

pokud ovšem p není celé číslo. Je-li $p = 0$ nebo $p = 1$, uvedený postup nikam nevede. Příslušné integrály však snadno spočítáme bez použití funkcí komplexní proměnné: $I_0 = 1/8$, $I_1 = 1/4$. Porovnáme-li tyto rovnosti s (*), vidíme, že formule (*) platí i pro vyjimečné hodnoty 0, 1 ve smyslu limity.

PŘÍKLADY

Rozvíňte následující funkce do Laurentovy řady v prstencovém okolí uvedeného bodu nebo na uvedené množině:

291. $1/(z-2)$, $z=0$, $z=\infty$.

292. $1/[(z-a)(z-b)]$, $0 < |a| < |b|$, $z=0$, $z=a$, $z=\infty$, $|a| < |z| < |b|$.

293. $(z^2 - 2z + 5)/[(z-2)(z^2+1)]$, $z=2$, $1 < |z| < 2$.

294. $1/(z^2+1)^2$, $z=i$, $z=\infty$.

295. $z^2 e^{1/z}$, $z=0$, $z=\infty$.

296. $e^{1/(1-z)}$, $z=1$, $z=\infty$.

297. $\cos[(z^2 - 4z)/(z-2)^2]$, $z=2$.

298. $z^2 \sin[1/(z-1)]$, $z=1$.

299. $e^{z+1/z}$, $0 < |z| < \infty$.

300. $\sin z \sin(1/z)$, $0 < |z| < \infty$.

301. $\sin[z/(1-z)]$, $z=1$.

302. $\operatorname{Ln}[(z-a)/(z-b)]$, $z=\infty$.

Zjistěte, zda je možné rozložit následující funkce do Laurentovy řady

v prstencovém okolí uvedených bodů:

303. $\cos \frac{1}{z}$, $z=0$. 304. $\cos \frac{1}{z}$, $z=\infty$.

305. $\frac{1}{\cos z}$, $z=0$. 306. $\frac{1}{\cos z}$, $z=\infty$.

307. $\cotg z$, $z=\infty$. 308. $\frac{z^2}{\sin \frac{1}{z}}$, $z=0$.

309. $\frac{z}{3 - \sin z}$, $z=\infty$. 310. $\operatorname{Ln} z$, $z=0$.

311. $\operatorname{Ln} \frac{1}{z-1}$, $z=\infty$. 312. $\operatorname{Ln} \frac{z-1}{z+i}$, $z=\infty$.

313. z^a , $z=0$. 314. z^a , $z=1$.

Zjistěte, zda následující mnohoznačné funkce mají jednoznačné větve, které je možno rozložit do Laurentovy (resp. Taylorovy) řady v prstencovém okolí (resp. v okolí) uvedeného bodu:

315. \sqrt{z} , $z=0$. 316. $\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}$, $z=\infty$.

317. $\sqrt{z(z-1)}$, $z=\infty$. 318. $\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}$, $z=\infty$.

319. $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z=1$. 320. $\ln[(z-1)(z-2)]$, $z=\infty$.

321. $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z=0$. 322. $\ln \frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)(z-d)}$, $z=\infty$.

Najděte všechny singularity následujících funkcí a charakterizujte je (odstranitelnou singularitu považujte za regulární bod). Vyšetřete též chování v bodě ∞ :

323. $\frac{1}{z-z^3}$. 324. $\frac{z^4}{1+z^4}$. 325. $\frac{z^5}{(1-z)^2}$.

326. $\frac{1}{z(z^2+4)^2}$. 327. $\frac{e^z}{1+z^2}$. 328. $\frac{z^2+1}{e^z}$.

329. ze^{-z} . 330. $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$. 331. $\frac{e^z}{z(1 - e^{-z})}$.
 332. $\frac{1 - e^z}{2 + e^z}$. 333. $e^{z-1/z}$. 334. $e^{z-1/z}$.
 335. $\operatorname{tg} z$. 336. $e^{\cot z}$. 337. $\sin\left(\frac{1}{\sin(1/z)}\right)$.

V příkladech 338 – 343 klasifikujte singularity každé jednoznačné větve zadané víceznačné funkce v uvedených bodech:

338. $\frac{z}{1 + \sqrt{z-3}}$, $z = 4$. 339. $\frac{1}{\sqrt{z+3}\sqrt{z}}$, $z = 1$.
 340. $\frac{2z+3}{1+z-2\sqrt{z}}$, $z = 1$. 341. $\cos \frac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z = 1$.
 342. $\sin \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{z}{z-2}}}$, $z = \infty$.

