NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Opakování teoretické časti

Teoretické cvičenie #5 | Zimní semestr 2024/2025

Posledné teoretické cvičenie pred prvou zápočtovou prácou je určené k opakovaniu teórie z prvých štyroch cvičeni a k diskutovaniu správneho riešenia niektorých úloh zo série príkladov označených v zadaniach písmenom "B". Nižšie je uvedených niekoľko vybraných príkladov s podrobným riešením. Na záver je (bez explicitného riešenia) niekoľko vzorových príkladov z písomných zápočtových prác z minulých rokov. Tieto príklady slúžia k samostatnému precvičovaniu a tiež k ilustrácii konkrétnych problémov, ktoré lze očekávat na zápočtovej práci.

Vybrané príklady zo série úloh `B` s riešením

A1. *[Séria 1, Príklad B3]*
Pre nezávislé náhodné veličiny X, Y s exponenciálnym rozdelením $Exp(\lambda)$ uvažujte náhodnú veličinu U definovanú nižšie a nájdite jej hustotu.

$$U = \frac{min(X,Y)}{max(X,Y)}$$

Riešenie:
Náhodné veličiny X, Y tvoria náhodný výber (kedže sú nezávislé a tiež rovnako rozdelené). Môžeme si tento náhodný výber označit aj ako X_1, X_2, kde $X_1 = X$ a $X_2 = Y$. Náhodné veličiny $V = min(X,Y)$ a $W = max(X,Y)$ tym pádom ale tvoria usporiadaný náhodný výber, t.j. $(X_{(1)}, X_{(2)}) = (V, W) = (min(X,Y), max(X,Y))$.

Veta 1.7 (Statistický větník na stránce kolegu Doc. Pešty) říka, že pre náhodný výber $X_1, \dots, X_n$ z rozdelenia s hustotou $f(x)$, je združená hustota náhodného vektoru, ktorý je zároveň usporiadaným náhodným výberom, t.j. náhodného vektoru $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})^\top$, daná predpisom

$$f(x_1, \dots, x_n) = n! f(x_1) \dots f(x_n) \qquad \text{pre } x_1 < \cdots < x_n$$

a $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ jinak.
Pre náš konkrétny prípad to znamená, že náhodný vektor $(V, W)^\top$ má hustotu

$$f(v, w) = 2! f(v) f(w) \qquad \text{pre } 0 < v < w < \infty$$

a $f(v, w) = 0$ inak. Pritom platí, že $f(v) = \lambda \cdot e^{-\lambda v}$, pre $v > 0$ a analogicky aj pre $f(w)$. Hustota náhodného vektoru $(V, W)^\top$ je teda

$$f_{(V,W)}(v, w) = 2\lambda^2 e^{-\lambda(v+w)}, \qquad \text{pre } 0 < v < w < \infty.$$

Tym pádom je zároveň zrejmé, že náhodné veličiny V a W nie sú vzájomne nezávislé. Následne už len stačí definovať vhodnú transformáciu náhodného vektoru $(V, W)^\top$ tak, aby sme dostali požadovanú náhodnú veličinu $U = V/W$. Použijeme následujúcu transformáciu:

$$t : \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} V/W \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}.$$

Príslušné inverzné zobrazenie je

$$t^{-1}: \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} U \cdot W \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}.$$

Jakobián inverzného zobrazenia je

$$|J_{t^{-1}}| = \begin{vmatrix} w & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w,$$

tym pádom združená hustota náhodného vektoru $(U,W)^\top$ je

$$f_{(U,W)}(u,w) = f_{(V,W)}(t_1^{-1}(u,w), t_2^{-1}(u,w)) \cdot |J_{t^{-1}}| = 2\lambda^2 e^{-\lambda uw} e^{-\lambda w} w,$$

pre $u \in (0,1)$ a $w > 0$. Zároveň sme využili značenie, kde t_1^{-1} predstavuje prvú zložku inverzného zobrazenia t^{-1} a analogicky aj t_2^{-1} osnačuje druhú zložku nverzného zobrazenia t^{-1}.

