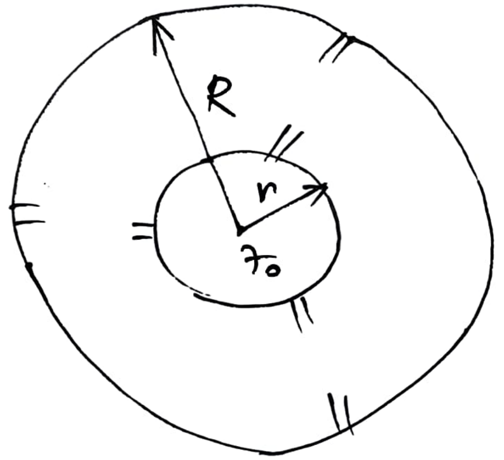
Minule:

- izolované singularity: odstranit., pól, podstatné
- Laurentovy řady: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$



$z \in P(z_0, r, R)$

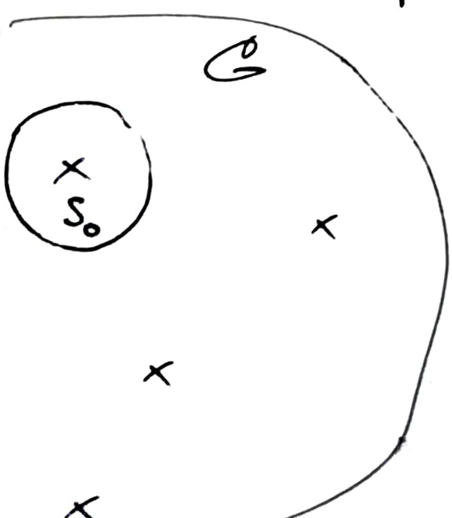
mezikruží

VĚTA (rozklad holomorfní fce s konečně mnoha izolovanými singularitami)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $M \subset G$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \setminus M)$. Pro každé $s \in M$ označme H_s součet hlavních částí Laurentova rozvoje funkce f kolem s. Potom existuje jediná $h \in \mathcal{H}(G)$ tak, že

$$f = \sum_{s \in M} H_s + h \quad \text{na } G \setminus M.$$

DŮKAZ: Zřejmě $H_s \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{s\})$ $\forall s \in M$.



Funkce

$$h := f - \sum_{s \in M} H_s$$

je holomorfní na $G \setminus M$ a v bodech $s \in M$ má odstranitelné singularity. Skutečně, nechť $s_0 \in M$. Potom ex. $r_0 > 0$ tak, že $P(s_0, r_0) \subset G \setminus M$ a $f = R_{s_0} + H_{s_0}$ na $P(s_0, r_0)$, kde R_{s_0} je součet regulárních částí Laurent. rozvoje f kolem s_0 a $R_{s_0} \in \mathcal{H}(U(s_0, r_0))$.

Tedy na $P(s_0,r_0)$ máme

$$h = R_{s_0} + H_{s_0} - \sum_{s\in M} H_s = R_{s_0} - \sum_{\substack{s\in M\\ s\neq s_0}} H_s \in \mathcal{H}(U(s_0,r_0)).$$

$\blacksquare$

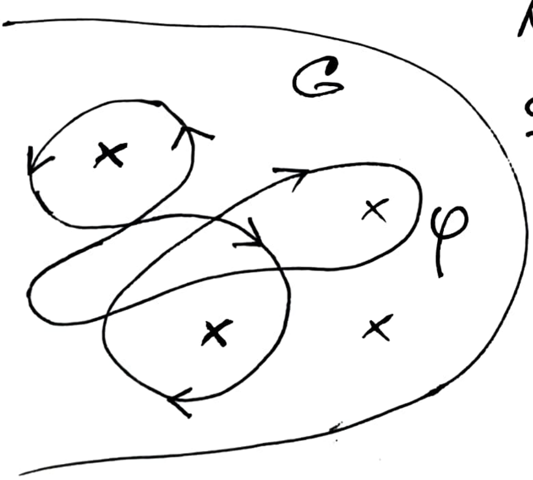
DEF. Nechť $f\in\mathcal{H}(P(z_0))$ a nechť

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z\in P(z_0).$$

Potom reziduem f v z_0 nazveme číslo

$$\operatorname{res}_{z_0} f := a_{-1}.$$

VĚTA (reziduová na hvězdovitých oblastech)



Nechť $G\subset\mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast, $M\subset G$ je konečná a $f\in\mathcal{H}(G\setminus M)$. Nechť φ je uzavřená křivka v $G\setminus M$. Potom máme

$$\text{(RV)} \quad \int_\varphi f = 2\pi i \sum_{s\in M} \operatorname{res}_s f \cdot \operatorname{ind}_\varphi s.$$

Pozn: Pro $M=\emptyset$ dostaneme Cauchyho větu.

Důkaz: Podle předchozí věty ex. $h \in \mathcal{H}(G)$ tak, že

$$f = \sum_{s \in M} H_s + h \quad \text{na } G \setminus M.$$

Potom máme

$$\int_{\varphi} f = \sum_{s \in M} \int_{\varphi} H_s, \quad \text{protože} \quad \int_{\varphi} h = 0 \quad \text{z}$$

Cauchyho věty pro hvězdovitou oblast.

Pro každé $s \in M$ je

$$\int_{\varphi} H_s(z)\,dz = \int_{\varphi} \sum_{n=1}^{+\infty} a^s_{-n} \frac{1}{(z-s)^n}\,dz =$$

konv. stejn. na $\langle \varphi \rangle$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} a^s_{-n} \underbrace{\int_{\varphi} \frac{dz}{(z-s)^n}}_{\begin{cases} 0 & n \neq 1 \text{ (integrand má PF)} \\ 2\pi i \cdot \operatorname{ind}_{\varphi} s, & \text{je-li } n = 1 \end{cases}} = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_s f \cdot \operatorname{ind}_{\varphi} s. \quad ▨$$