro všechna $k = 1, \dots, m$, přičemž jednostranné limity f a f' v bodech x_k existují.

2. Fourierova řada a částečné součty: Fourierovy koeficienty funkce f jsou pro $k \in \mathbb{N}$ definovány vzorci

$$a_0 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Fourierova řada funkce f má tvar

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

n -tý částečný součet Fourierovy řady definujeme jako

$$s_f^n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

3. Tvrzení o konvergenci:

(a) **Konvergence v L^2 :** Platí, že

$$s_f^n \longrightarrow f \quad \text{v } L^2(-\pi, \pi).$$

Důkaz: Protože $\{\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\}$ je ortonormální systém, můžeme použít Besselovu nerovnost a platí

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \right) \leq \|f\|_{L^2}^2. \quad (1)$$

Protože f je po částech $\mathcal{C}^1$, je omezená a měřitelná, je tedy i prvkem $L^2(-\pi, \pi)$. Vidíme tedy, že člen na pravé straně je konečný. Nyní pro libovolné $n > m$ platí

$$\|s_f^n - s_f^m\|_2^2 = \pi \sum_{k=m+1}^n a_k^2 + b_k^2 \leq \pi \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Posloupnost s_f^n je tedy Cauchyovská a L^2 je úplný, existuje tedy $f^* \in L^2(-\pi, \pi)$ takové, že

$$s_f^n \longrightarrow f^* \quad \text{v } L^2(-\pi, \pi).$$

Zbývá ukázat, že $f^* = f$ s.v. na $(-\pi, \pi)$. Toto tvrzení plyne z úplnosti trigonometrického systému (ale to nechceme dokazovat) nebo z bodové konvergence ukázané v bodě b).

(b) **Bodová konvergence:** Ukážeme, že pro každý bod $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_f^n(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2},$$

kde $f(x_+)$ je limita zprava a $f(x_-)$ je limita zleva v x .

Důkaz: Necht $A \in \mathbb{R}$ je libovolné. Potom máme odhad

$$\begin{aligned} s_f^n(x) - A &= \frac{a_0}{2} - A + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - A + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - A) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - A) (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - A) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - A) (\cos(k(t-x))) dt \end{aligned}$$

Nyní sečteme řadu (pro $t \neq x$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) &= \Re \left(\sum_{k=1}^n e^{ik(t-x)} \right) = \Re \left(\frac{e^{i(t-x)} - e^{i(n+1)(t-x)}}{1 - e^{i(t-x)}} \right) \\ &= \Re \left(\frac{(e^{i(t-x)} - e^{i(n+1)(t-x)})(1 - e^{-i(t-x)})}{(1 - e^{i(t-x)})(1 - e^{-i(t-x)})} \right) \\ &= \frac{\cos(t-x) - \cos[(n+1)(t-x)] - 1 + \cos n(t-x)}{2 - 2\cos(t-x)} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} \end{aligned}$$

Dosazením tak získáme (pro $t = x$ můžeme provést limitu)

$$\begin{aligned} s_f^n(x) - A &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - A) \frac{\sin \frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} (f(x+y) - A) \frac{\sin \frac{(2n+1)y}{2}}{2 \sin \frac{y}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{-\varepsilon} (f(x+y) - A) \frac{\sin \frac{(2n+1)y}{2}}{2 \sin \frac{y}{2}} dy + \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi-x} (f(x+y) - A) \frac{\sin \frac{(2n+1)y}{2}}{2 \sin \frac{y}{2}} dy \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (f(x+y) - A) \frac{\sin \frac{(2n+1)y}{2}}{2 \sin \frac{y}{2}} dy \end{aligned}$$

Funkce $g(x) := \frac{f(x+y)-A}{2 \sin \frac{y}{2}}$ je omezená (a měřitelná) na intervalech $(-\pi-x, -\varepsilon)$ a $(\varepsilon, \pi-x)$. Můžeme tedy použít Riemann-Lebesgueovo lemma a dostaneme (také díky lichosti funkce $\sin$)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (s_f^n(x) - A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (f(x+y) - A) \frac{\sin \frac{(2n+1)y}{2}}{2 \sin \frac{y}{2}} dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{f(x+y) + f(x-y) - 2A \sin \frac{(2n+1)y}{2}}{2} \frac{\sin \frac{(2n+1)y}{2}}{2 \sin \frac{y}{2}} dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+y) + f(x-y) - 2A \sin \frac{(2n+1)y}{2}}{2} \frac{\sin \frac{(2n+1)y}{2}}{2 \sin \frac{y}{2}} dy \end{aligned}$$

