

Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: _____ Cvičící: _____

Otázka	1	2	3	Body
Maximum bodů	6	8	6	20
Získané body				

- [6] 1. Necht' $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu (a, b) , kde

$$-\infty < a < b < \infty.$$

Definujte pojmy [1,5 bodu]:

- 1) f_n konverguje bodově k f ($f_n \rightarrow f$) na (a, b) .
- 2) f_n konverguje stejnoměrně k f ($f_n \rightrightarrows f$) na (a, b) .
- 3) f_n konverguje lokálně stejnoměrně k f ($f_n \rightrightarrows_{loc} f$) na (a, b) .

Rozhodněte platnost následujících tvrzení. Tvrzení dokažte, nebo uveďte protipříklad.

- (i) Pokud jsou všechny funkce f_n spojité a $f_n \rightarrow f$ bodově, pak je f spojitá. [0.5 bodu]
- (ii) Pokud jsou všechny funkce f_n stejnoměrně spojité a $f_n \rightarrow f$ bodově, pak f je spojitá. [0.5 bodu]
- (iii) Pokud je každá f_n nespojitá a $f_n \rightarrow f$ stejnoměrně, pak je f nespojitá. [0.5 bodu]
- (iv) Necht' je každá f_n stejnoměrně spojitá a má maximum v bodě $x_{\max}^n$ a necht' platí $f_n \rightrightarrows f$. Necht' f má maximum v bodě $x_{\max}$, potom platí $x_{\max}^n \rightarrow x_{\max}$. [0.5 bodu]
- (v) Necht' je každá f_n spojitá na $[a, b]$ a má maximum v bodě $x_{\max}^n \in [a, b]$. Necht' platí $f_n \rightrightarrows f$. Necht' existuje $x_{\max} \in [a, b]$ takové, že $f(x) < f(x_{\max})$ pro každé $x \in [a, b]$ $x \neq x_{\max}$, potom platí $x_{\max}^n \rightarrow x_{\max}$. [2.5 bodu]

Řešení:

1) Bodová konvergence.

$$f_n \rightarrow f \text{ bodově na } (a, b) \iff \forall x \in (a, b) : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

2) Stejnoměrná konvergence.

$$f_n \rightrightarrows f \text{ stejnoměrně na } (a, b) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (a, b)} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

3) Lokálně stejnoměrná konvergence.

$$\begin{aligned} f_n \rightrightarrows_{loc} f \text{ lokálně stejnoměrně na } (a, b) \\ \iff \forall \text{ kompaktní } K \subset (a, b) : f_n \rightrightarrows f \text{ stejnoměrně na } K. \end{aligned}$$

(i) Neplatí. Uvažujte interval $(0, 2)$ a posloupnost funkcí

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & \text{pro } x \in (0, 1], \\ (2-x)^n & \text{pro } x \in (1, 2). \end{cases}$$

Pak f_n jsou stejnoměrně spojitě, ale $f_n(x) \rightarrow 0$ pro $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ a $f_n(1) = 1$ a tedy limitní funkce je nespojitá v bodě $x = 1$.

(ii) Neplatí. Lze použít příklad výše.

(iii) Neplatí. Uvažujme interval $(-1, 1)$ a posloupnost funkcí

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-1, 0], \\ \frac{1}{n} & \text{pro } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Potom f_n je nespojitá v $x = 0$ pro každé n . Označme ještě $f(x) := 0$ pro $x \in (-1, 1)$.
Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (-1, 1)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $(-1, 1)$, ale f je spojitá.

(4) Neplatí. Uvažujme $f_n(x) = f(x) = -(x^2 - 1)^2$. Pak zcela jistě $f_n \rightrightarrows f$. Navíc f_n má v bodě $x_{\max}^n = -1$ maximum a $x_{\max}^n \rightarrow -1$. Na druhou stranu f má maximum (nejenom) v $x_{\max} = 1$ a tvrzení tedy neplatí. (Je to způsobeno tím, že f nabývá maximum ve dvou různých bodech.)

(v) Platí. Předpokládejme spor, tj. $x_{\max}^{n_k} \not\rightarrow x_{\max}$. Tedy existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnost $n_k \rightarrow \infty$ taková, že pro každé n_k

$$|x_{\max}^{n_k} - x_{\max}| \geq \varepsilon.$$

Protože f nabývá v $x_{\max}$ ostrého maxima, platí, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé n_k platí

$$|f(x_{\max}^{n_k}) - f(x_{\max})| = f(x_{\max}) - f(x_{\max}^{n_k}) > \delta. \quad (1)$$

Na druhou stranu, díky stejnoměrné konvergenci můžeme najít N takové, že pokud $n_k > N$ potom pro každé $x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\delta}{4}. \quad (2)$$

Z trojúhelníkové nerovnosti a z faktu, že f_n nabývá maxima v $x_{\max}^{n_k}$ tak dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_n(x_{\max}^{n_k}) - f_n(x_{\max}) \\ &= f_n(x_{\max}^{n_k}) - f(x_{\max}^{n_k}) + f(x_{\max}^{n_k}) - f(x_{\max}) + f(x_{\max}) - f_n(x_{\max}) \\ &\leq |f_n(x_{\max}^{n_k}) - f(x_{\max}^{n_k})| + f(x_{\max}^{n_k}) - f(x_{\max}) + |f(x_{\max}) - f_n(x_{\max})| \stackrel{(1),(2)}{\leq} \frac{\delta}{4} - \delta + \frac{\delta}{4} < 0, \end{aligned}$$

což je spor.