343. $1/[(2+\sqrt{z})\sin(2-\sqrt{z})]$, $z = 4$ (ve formuli má \sqrt{z} na obou místech stejný význam).

V příkladech 344 – 357 najděte rezidua zadaných funkcí ve všech jejich izolovaných singularitách včetně bodu ∞ :

344. $\frac{1}{z^3 - z^5}$. 345. $\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$. 346. $\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.
 347. $\frac{1}{z(1-z^2)}$. 348. $\frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}$. 349. $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.
 350. $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$. 351. $\operatorname{tg} z$. 352. $\frac{1}{\sin z}$.
 353. $\cot^2 z$. 354. $\cos \frac{1}{z-2}$. 355. $z^3 \cos \frac{1}{z-2}$.
 356. $e^{z+1/z}$. 357. $\sin \frac{z}{z+1}$.

V příkladech 358 – 365 najděte reziduum každé větve zadané více-

značné funkce v uvedeném bodě:

358. $\frac{\sqrt{z}}{1-z}$, $z = 1$. 359. $\frac{1}{\sqrt{2-z+1}}$, $z = 1$.
 360. $\frac{z}{1-\sqrt{z}}$, $z = 1$. 361. $\sqrt{(z-a)(z-b)}$, $z = \infty$.
 362. $\ln \frac{z-a}{z-b}$, $z = \infty$. 363. $e^z \ln \frac{z-a}{z-b}$, $z = \infty$.
 364. $\ln z \sin \frac{1}{z-1}$, $z = 1$. 365. $\ln z \cos \frac{1}{z-1}$, $z = 1$.

V příkladech 366 – 374 vypočítejte krivkové integrály (všechny křivky uvažujte orientované v kladném smyslu):

366. $\int_{x^2+y^2=2x} \frac{dz}{z^4+1}$. 367. $\int_{|z-2|=1/2} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}$.
 368. $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$ (uvažte reziduum v ∞).
 369. $\int_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{2z^4+1}$. 370. $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r>0} \sin \frac{1}{z} dz$.
 371. $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sin^2 \frac{1}{z} dz$. 372. $\int_{|z|=3} (1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-2}}) dz$.
 373. $\int_{|z|=5} \frac{z dz}{\sin z(1-\cos z)}$. 374. $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{\sqrt{z^2+2z+1}}$, $r \neq 1$.

375. Vypočítejte $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$ ($\sqrt{1} = 1$), kde C je parabola $y^2 = x$, probíhaná ve směru růstu y .

Vypočítejte integrály

376. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+4x+13)^2}$. 377. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$.
 378. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. 379. $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

$$380. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}, a > 0, b > 0.$$

381. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ (integrujte podél obvodu výšeže $0 \leq \arg z \leq 2\pi/n$, $|z| \leq R$ a pak $R \rightarrow \infty$).

$$382. \int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{1+x^{2n}}, n \in \mathbb{N}, n > 1. \quad 383. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

$$384. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx. \quad 385. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx.$$

$$386. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 25}. \quad 387. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^3}.$$

$$388. \int_0^{\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4 + a^4)^2}, a > 0. \quad 389. \int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{(a + bx^2)^4}, a > 0, b > 0.$$

$$390. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2}, a > 0, b > 0.$$

$$391. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a + bx^2)^n}, a > 0, b > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Pomocí Jordanova lemmatu vypočítejte následující integrály:¹⁴

$$392. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}. \quad 393. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

$$394. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}. \quad 395. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax dx}{x^2 + b^2}, a > 0, b > 0.$$

$$396. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x dx}{x^2 + 2x + 2}. \quad 397. \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax dx}{x^2 + b^2}, a > 0, b > 0.$$

¹⁴Integrály se chápou v zobecněném smyslu, např. $\int_0^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R$.

$$398. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{x^4 + 5x^2 + 4}. \quad 399. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x) \sin x dx}{x^4 + 10x^2 + 9}.$$

$$400. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x^3 + 13x \sin x dx)}{x^4 + 13x^2 + 36}. \quad 401. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \cos 2x dx}{x^2 - 4x + 5}.$$

$$402. \int_0^{\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2 + a^2)^2}, a > 0. \quad 403. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax dx}{(x^2 + b^2)^2}, a > 0, b > 0.$$

$$404. \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + a^2)^3}, \operatorname{Re} a > 0. \quad 405. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax dx}{x^4 + x^2 + 1}, a > 0.$$

$$406. \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}, \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} b > 0.$$