Požadovaná hustota náhodnej veličiny U sa získa preintegrovaním združenej hustoty $f_{(U,W)}(u,w)$ vzhľadom k nadbytočnej premennej, t.j. premennej w. Platí teda

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,W)}(u,w)\mathrm{d}w = \int_0^\infty 2\lambda^2 e^{-\lambda(u+1)w} w\mathrm{d}w = \frac{2\lambda^2}{\lambda(u+1)} \int_0^\infty w \cdot \lambda(u+1) e^{-\lambda(u+1)w} \mathrm{d}w,$$

pričom integrál nie je nič iné, ako stredná hodnota náhodnej veličiny s exponenciálnym rozdelenim s parametrom $\lambda \cdot (u+1)$ (kde $u \in (0,1)$). Hustota náhodnej veličiny U je preto

$$f_U(u) = \frac{2\lambda^2}{\lambda(u+1)} \cdot \frac{1}{\lambda(u+1)} = \frac{2}{(u+1)^2}, \qquad \text{pre } u \in (0,1)$$

a $f_U(u) = 0$ inak.

A2. *[Séria 1, Príklad B10]*
Pre náhodný výber $X_1, \ldots, X_n$ z rovnomerného rozdelenia na intervale $(0,\theta)$ pre $\theta > 0$ chceme ukázať, že náhodná veličina $Z_n = n(1 - W_n/\theta)$ konverguje v distribúcii ku Gamma rozdeleniu, kde $W_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ je rozpätie náhodného výberu, teda maximum mínus minimum.

Náhodný výber pochádza zo spojitého rozdelenia. Označme príslušnú distribučnú funkciu ako F a hustotu ako f. Pre združené rozdelenie náhodného vektoru $(X_{(1)}, W_n)^\top$ máme hustotu (bolo odvodené na prvom cvičení) v tvare

$$h_{(X_{(1)},W_n)}(z,w) = n(n-1) f(z) f(z+w) \Big[F(z+w) - F(z)\Big]^{n-2}, \quad \text{pro } z \in \mathbb{R} \text{ a } w > 0$$

a hustota je dodefinované nulou jinak. Dosadením konkrétnej hustoty a distribučnej funkcie rovnomerného rozdelenia na intervale $(0,\theta)$ získame združenú distribučnu funkciu náhodného vektoru $(X_{(1)}, W_n)^\top$ v tvare

$$h_{(X_{(1)},W_n)}(z,w) = n(n-1) \cdot \frac{1}{\theta}\mathbb{I}_{\{z\in(0,\theta)\}} \cdot \frac{1}{\theta}\mathbb{I}_{\{z+w\in(0,\theta)\}} \cdot \left[\frac{z+w}{\theta} - \frac{z}{\theta}\right]^{n-2}, \quad \text{pro } z \in \mathbb{R} \text{ a } w > 0,$$

čo môžeme ešte upraviť do tvaru

$$h_{(X_{(1)},W_n)}(z,w) = \frac{n(n-1)}{\theta^n} \cdot w^{n-2}, \quad \text{pro } z \in (0,\theta) \text{ a } w \in (0, \theta - z),$$

a hustota je nulová jinak (uvedomte si rolu jednotlivých indentifikátorov v zápise hustoty a následne obmedzenia na z a w). Hustotu samotného rozpätia (t.j. náhodnej veličiny W_n) získame preintegrovaním, t.j.

$$\begin{aligned} f_{W_n}(w) &= \int_{\mathbb{R}} h_{(X_{(1)},W_n)}(z,w)\mathrm{d}z = \int_0^{\theta-w} \frac{n(n-1)}{\theta^n} w^{n-2}\mathrm{d}z = \frac{n(n-1)}{\theta^n} w^{n-2}\Big[z\Big]_0^{\theta-w} \\ &= \frac{n(n-1)}{\theta^n} w^{n-2}\cdot(\theta-w), \quad \text{pre } w\in(0,\theta) \end{aligned}$$

pričemž hustota $f_{W_n}(w)$ je definovaná nulou jinak. Máme teda vyjadrenú hustotu náhodnej veličiny W_n a pomoci vety o transformácii nájdeme hustotu pre náhodnu veličinu $Z_n = n(1-W_n/\theta)$.