[8] 2. Uvažujte $\mathbb{R}^d$.

- 1) Definujte interval v $\mathbb{R}^d$ a množinu míry nula. [1 bod]
- 2) Definujte prostor schodovitých funkcí a definujte Lebesgueův integrál pro schodovité funkce. [1 bod]
- 3) Definujte prostor L^+ a definujte Lebesgueův integrál pro funkce z L^+ a ukažte jeho nezávislost na dané posloupnosti. [2 body]
- 4) Formulujte Leviho větu pro funkce z L^+ a dokažte ji. [4 body]

Řešení:

1) Interval a množina míry nula: Buď $-\infty < a_i < b_i < \infty$ a $i = 1, \dots, d$. Řekneme, že I je interval, pokud

$$I := [a_1, b_1) \times \dots \times [a_d, b_d).$$

Objem intervalu definujeme jako

$$V(I) := \prod_{i=1}^d (b_i - a_i).$$

Množina $N \subset \mathbb{R}^d$ se nazývá *množina míry nula*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje spočetná posloupnost intervalů $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ taková, že

$$N \subset \bigcup_{k=1}^\infty I_k \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^\infty V(I_k) < \varepsilon.$$

2) Schodovité funkce: Označme $\chi_M: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ charakteristickou funkci množiny M . Řekneme, že funkce $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ je schodovitá právě tehdy, když existují po dvou disjunktní intervaly $\{I_j\}_{j=1}^N$, kde $N \in \mathbb{N}$, a platí

$$h(x) = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{I_k}(x).$$

kde $c_k \in \mathbb{R}$. Pro tuto schodovitou funkci pak definujeme Lebesgueův integrál jako

$$\int h := \sum_{k=1}^n c_k V(I_k).$$

3) Prostor L^+ : Označme L^+ množinu všech funkcí $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ takových, že existuje neklesající posloupnost schodovitých funkcí $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ splňující

$$h_n(x) \leq h_{n+1}(x), \quad h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}^d \setminus N,$$

kde N je množina míry nula. Navíc požadujeme, aby existovala konstanta C taková, že pro všechna n platí

$$\int h_n \leq C.$$

Lebesgueův integrál pro funkci f definujeme předpisem

$$\int f := \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n. \quad (3)$$

Ukážeme, že definice (3) nezávisí na volbě posloupnosti. Nejdříve si stačí uvědomit, že limita existuje (jde o monotónní posloupnost). Buď nyní $f, g \in L^+$ a $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ dvě posloupnosti schodovitých funkcí takových že

$$f_n \nearrow f, \quad g_n \nearrow g \quad \text{skoro všude}$$

a necht' $f \leq g$ s.v. Ukážeme, že

$$\int f \leq \int g. \quad (4)$$

Z definice a monotonie posloupností f_i a g_j platí s.v. že

$$0 \geq f(x) - g(x) \geq f_i(x) - g(x)$$

a z definice taky máme, že pro každé pevné i platí

$$f_i(x) - g_j(x) \searrow f_i(x) - g(x) \leq 0 \quad \text{pro } j \rightarrow \infty,$$

což dává

$$(f_i(x) - g_j(x))^+ \searrow 0 \quad \text{pro } j \rightarrow \infty.$$

Funkce $(f_i(x) - g_j(x))^+$ je schodovitá a můžeme tedy použít fundamentální vlastnost schodovitých funkcí konvergujících s.v. monotónně k nule a tedy

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int (f_i - g_j)^+ = 0 \quad \implies \forall i \in \mathbb{N} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_i - g_j \leq 0$$

a tedy

$$\int f_i \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j = \int g$$

a limitním přechodem $i \rightarrow \infty$ dostaneme (4). Pokud $f = g$ s.v. pak tedy $\int f = \int g$. Pokud tedy $f_i \nearrow f$ a $g_i \nearrow g$ a $f = g$, vidíme, že pak

$$\lim \int f_i = \int f = \int g = \lim \int g_i$$

a integrál tedy nezávisí na posloupnosti.