Vypočítejte hlavní hodnoty integrálů

$$407. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x-t)}, a > 0, t \in \mathbb{R}.$$

$$408. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{iax} dx}{x^2}, a > 0, b > 0, a < 0.$$

$$409. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-a}, a \operatorname{Im} a > 0, b \operatorname{Im} a < 0.$$

$$410. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 5x + 6}. \quad 411. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2 + 4)(x-1)}.$$

$$412. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx dx}{1+x^3}, t \in \mathbb{R}. \quad 413. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1-x^4}, t \in \mathbb{R}.$$

Vypočítejte integrály (a, b jsou kladná reálná čísla):

$$414. \int_0^{\infty} \frac{x^2 - b^2 \sin ax}{x^2 + b^2} \frac{\sin ax dx}{x} dx. \quad 415. \int_0^{\infty} \frac{\sin ax dx}{x(x^2 + b^2)}.$$

$$416. \int_0^{\infty} \frac{\sin ax dx}{x(x^2 + b^2)^2}. \quad 417. \int_0^{\infty} \frac{\cos b2ax - \cos 2bx}{x^2} dx.$$

$$418. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax dx}{x^2(x^2 + b^2)}. \quad 419. \int_0^{\infty} \frac{x - \sin x dx}{x^3(x^2 + a^2)}.$$

420. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ (integrujte funkci $\frac{e^{2iz}-1}{z^2}$ podél hranice horního polo-
mezikruží se středem v počátku).

421. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$ (integrujte funkci $\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}$ podél křivky z příkladu
420).

422. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$.

Metodou z příkladu 4.M. spočítejte integrály (a je reálné):

423. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ax} dx}{(e^x+1)(e^x+2)}$, $0 < a < 2$.

424. $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx$. (Integrujte funkci $e^{iaz} / \sinh z$ přes obvod obrazce
 $|\operatorname{Re} z| \leq R$, $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi$, $|z| \geq r$, $|z - 2\pi i| \geq r$).

425. $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\cosh x} dx$. 426. $\int_0^{\infty} \frac{x \cos ax}{\sinh x} dx$.

427. $\int_0^{\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x} dx$, $|a| \leq \pi$ (obvod obdélníka $|\operatorname{Re} z| \leq h$, $0 \rightarrow \infty$, $0 \leq$
 $\operatorname{Im} z \leq 1$)

428. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1+a^2-2a \cos x}$, $a > 0$ (obvod obdélníka $|\operatorname{Re} z| \leq \pi$, $0 \leq \operatorname{Im} z \leq$
 $h \rightarrow \infty$)

429. $\int_0^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x+e^{2x}}$, $0 < a < 2$. 430. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{\cosh x} dx$, $a > 0$.

Převedením na integraci podél jednotkové kružnice vypočítejte inte-
grály:

431. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}$, $a > 1$. 432. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos t)^2}$, $a > b > 0$.

433. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{13 + 12 \sin t}$. 434. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos t + a^2}$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq \pm 1$.

435. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t dt}{1 - 2a \cos t + a^2}$. 436. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos^2 t)^2}$, $a > 0$, $b > 0$.

437. $\int_0^{\pi} \frac{\cos^4 t dt}{1 + \sin^2 t}$. 438. $\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(ut - \sin t) dt$, $n \in \mathbb{Z}$.

443. $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+ia) dx$, $a \in \mathbb{R}$. 444. $\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}(x+a) dx$, $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} a \neq 0$.

445. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t dt}{13 + 12 \cos t}$. 446. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 t dt}{1 - 2a \cos t + a^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

443. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $b) |a| < 1$ (hlavní hodnota).

444. $\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 t dt}{1 - a \sin^2 t}$, $a \in \mathbb{R}$, $a) 0 < a < 1$, $b) a > 1$ (hlavní hodnota).

445. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt dt}{1 - 2a \sin t + a^2}$, $|a| < 1$, $n \in \mathbb{N}$.

446. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2 \cos t)^n}{5 + 4 \cos t} \cos nt dt$, $n \in \mathbb{N}$.