Príslušná transformácia (v značení pre prehľadnosť ponecháme závislosť na $n\in\mathbb{N}$) má tvar

$$t_n : w \longrightarrow n\Big(1-\frac{w}{\theta}\Big) =: z$$

a jedná sa o lineárnu transformáciu (prosté, klesajúce zobrazenie), ktorá zobrazuje interval $(0,\theta)$ na interval $(0,n)$. Príslušné inverzné zobrazenie je

$$t_n^{-1} : z \longrightarrow \Big(1-\frac{z_n}{n}\Big)\cdot\theta =: w$$

a tiež platí, že $|(t_n^{-1})'(z)| = |-\theta/n| = \theta/n$. Náhodná veličina Z_n má preto (z vety o transformácii) hustotu

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(z) &= \frac{n(n-1)}{\theta^n}\Big[\theta\Big(1-\frac{z}{n}\Big)\Big]^{n-2}\cdot\Big(\theta-\theta\Big(1-\frac{z}{n}\Big)\Big)\cdot\frac{\theta}{n}\cdot\mathbb{I}_{\{z\in(0,n)\}} \\ &= \frac{n-1}{n}\Big(1-\frac{z}{n}\Big)^{n-2}\cdot z\cdot\mathbb{I}_{\{z\in(0,n)\}}. \end{aligned}$$

Aby sme ukázali, že náhodná veličina Z_n konverguje pre $n\to\infty$ v distribúcii k náhodnej veličine Y, ktorá má gamma rozdelenie, potrebujeme ukázať, že distribučná funkcia náhodnej veličiny Z_n konverguje v bodoch spojitosti k distribučnej funkcii náhodnej veličiny Y. Keďže v oboch prípadoch sa jedná o absolútne spojité rozdelenie, možeme ekvivalentne vyšetriť, či hustota f_{Z_n} bodovo konverguje k hustote gamma rozdelenia (označenie $\Gamma(k,\alpha)$), ktorá je obecne definovaná predpisom

$$f_Y(y) = \frac{\alpha^k}{\Gamma(k)} y^{k-1}e^{-\alpha y}, \qquad \text{pre } y>0.$$

To bude následne implikovať aj konvergensiu distribučných funkcií (tzv. Scheffé-ho lemma). Limitným prechodom a postupným uvedomením si následujúcich faktov:

(a) $\frac{n-1}{n} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 1$

(b) $(1-z/n)^{n-2} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad e^{-z}$

(c) $(0,n) \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad (0,\infty)$

(d) $\Gamma(2)=1$

vpodstate dostaneme výsledok, že náhodná veličina Z_n konverguje v distribúcii pre $n\to\infty$ k náhodnej veličine Y s gamma rozdelením $\Gamma(2,1)$. Hustota f_{Z_n} bodovo konverguje k hustote $f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(2)} y\cdot e^{-y}\cdot\mathbb{I}_{\{y>0\}}$

A3. *[Séria 3, Príklad B6]*
Pre náhodný výber $X_1, \dots, X_n$ z rovnomerného rozdelenia na intervale $(0, \theta_X)$, pre $\theta_X > 0$, je potrebné zostrojiť presný interval spoľahlivosti pre výberový medián, definovaný ako $\widehat{m}_X = X_{(k+1)}$, pričom platí, že $n = 2k+1$, pre $n \in \mathbb{N}$.

Riešenie:
V prvom rade je potrebné si uvedomiť, že teoretický medián v rovnomernom rozdelení na intervale $(0, \theta_X)$ je $m_X = \theta_X/2$. Zároveň platí, že ak náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ majú rovnomerné rozdelenie na intervale $(0, \theta_X)$, tak potom náhodné veličiny $X_1/\theta_X, \dots, X_n/\theta_X$ majú rovnomerné rozdelenie na intervale $(0, 1)$ a teoretický medián je $1/2$. Ak je $X_{(k+1)}$ teda $(k+1)$-vou pořadovou statistikou v usporiadanom náhodnom výbere $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$, tak potom $X_{(k+1)}/\theta_X$ je $(k+1)$-vou pořadovou statistikou v usporiadanom náhodnom výbere $X_{(1)}/\theta_X, \dots, X_{(n)}/\theta_X$.