Pokud tedy zvolíme $A := (f(x_+) + f(x_-))$, můžeme použít větu o střední hodnotě a získáme (pro ε dostatečně malé a pro všechny $x \in (0, \varepsilon)$)

$$\left| \frac{f(x+y) - f(x_+) + f(x-y) - f(x_-)}{2} \frac{\sin \frac{(2n+1)y}{2}}{2 \sin \frac{y}{2}} \right| \leq \left| \frac{y(f'(\xi_1) - f'(\xi_2))}{2} \frac{\sin \frac{(2n+1)y}{2}}{2 \sin \frac{y}{2}} \right| \leq C.$$

Zde $\xi_1 \in (x, x+\varepsilon)$ a $\xi_2 \in (x-\varepsilon, x)$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+y) + f(x-y) - 2A \sin \frac{(2n+1)y}{2}}{2} \frac{\sin \frac{(2n+1)y}{2}}{2 \sin \frac{y}{2}} dy \right| \leq C\varepsilon.$$

Protože ε je libovolné, získáme výsledek.

(c) Stejněměrná konvergence: Fourierova řada funkce f konverguje k f lokálně stejněměrně na každém uzavřeném intervalu (x_i, x_{i+1}) , kde $i = 1, \dots, m$. Pokud je funkce spojitá, konverguje Fourierova řada stejněměrně na $[-\pi, \pi]$. Nejdříve dokážeme tvrzení pro spojitou funkci. K tomu zesílíme tvrzení (1) a ukážeme, že

$$|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < \infty. \quad (2)$$

Potom můžeme použít Weierstrasovu větu a získáme, že (protože $|a_k \cos k(x) + b_k \sin k(x)| \leq |a_k| + |b_k|$)

$$s_f^n \rightrightarrows f^* \text{ na } [-\pi, \pi]$$

Díky kroku b) však už víme, že $f^* = f$. Vráťme se k (2). Podíváme se na Fourierovy koeficienty řady pro f' a za použití per partes. Máme

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cos kx \, dx \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{m-1} [f(x) \sin kx]_{x_i}^{x_{i+1}} - \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) \sin kx \, dx = -\frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx \, dx \end{aligned}$$

a máme tedy vztah mezi Fourierovou řadou pro f a pro f' , kde platí (výpočet pro sinovou část provedem stejně)

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \cos kx + b'_k \sin kx$$

kde $a'_k = -kb_k$ a $b'_k = ka_k$ a protože f' je po částech spojitá je i $f' \in L^2(-\pi, \pi)$ a můžeme použít Besselovu nerovnost k získání

$$\infty > \sum_{k=1}^{\infty} |a'_k|^2 + |b'_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k|^2 + k^2 |b_k|^2$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k|^2 + k^2 |b_k|^2 + \frac{2}{k^2} < \infty$$

a (2) platí.

Zbývá vyřešit případ nespojitostí. Předpokládejme, že f je nespojitá pouze v jednom bodě v nule a definujeme

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) - f(0_+) & x > 0, \\ f(x) - f(0_-) & x < 0 \end{cases}$$

Tato funkce je intervalu spojitá a její Fourierova řada konverguje stejnoměrně dle výše uvedeného. Zbývá studovat funkce, které jsou po částech konstantní. Pro jednoduchost uvažujme $f = \operatorname{sgn} x$. Potom pro její řadu platí (viz výše)

$$s_f^n(x) - A = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - A) \frac{\sin \frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt.$$

Volme nyní $A := 1$ a $x \in [\delta, \pi - \delta]$. Potom použitím definice a per partes

$$\begin{aligned} |s_f^n(x) - 1| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sign} t - 1) \frac{\sin \frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt \right| \\ &= \left| \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin \frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt \right| \\ &= \left| -\frac{2}{\pi(2n+1)} \left[\frac{\cos \frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right]_{-\pi}^0 - \frac{2}{\pi(2n+1)} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin \frac{(2n+1)(t-x)}{2} \cos \frac{t-x}{2}}{\sin^2 \frac{t-x}{2}} dt \right| \\ &\leq \frac{C}{2n \sin \delta} \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že řada konverguje stejnoměrně na intervalu $[\delta, \pi - \delta]$. Tím je důkaz hotov.