Požadavky ke zkoušce z předmětu NMMA301 Úvod do komplexní analýzy, LS 2025/26

Roman Lávička

(verze ze dne 12.2. 2026)

Zkouška bude písemná a má 2 části. Teoretická část bude trvat 60 minut a početní část 75 minut. Z každé části může student získat maximálně 30 bodů a musí mít aspoň 15 bodů, aby u zkoušky uspěl. Pokud student získá z každé části aspoň 15 bodů, pak bude hodnocen podle dosaženého bodového součtu z obou částí takto: výborně za 51 - 60 bodů, velmi dobře za 41 - 50 bodů a dobře za 30 - 40 bodů. Při zkoušce není dovoleno používat nic kromě psacích potřeb.

Student má právo podívat se na opravenou písemku a vznést případné námitky pouze při vyhlašování výsledků, které proběhne zpravidla týž den jako zkouška.

Požadavky z teoretické části:

1. Zavedení prostoru komplexních čísel $\mathbf{C}$, základní vlastnosti.
2. Derivace komplexní funkce komplexní proměnné, základní vlastnosti, Cauchy-Riemannova věta. Slabá věta o holomorfní inverzi.
3. Elementární funkce v $\mathbf{C}$: exponenciála a logaritmus. Hlavní hodnota argumentu a logaritmu. Základní vlastnosti.
4. Definice (regulární) křivky a křivkového integrálu, základní vlastnosti.
5. Tvrzení o výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce.
6. Oblasti a komponenty otevřené množiny v $\mathbf{C}$.
7. Věta o existenci primitivní funkce na obecné a na hvězdovité oblasti.
8. Goursatovo lemma aneb Cauchyho věta pro trojúhelník.
9. Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti.
10. Věta o derivování integrálu závislého na komplexním parametru.
11. Definice indexu bodu vzhledem ke křivce. Věta o základních vlastnostech indexu.
12. Cauchyho vzorec pro kruh. Cauchyho odhady.
13. Morerova věta.
14. Liouvilleova věta. Základní věta algebry.
15. Weierstrassova věta.

16. Konvergence a derivování mocninné řady. Věta o rozvoji holomorfní funkce v mocninnou řadu na kruhu.
17. Věta o nulovém bodě holomorfní funkce.
18. Věta o jednoznačnosti pro holomorfní funkce.
19. Princip maxima modulu.
20. Riemannova sféra $\mathbf{S} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.
21. Klasifikace izolovaných singularit: věta o odstranitelné singularitě, věta o pólu a Weierstrass-Casoratiho věta o podstatné singularitě. Picardova věta (bd).
22. Zavedení a konvergence Laurentových řad.
23. Cauchyho vzorec pro mezikruží.
24. Věta o rozvoji holomorfní funkce v Laurentovu řadu na mezikruží. Věta o Laurentově rozvoji kolem izolované singularity.
25. Rozklad funkce holomorfní s konečně mnoha izolovanými singularitami.
26. Reziduová věta na hvězdovité oblasti.
27. Pravidla pro výpočet reziduí. Věty o výpočtu integrálů probíraných typů pomocí reziduové věty.
28. Jednoznačné větve argumentu a logaritmu podél křivky. Význam a výpočet indexu bodu ke křivce.
29. Obecná Cauchyho a reziduová věta pro cykly a jednoduše souvislé oblasti.
30. Jordanova křivka a Jordanova věta (bd).

(bd) = nebude zkoušen důkaz, jen znění příslušné věty

Požadavky z početní části: Elementární funkce v $\mathbf{C}$, příklady na Laurentovy řady, izolované singularity, rezidua a pomocí reziduové věty výpočet integrálů typu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos x\,dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin x\,dx,$$

$$\int_{0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt,\ \int_{0}^{+\infty} R(x)\,x^{p-1}\,dx \text{ a } \int_{-\infty}^{+\infty} R(e^x)\,e^{px}\,dx,$$

kde R je racionální funkce, $a \in \mathbf{R}$ a p necelé číslo (viz. kapitola 2 v [K]).

Literatura:

[K] J. Kopáček a kol., Příklady z matematiky pro fyziky IV, Matfyzpress, MFF UK Praha, 1996.

[N] B. Novák, Funkce komplexní proměnné pro učitelské studium MFF UK, skripta, 1973

[R] W. Rudin, Reálná a komplexní analýza, Academia Praha, 1977

[V] J. Veselý, Komplexní analýza pro učitele, Karolinum, UK Praha, 2000.

Ve skriptech [N] a [V] jsou rovněž vyřešené základní typy příkladů. Upozorňuji, že v [K] a v [N] se používá odlišné značení pro argument, logaritmus a obecnou mocninu, než jsme zavedli na přednášce (např. pro hlavní hodnotu se užívá značení Log, Ln a Arg).