Obecne platí, že k-ta pořadová statistika v náhodnom výbere $X_1, \dots, X_n$ zo spojitého rozdelenia s distribučnou funkciou $F(x)$ a príslušnou hustotou $f(x)$ má hustotu, ktorú lze vyjádřit ve tvaru

$$f_{(k)}(x) = n \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} f(x)[F(x)]^{k-1}[1 - F(x)]^{n-k}, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

a preto pre $(k+1)$-vú pořadovú statistiku (kde $n = 2k+1$) dostaneme

$$f_{(k+1)}(x) = n \begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} f(x)[F(x)]^{k}[1 - F(x)]^{k}, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

Keďže náhodné veličiny $X_1/\theta_X, \dots, X_n/\theta_X$ majú rovnomerné rozdelenie na intervale $(0, 1)$ s distribučnou funkciou $F(x) = x$ pre $x \in (0, 1)$ (a $F(x) = 0$ pre $x < 0$ a $F(x) = 1$, pre $x > 1$) a hustotou $f(x) = \mathbb{I}_{\{x \in (0,1)\}}$), tak $(k+1)$-vá pořadová statistika $X_{(k+1)}/\theta_X$ má hustotu

$$f_{(k+1)}(x) = n \begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} x^k (1-x)^k \quad \text{for } x \in (0,1) \text{ a } f_{(k+1)}(x) = 0 \text{ jinak.}$$

Náhodná veličina $X_{(k+1)}/\theta_X$ má teda Beta rozdelenie s parametrami $\alpha = k+1$ a $\beta = k+1$. Táto náhodná veličina je zároveň naším odhadom pre teoretický medián, teda hodnotu $1/2$ (napr. $\widetilde{m}_X$).

Jedna z možnosti, ako zostrojiť presný interval spolahlivosti pre medián, teda parameter $m_X = \theta_X/2$ (ale táto možnosť nebola správna v zmysle požadovaného riešenia) by bolo využiť príslušné kvantily beta rozdelenia. Beta rozdelenie ale nepatrí k štandardným rozdeleniam v zmysle bežne tabulovaných kvantilov. Preto (v zmysle správneho riešenia) je nutné hľadať možnosť, ako využit kvantily buď normálneho rozdelenia, studentovho t rozdelenia, χ^2 rozdelenia, alebo Fisherovho F rozdelenia (ktoré sú bežne tabulované v štatistických tabuľkách).

V tomto prípade použijeme to posledné—Fisherovo F rozdelenie. Obecně totiž platí, že pre náhodnú veličinu s beta rozdelením $Z \sim Beta(\alpha/2, \beta/2)$ má transformovaná náhodná veličina $\frac{\beta Z}{\alpha(1-Z)}$ Fisherovo F rozdelenie s α a β stupňami voľnosti. V našom konkrétnom prípade teda dostávame, že ak

$$\frac{X_{(k+1)}}{\theta_X} \sim Beta(k+1, k+1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{2(k+1)X_{(k+1)}/\theta_X}{2(k+1)(1 - X_{(k+1)}/\theta_X)} = \frac{X_{(k+1)}}{\theta_X - X_{(k+1)}} \sim F_{2(k+1),2(k+1)}.$$

Pre príslušné kvantily (ktoré pre stručnosť označíme ako $f_{\alpha/2}$ a $f_{1-\alpha/2}$) z Fisherovho F rozdelenia s $2k+2$ a $2k+2$ stupňami voľnosti, môžeme písať

$$P\left[f_{\alpha/2} \leq \frac{X_{(k+1)}}{\theta_X - X_{(k+1)}} \leq f_{1-\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

a použitím ekvivalentných úprav tiež

$$P\left[\frac{X_{(k+1)}}{f_{1-\alpha/2}} \leq \theta_X - X_{(k+1)} \leq \frac{X_{(k+1)}}{f_{\alpha/2}}\right] = P\left[X_{(k+1)} + \frac{X_{(k+1)}}{f_{1-\alpha/2}} \leq \theta_X \leq X_{(k+1)} + \frac{X_{(k+1)}}{f_{\alpha/2}}\right] = 1-\alpha.$$

Teď si už jenom stačí uvědomit, že máme konfidenčný interval pre parameter $\theta_X > 0$, zatial čo v zadaní sme požadovali konfidenčný interval pre parameter $m_X = \theta_X/2$. Stačí teda hornú a dolnú hranicu intervalu podelit hodnotou $1/2$ a získame interval spolehlivosti pro $\theta_X/2$, čo je vlastne parameter teoretického mediánu v rovnomernom rozdelení na intervale $(0, \theta_X)$.

