

Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: _____ Cvičící: _____

Otázka	1	2	3	Body
Maximum bodů	8	6	6	20
Získané body				

- [8] 1. Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený omezený interval a $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost reálných funkcí definovaných na (a, b) . Definujte následující pojmy:

- 1) bodová konvergence posloupnosti funkcí $f_n \rightarrow f$ na (a, b) [1 bod]
- 2) stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b) [1 bod]
- 3) lokálně stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí $f_n \rightrightarrows_{loc} f$ na (a, b) [1 bod]

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Tvrzení buď dokažte nebo najděte protipříklad.

- a) Pro každé n je f_n spojitá na (a, b) a $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b) . Potom f je spojitá na (a, b) . [1 bod]
- b) Pro každé n je f_n spojitá na (a, b) a f je také spojitá na (a, b) . Pokud $f_n \rightarrow f$ na (a, b) bodově, potom $f_n \rightrightarrows_{loc} f$ lokálně stejnoměrně na (a, b) . [2 body]
- c) Pro každé n je f_n spojitá na (a, b) a f je také spojitá na (a, b) . Pokud $f_n \nearrow f$ na (a, b) bodově a monotónně, potom $f_n \rightrightarrows_{loc} f$ lokálně stejnoměrně na (a, b) . [2 body]

Řešení:

1): Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje bodově k funkci f na (a, b) , jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí (uvádíme dvě ekvivalentní definice)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (\iff \forall x \in (a, b) \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

2): Řekneme, že $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně k f na (a, b) , jestliže (uvádíme dvě ekvivalentní definice)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (a, b)} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad (\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall x \in (a, b) \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

3): Řekneme, že $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f na (a, b) , jestliže pro každé c, d takové, že $a < c < d < b$ platí (uvádíme dvě ekvivalentní definice)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (c, d)} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad (\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall x \in (c, d) \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

a): Tvrzení je **pravdivé**. Necht' $x_0 \in (a, b)$ a $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné konvergence existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $x \in (a, b)$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Protože f_{n_0} je spojitá v bodě x_0 , existuje $\delta > 0$ tak, že

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pro taková x pak platí (použijeme trojúhelníkovou nerovnost a výše uvedené nerovnosti)

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Tedy f je spojitá v bodě x_0 . Jelikož x_0 bylo libovolné, je f spojitá na (a, b) .

b): Tvrzení **neplatí**. Vezměme interval $(0, 1)$. Zvolíme posloupnost bodů

$$x_n := \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \geq 3.$$

Pak $x_n \in (0, 1)$ a $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$. Definujeme posloupnost "střechovitých" funkcí jako

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - n|x - x_n|, & |x - x_n| \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak každé f_n je dokonce stejnoměrně spojitá. Ukážeme, že $f_n \rightarrow 0 =: f$ bodově na $(0, 1)$, tzn f_n konverguje bodově k funkci, která je dokonce stejnoměrně spojitá. Fixujme $x \in (0, 1)$:

- Pokud $x \neq \frac{1}{2}$, pak existuje n_0 tak, že pro $n \geq n_0$ máme $|x - x_n| > \frac{1}{n}$, tedy $f_n(x) = 0$.
- Pokud $x = \frac{1}{2}$, pak $f_n(\frac{1}{2}) = 1 - n|\frac{1}{2} - x_n| = 0$.

Z toho plyne:

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in (0, 1).$$

Na druhou stranu ale máme pro interval $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

$$\sup_{x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})} |f_n(x)| \geq |f_n(x_n)| = 1.$$

Posloupnost tedy nekonverguje lokálně stejnoměrně na $(0, 1)$.

c) Tvrzení je **pravdivé** (lokální verze Diniho věty).

Definujme

$$g_n := f - f_n.$$

Pak platí:

- $g_n \in \mathcal{C}((a, b))$,
- $g_n \searrow 0$ bodově na (a, b) .

Chceme ukázat, že pro libovolný interval $[c, d]$, kde $a < c < d < b$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [c, d]} g_n(x) \rightarrow 0.$$

Předpokládejme spor. Pak existuje $\varepsilon_0 > 0$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [c, d] \quad \text{tak, že} \quad g_n(x_n) \geq \varepsilon_0.$$

Protože interval $[c, d]$ je kompaktní, existuje podposloupnost (x_{n_k}) a bod $x^* \in [c, d]$ tak, že

$$x_{n_k} \rightarrow x^*.$$

Fixujme libovolné $m \in \mathbb{N}$. Z monotónnosti posloupnosti $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ plyne, že pro všechna $n_k \geq m$ platí

$$g_m \geq g_{n_k}.$$

Tedy

$$g_m(x_{n_k}) \geq g_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0.$$

Protože g_m je spojitá, můžeme přejít k limitě:

$$g_m(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0.$$

Tento odhad platí pro každé m . Přejdem k limitě $m \rightarrow \infty$ dostaneme spor s bodovou konvergencí $g_m(x^*) \rightarrow 0$.