447. $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos^2 t - \cos^2 a}{\sin t - \sin a} \right)^n e^{int} dt$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Obdobnými metodami jako v příkladech 4.O, 4.P, 4.Q, 4.R. vypočítejte
reálné integrály:

448. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$. 449. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}}$. 450. v.p. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}$.

451. $\int_0^{\infty} \frac{\cos(\ln x) dx}{x^2+1}$. 452. $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\ln x) dx}{x^2+4}$.

453. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^a(x+b)}$, $0 < a < 1$, $a) b > 0$, $b) b < 0$ (hlavní hodnota).

454. $\int_0^{\infty} \frac{x^a dx}{(x+b)(x+2b)}$, $|a| < 1$, $b > 0$.

455. $\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, $0 < a < 3$.

$$456. \int_0^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{x^2 + a^2}, \quad a > 0. \quad 457. \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x \, dx}{x^2 + a^2}, \quad a > 0.$$

$$458. \int_0^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{(x+1)\sqrt{x}}. \quad 459. \int_0^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{(x-1)\sqrt{x}}.$$

$$460. \int_0^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{(x^2+1)^2\sqrt{x}}. \quad 461. \int_0^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{(x^2+1)\sqrt{x}}.$$

Metodou z příkladu 4.S. vypočítejte reálné integrály:

$$462. \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p \, dx}{(1+x^2)}, \quad -1 < p < 2.$$

$$463. \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^p \frac{dx}{x+a}, \quad |p| < 1, \quad a > 0.$$

$$464. \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^p \frac{dx}{(x+a)^2}, \quad |p| < 1, \quad a > 0.$$

$$465. \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p \, dx}{1+x^2}, \quad -1 < p < 2.$$

$$466. \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$$

$$467. \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p \, dx}{1+x^2}, \quad -1 < p < 2.$$

$$468. \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} \ln \frac{x}{1-x} \, dx.$$

$$469. \int_{-1}^1 \ln \frac{1+x}{1-x} \sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)} \, dx$$

Vypočítejte následující integrály (výsledky vyjádřete pomocí funkce gamma):

$$470. \int_0^{\infty} x^z e^{-x^2} \, dx, \quad \operatorname{Re} z > -1.$$

$$471. \int_0^{\infty} x^z e^{-x^p} \, dx, \quad p > 0, \quad \operatorname{Re} z > -1.$$

$$474. \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

$$475. \int_0^{\infty} t^{z-1} \cos t \, dt, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1.$$

$$476. \int_0^{\infty} t^{z-1} \sin t \, dt, \quad |\operatorname{Re} z| < 1.$$

$$475. \int_0^{\infty} \sin x^p \, dx, \quad p > 1. \quad 476. \int_0^{\infty} \cos x^p \, dx, \quad p > 1.$$

$$477. \int_0^{\infty} \frac{\sin x^p \, dx}{x^p}, \quad p > \frac{1}{2}. \quad 478. \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x^p \, dx}{x^{2p}}, \quad p > \frac{1}{2}.$$

2.5. Grupa lineárních lomených zobrazení Konformní zobrazení

Základními zobrazeními rozšířené komplexní roviny $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ rozumíme *stejnolehlost* $S(z) = rz$, $r > 0$, $S(\infty) = \infty$, *otočení* $O(z) = e^{it}z$, $t \in \mathbb{R}$, $O(\infty) = \infty$, *posunutí* $P(z) = z + a$, $a \in \mathbb{C}$, $P(\infty) = \infty$ a (*kruhovou*) *inverzi* $I(z) = 1/z$, $I(0) = \infty$, $I(\infty) = 0$.

Lineárním lomeným zobrazením (též *homografií* nebo *Möbiovou transformací*) rozumíme zobrazení rozšířené komplexní roviny $\bar{\mathbb{C}}$ tvaru

$$(*) \quad L(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad \neq bc$. Klademe samozřejmě $L(\infty) = a/c$ pro $c \neq 0$, $L(\infty) = \infty$ pro $c = 0$ a nakonec $L(-d/c) = \infty$ pro $c \neq 0$.

Každá homografie je složením konečného počtu základních zobrazení. Je-li $[z_1, z_2, z_3]$ uspořádaná trojice navzájem různých bodů z \mathbb{C} a $[w_1, w_2, w_3]$ jiná taková trojice, pak existuje právě jedna homografie L , pro níž je $L(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$.