A4. *[Séria 3, Príklad B7]*
Pre náhodný výber $X_1, \ldots, X_n$ z Poissonovho rozdelenia s parametrom $\lambda > 0$ sestrojte pomoci CLV přibližný interval spolehlivosti pro $\lambda > 0$. Pomoci CLV sestrojte také přibližný interval spolehlivosti pro parameter $\sqrt{\lambda}$ a tento interval využijte pro odvození přibližného intervalu spolehlivosti pro $\lambda > 0$.

Riešenie:
Centrální limitní věta říka, že pro náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim Poiss(\lambda)$ (pre strednú hodnotu a rozptyl platí, že $EX = \lambda$ a tiež $VarX = \lambda$) máme

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \lambda),$$

pre $n \to \infty$. Analogicky tiež

$$\sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1),$$

opäť pre $n \to \infty$. S využitím kvantilov normovaného normálneho rozdelenia dostávame

$$P\left[u_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \leq u_{1-\alpha/2}\right] \approx 1-\alpha.$$

Problém ale nastane pri pokuse aplikovať ekvivalentné úpravy na výraz v zátvorke, aby sme osamostatnili uprostred neznámy parameter $\lambda > 0$ a explicitne tak definovali dolnú a hornú medzu intervalu spoľahlivosti. Riešenie ponúka tzv. Cramér-Slutského veta, ktorá obecně říka, že ak

$$\left[X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \quad \text{a zároveň} \quad Y_n \xrightarrow{P} c\right] \Longrightarrow X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} cX.$$

Teda ak postupnosť náhodných veličín konverguje v distribúcii k nejakému limitnému rozdeleniu a postupnosť vynásobime inou náhodnou veličinou, ktorá v pravdepodobnosti konverguje ku nenulovej konštante, tak potom súčin konverguje v distribúcii k povodnému limitnému rozdeleniu, ktoré je danou konštantou príslušne preškálované.

Pre potreby tohto príkladu využijeme Cramér-Slutského vetu následovne:

$$\underbrace{\sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\lambda}}}_{\longrightarrow^{\mathcal{D}} N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\overline{X}_n}}}_{\longrightarrow^{P} 1} = \sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\overline{X}_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

Konvergenciu v distribúcii pre prvý výraz máme zaručenú centrálnou limitnou vetou. Druhý výraz konferguje k pravdepodobnosti k jednotke, čo plynie z vety o spojitej transformácii, pretože $\overline{X}_n$ (výberový priemer) je konzistentným odhadom parametru $\lambda > 0$ (teoretickej strednej hodnoty). Inými slovami, neznámu směrodatnú chyby v jmenovateli zlomku jsme nahradili konzistentným odhadem. Konfidenčný interval získame ekvivalentnými úpravami z následujúceho výrazu:

$$P\left[u_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\overline{X}_n}} \leq u_{1-\alpha/2}\right] \approx 1 - \alpha.$$

Pamätať na to, že sa jedná pouze o asymptoticky, resp. přibližný interval spoľahlivosti.

Pre druhú časť riešenia využijeme transformáciu $g(x) = \sqrt{x}$. Dostaneme teda

$$\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\lambda)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, [g'(\lambda)]^2 \cdot \lambda).$$

Jedná sa o tzv. "rozptyl stabilizujúcu transformáciu", pretože $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ a $[g'(\lambda)]^2 = \frac{1}{4\lambda}$ a je zrejmé, že neznámy parameter sa v asymptotickom rozptyle vykráti. Asymptotický rozptyl teda nebude závisieť na neznámom parametri $\lambda > 0$ a dostaneme

$$P\left[u_{\alpha/2} \geq 2\sqrt{n}(\sqrt{\overline{X}_n} - \sqrt{\lambda}) \geq u_{1-\alpha/2}\right] \approx 1 - \alpha.$$

Aplikáciou ekvivalentných úprav získame požadovaný interval spoľahlivosti parameter $\lambda > 0$.

A5. *[Séria 3, Príklad B10]*
Pomocou náhodného výberu $X_1, \dots, X_n$ z rozdelenia daného hustotou $f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1}$ pre $x \in (0, 1)$ je potrebné zostrojiť presný interval spoľahlivosti a pomocou CLV aj približný interval spoľahlivosti pre $\theta > 0$ (a nejaké vhodné $\alpha \in (0, 1)$).