4) Leviho věta Necht' $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí z L^+ splňující

$$0 \leq f_n \leq f_{n+1}, \quad f_n(x) \nearrow f(x)$$

skoro všude. Necht' existuje K takové, že pro všechna n platí $\int f_n \leq K$. Potom $f \in L^+$ a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

Důkaz: Nejprve díky monotónii víme, že $\int f_n \leq \int f_{n+1} \leq K$. Máme tedy omezenou monotónní posloupnost a tedy existuje

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Dále, protože $f_n \in L^+$ existuje pro každé n posloupnost svhodovitých funkcí $\{h_j^n\}_{j=1}^\infty$ takových, že $h_j^n \nearrow f_n$ s.v. a

$$\int h_i^n \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int h_j^n = \int f_n \leq K.$$

Definujme nyní novou funkci

$$H_j(x) := \max\{h_j^1(x), \dots, h_j^j(x)\}.$$

Z definice vidíme, že $H_j \leq H_{j+1}$ s.v. Navíc díky tomu, že $f_n \leq f_{n+1}$

$$H_j(x) = \max\{h_j^1(x), \dots, h_j^j(x)\} \leq \max\{f_1(x), \dots, f_j(x)\} = f_j(x).$$

$H_j(x)$ je tedy pro s.v. x monotónní posloupnost, která je omezená a má tedy limitu H a platí $H_j \nearrow H$ s.v. Protože platí nerovnosti (pro $n \leq j$)

$$h_j^n \leq H_j \leq f_j \quad \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \quad f_n \leq H \leq f \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \quad f \leq H \leq f$$

a tedy $H = f$ s.v. Máme tedy existenci posloupnosti schodovitých funkcí $H_n \nearrow f$. Ukážeme ještě limitní přechod v integrálu. K tomu použijeme vlastnosti schodovitých funkcí a výše uvedených nerovností společně s definicí L .

$$\int h_j^n \leq \int H_j \leq \int f_j \quad \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \quad \int f_n \leq \int H \leq L \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \quad L \leq \int H \leq L$$

a tedy $L = \int H = \int f$.

- [6] 3. 1) Uveďte definici separabilního Hilbertova prostoru. [1 bod]
 2) Definujte prostor ℓ^2 a dokažte, že je separabilním Hilbertovým prostorem. [2 body]
 3) Vysvětlete, v jakém smyslu je Lebesgueův prostor $L^2(\Omega)$ Hilbertovým prostorem. [1 bod]
 4) Vysvětlete, proč je každý separabilní Hilbertův prostor isometricky izomorfní s prostorem ℓ^2 . [2 body]

Řešení:**1) Definice separabilního Hilbertova prostoru:**

Lineární vektorový H je Hilbertův právě tehdy, když v něm existuje skalární součin $(\cdot, \cdot)_H$ a tento prostor je v normě $\|u\|_H^2 := (u, u)_H$ úplný. Prostor je navíc *separabilní*, jestliže obsahuje spočetnou hustou podmnožinu, tj. existuje spočetná množina

$$D \subset H$$

taková, že její uzávěr je celý prostor:

$$\overline{D} = H.$$

Prostor ℓ^2 : Prostor ℓ^2 definujeme jako množinu všech reálných (nebo komplexních) posloupností

$$x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

takových, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Na ℓ^2 definujeme skalární součin

$$(x, y)_{\ell^2} := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Prostor ℓ^2 je úplný vzhledem k normě indukované tímto skalárním součinem,

$$\|x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2},$$

tedy ℓ^2 je Hilbertův prostor.

Označme $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ standardní jednotkové vektory. Množina

$$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$$

je spočetná ortonormální báze prostoru ℓ^2 . Lineární obal této množiny s racionálními koeficienty je spočetný a hustý v ℓ^2 . Tedy ℓ^2 je separabilní Hilbertův prostor.

3) Prostor $L^2(\Omega)$:

Nechť Ω je měřitelná množina. Prostor $L^2(\Omega)$ definujeme jako prostor tříd ekvivalence měřitelných funkcí $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pro které

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

kde funkce jsou ztotožněny, pokud se rovnají skoro všude.

Na $L^2(\Omega)$ definujeme skalární součin

$$(f, g)_{L^2} := \int_{\Omega} f(x)g(x) dx.$$

Prostor $L^2(\Omega)$ je úplný vzhledem k normě

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2},$$

a tedy je Hilbertovým prostorem.

4) Izometrická izomorfie se ℓ^2 :

Nechť H je separabilní Hilbertův prostor. Potom existuje spočetná hustá podmnožina. Z této podmnožiny pak můžeme Gramm-Schmidtovým ortonormalizačním procesem konstruovat ortonormální spočetný systém $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, který je úplný.

Definujeme zobrazení

$$T : H \rightarrow \ell^2, \quad T(x) := \{(x, e_n)_{\ell^2}\}_{n=1}^{\infty}.$$

Díky úplnosti víme, že platí Parsevalova rovnost:

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)_{\ell^2}|^2 = \|T(x)\|_{\ell^2}^2.$$

Tedy T je lineární izometrie. Navíc je surjektivní, protože každá posloupnost v ℓ^2 odpovídá rozvoji v ortonormální bázi (Riesz–Fischerova věta).