- [6] 2. 1) Zformulujte Greenovu větu v $\mathbb{R}^2$. [1 bod]
 2) Zformulujte Gaussovu větu v $\mathbb{R}^2$. [1 bod]
 3) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je trojúhelník s vrcholy

$$A = (-1, 0), \quad B = (1, 0), \quad C = (0, 1).$$

Dokažte Greenovu větu pro oblast Ω . [4 body]

Řešení:

1) Greenova věta: Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast jejíž hranice $\partial\Omega$ tvoří jednoduchou uzavřenou kladně orientovanou křivku. Nechť

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2), \quad f_1, f_2 \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Potom platí

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

2) Gaussova věta: Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast jejíž hranice $\partial\Omega$ tvoří jednoduchou uzavřenou kladně orientovanou křivku. Nechť

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2), \quad g_1, g_2 \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Potom

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{g} dx dy = \int_{\Omega} \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}.$$

3) Důkaz: Oblast Ω je trojúhelník s hranami s následující parametrizací:

$$AB : \varphi_1 = (t, 0) \quad t \in [-1, 1],$$

$$BC : \varphi_2 = (1 - t, t) \quad t \in (0, 1),$$

$$CA : \varphi_3 = (-t, 1 - t) \quad t \in (0, 1)$$

Celou oblast lze popsat jako

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - |x|\}.$$

Začneme s objemovým integrálem a použijeme Fubiniho větu

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\Omega} \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} dx dy - \int_{\Omega} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} dx \right) dy - \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-|x|} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 f_2(1-y, y) - f_2(y-1, y) dy - \int_{-1}^1 f_1(x, 1-|x|) - f_1(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Spočteme křivkový integrál

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{AB} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} + \int_{BC} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} + \int_{CA} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \\
 &= \int_{-1}^1 (f_1(t, 0), f_2(t, 0)) \cdot (1, 0) dt + \int_0^1 (f_1(1-t, t), f_2(1-t, t)) \cdot (-1, 1) dt \\
 &\quad + \int_0^1 (f_1(-t, 1-t), f_2(-t, 1-t)) \cdot (-1, -1) dt \\
 &= \int_{-1}^1 f_1(t, 0) dt + \int_0^1 -f_1(1-t, t) + f_2(1-t, t) - f_1(-t, 1-t) - f_2(-t, 1-t) dt \\
 &= \int_{-1}^1 f_1(t, 0) dt - \int_0^1 f_1(1-t, t) + f_1(-t, 1-t) dt + \int_0^1 f_2(1-t, t) - f_2(-t, 1-t) dt \\
 &= \int_{-1}^1 f_1(x, 0) dx - \int_0^1 f_1(x, 1-x) dx - \int_{-1}^0 f_1(x, 1+x) dx \\
 &\quad + \int_0^1 f_2(1-y, y) - f_2(y-1, y) dy,
 \end{aligned}$$

kde jsme pro poslední identitu použili větu o substituci. Porovnáním obou výsledků dostaneme kýženou rovnost.

- [6] 3. 1) Uveďte definici separabilního Hilbertova prostoru. [1 bod]
 2) Definujte prostor ℓ^2 a dokažte, že je separabilním Hilbertovým prostorem. [2 body]
 3) Vysvětlete, v jakém smyslu je Lebesgueův prostor $L^2(\Omega)$ Hilbertovým prostorem. [1 bod]
 4) Vysvětlete, proč je každý separabilní Hilbertův prostor isometricky izomorfní s prostorem ℓ^2 . [2 body]

Řešení:

1) Definice separabilního Hilbertova prostoru:

Lineární vektorový H je Hilbertův právě tehdy, když v něm existuje skalární součin $(\cdot, \cdot)_H$ a tento prostor je v normě $\|u\|_H^2 := (u, u)_H$ úplný. Prostor je navíc *separabilní*, jestliže obsahuje spočetnou hustou podmnožinu, tj. existuje spočetná množina

$$D \subset H$$

taková, že její uzávěr je celý prostor:

$$\overline{D} = H.$$

Prostor ℓ^2 : Prostor ℓ^2 definujeme jako množinu všech reálných (nebo komplexních) posloupností

$$x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

takových, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Na ℓ^2 definujeme skalární součin

$$(x, y)_{\ell^2} := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Prostor ℓ^2 je úplný vzhledem k normě indukované tímto skalárním součinem,

$$\|x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2},$$

tedy ℓ^2 je Hilbertův prostor.

Označme $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ standardní jednotkové vektory. Množina

$$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$$

je spočetná ortonormální báze prostoru ℓ^2 . Lineární obal této množiny s racionálními koeficienty je spočetný a hustý v ℓ^2 . Tedy ℓ^2 je separabilní Hilbertův prostor.

3) Prostor $L^2(\Omega)$:

Nechť Ω je měřitelná množina. Prostor $L^2(\Omega)$ definujeme jako prostor tříd ekvivalence měřitelných funkcí $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pro které

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

kde funkce jsou ztotožněny, pokud se rovnají skoro všude.

Na $L^2(\Omega)$ definujeme skalární součin

$$(f, g)_{L^2} := \int_{\Omega} f(x)g(x) dx.$$

Prostor $L^2(\Omega)$ je úplný vzhledem k normě

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2},$$

a tedy je Hilbertovým prostorem.

4) Izometrická izomorfie se ℓ^2 :

Nechť H je separabilní Hilbertův prostor. Potom existuje spočetná hustá podmnožina. Z této podmnožiny pak můžeme Gramm-Schmidtovým ortonormalizačním procesem konstruovat ortonormální spočetný systém $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, který je úplný.

Definujeme zobrazení

$$T : H \rightarrow \ell^2, \quad T(x) := \{(x, e_n)_{\ell^2}\}_{n=1}^{\infty}.$$

Díky úplnosti víme, že platí Parsevalova rovnost:

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)_{\ell^2}|^2 = \|T(x)\|_{\ell^2}^2.$$

Tedy T je lineární izometrie. Navíc je surjektivní, protože každá posloupnost v ℓ^2 odpovídá rozvoji v ortonormální bázi (Riesz–Fischerova věta).