Riešenie:
Je dobré si uvedomiť, že sa jedná o Beta rozdelenie $Beta(\theta, 1)$ so strednou hodnotou $EX_1 = \frac{\theta}{\theta+1}$ a je prirodzené, že odhad parametru sa snažíme zostrojit pomocou výberového priemeru $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ (keďže je zrejmá väzba medzi neznámym parametrom a strednou hodnotou). Potrebujeme ale poznať presné rozdelenie nejakej vhodnej pivotnej štatistiky – napr. náhodného súčtu $\sum_{i=1}^n X_i$, aby sme boli schopní zostrojiť presný interval spoľahlivosti. Využijeme k tomu transformáciu, ktorú ponúka zadanie, t.j., $t : Y_i = -\log X_i$.

Hustota náhodnej veličiny Y_i je daná (z vety o transformácii) predpisom

$$f_Y(y) = f_X(t^{-1}(y)) \cdot |((t^{-1})'y)| = \theta(e^{-y})^{\theta-1} \cdot | - e^{-y}| = \theta e^{-\theta y},$$

pre $y > 0$ a $f_Y(y) = 0$ inak. Náhodné veličiny $-\log X_1, \dots, -\log X_n$ majú teda exponenciálne rozdelenie s parametrom $\theta > 0$ (tak, že stredná hodnota je $E[-\log X_i] = 1/\theta$). Zároveň už poznáme vzťah medzi exponenciálnym rozdelením a Gamma rozdelením (prípadne χ^2 rozdelením). Exponenciálne rozdelenie s parametrom jedna polovina (t.j., stredná hodnota je 2) je to samé rozdelenie, ako $Gamma(\lambda = \frac{1}{2}, n = 1)$. Zároveň súčet n nezávislých náhodných veličín s exponenciálnym rozdelením s parametrom $\lambda > 0$ má Erlangovo rozdelenie s parametrami n (velikosť součtu) a $\lambda > 0$ – čo je vlastne $Gamma(\lambda, n)$ rozdelenie. A nakoniec vieme, že $Gamma(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})$ je vlastne χ^2 rozdelenie s n stupňami voľnosti. Toto všetko potrebujeme využiť ku konštrukcii presného intervalu spoľahlivosti pre neznámy parameter $\theta > 0$.

Náhodný súčet $-2\theta\sum_{i=1}^n \log X_i$ má Erlangovo rozdelenie $Erlang(n, \frac{1}{2})$ (pretože stredná hodnota $E[-2\theta \log X_i] = 2\theta E[-\log X_i] = 2$, čo znamená, že náhodná veličina $-2\theta \log X_i$ má exponenciálne rozdelenie s parametrom $\lambda = \frac{1}{2}$).

Celkovo teda dostaneme, že

$$-2\theta\sum_{i=1}^n \log X_i \sim \Gamma\Big(n, \frac{1}{2}\Big) \equiv \chi^2_{2n}.$$

Pre presný interval spoľahlivosti nám stačí použiť kvantily χ^2 rozdelenia s $2n$ stupňami voľnosti a dostaneme výraz

$$P\left[\chi^2_{2n}(\alpha/2) \leq -2\theta \sum_{i=1}^{n} \log X_i \leq \chi^2_{2n}(1-\alpha/2)\right] = 1-\alpha.$$

Ekvivalentnými úpravami získame z predchádzajúceho výrazu potrebný (presný) interval spoľahlivosti pre neznámy parameter $\theta > 0$.

Pre približný interval spoľahlivosti použijeme Centrálnu limitnú vetu (CLV), vďaka ktorej vieme, že

$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\log X_i) - \frac{1}{\theta}\Big) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\Big(0, \frac{1}{\theta^2}\Big).$$

To zároveň znamená, že

$$\sqrt{n}\frac{\big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\log X_i) - \frac{1}{\theta}\big)}{\frac{1}{\theta}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

Použitím kvantilov štandardného normálneho rozdelenia získame výraz

$$P\left[u_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}\left(\frac{\theta}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\log X_i) - 1\right) \leq u_{1-\alpha/2}\right] \approx 1-\alpha$$

a pomocou ekvivalentných úprav získame konečný výraz pre približný interval spoľahlivosti pre neznámy parameter $\theta > 0$.