Zobecněnou kružnicí v $\bar{\mathbb{C}}$ rozumíme kružnici v \mathbb{C} nebo přímku sjednocenou s bodem ∞ ; *zobecněný kruh* je každá ze dvou komponent doplňku zobecněné kružnice.

Buďte K_1, K_2 zobecněné kruhy, C_1, C_2 jejich hraniční zobecněné kružnice a $z_j \in K_j$, $h_j \in C_j$, $j = 1, 2$ body. Pak existuje právě jedna homografie L , splňující $L(C_1) = C_2$, $L(z_1) = z_2$, $L(h_1) = h_2$; pro tuto homografii navíc platí: $L(K_1) = K_2$, $L(\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{K}_1) = \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{K}_2$.

- $\sin(x/2)$. **128** $(\sin 2nx)/(2 \sin x)$. **129** $(\sin^2 nx)/(\sin x)$. **130**
 $\sin((n+1)x/2) \cos(nx/2) / \cos(x/2)$ pro n liché, $-\cos((n+1)x/2)$
 $\sin(nx/2) / \cos(x/2)$ pro n sudé. **131** $\sin((n+1)\beta/2) \cos(\alpha + n\beta/2) /$
 $(\sin(\beta/2))$: **132** $\sin((n+1)\beta/2) \sin(\alpha + n\beta/2) / (\sin(\beta/2))$. **143** $\cos 2$
 $\cosh 1 - i \sin 2 \sinh 1$. **144** $i \sinh 2$. **145** $\frac{\sin 4 - i \sinh 2}{2(\cos^2 2 + \sinh^2 1)}$. **146** $(8 +$
 $15i)/17$. **147** $\frac{\sinh 4 - i \sin 2}{\cosh 4 - \cos 2}$. **148** $(40 + 9i)/41$. **149** πi . **150** $\pi i/2$.
151 $\pm \pi i/4$. **152** $\ln \sqrt{13 - i} \operatorname{arctg}(3/2)$. **153** $\ln \sqrt{13 + i} (\pi - \operatorname{arctg}(3/2))$.
154 $2 \ln z \subseteq \ln(z^2)$. **155** Obecně vzato platí $z^{2\alpha} = (z^\alpha)^2 \subseteq (z^2)^\alpha$.
156 $\cos(2k\sqrt{2}\pi) + i \sin(2k\sqrt{2}\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. **157** $2\sqrt{2}(\cos(2k+1)\pi\sqrt{2} +$
 $i \sin(2k+1)\pi\sqrt{2})$, $k \in \mathbb{Z}$. **158** $e^{2k\pi} (\cos \ln 2 + i \sin \ln 2)$, $k \in \mathbb{Z}$. **159**
 $e^{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. **160** $e^{(2k+1/4)\pi} (1 - i)/\sqrt{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. **161** $5 \exp(\operatorname{arctg} \frac{4}{3} +$
 $2k\pi) (\cos(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}) + i \sin(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}))$. **162** $-5 \exp(\operatorname{arctg} \frac{4}{3} +$
 $(2k+1)\pi) (\cos(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}) + i \sin(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}))$. **163** $z = \frac{\pi}{4} +$
 $2k\pi - i \ln(\sqrt{2} \pm 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. **164** $z = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - \ln \frac{3\pm\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$.
165 $z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - \ln \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$, $z = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi - \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$. **166**
 $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **167** $z = -\ln 2 + (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **168** $z = 2k\pi i$,
 $z = -\ln 3 + (2k-1/2)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **169** $2\pi/3$. **170** 2π . **171** π .
172 0 . **173** 4π . **174** -2π . **175** 0 . **176** 4π .

2.3.

- 181** $2 + i$. **182** $-\pi/2$. **183** $\sqrt{5}(1 - i/2)$. **184** $2i$. **185** $4/3$.
186 0 pro $n \neq -1$; $2\pi i$ pro $n = -1$. **187** $-2(1 - i)$. **188** $2(1 - i)$.
189 $-2(1 + i)$. **190** $4i$. **191** $2\pi i$. **192** -2π . **193** $2\pi Ri$. **194**
 $2\pi Ri$. **195** $\frac{2\pi i}{n+1}$ pro $n \neq -1$, $-2\pi^2$ pro $n = -1$. **196** $(-1)^{n+1} \frac{2\pi i}{n+1}$
pro $n \neq -1$, $-2\pi^2$ pro $n = -1$. **197** $\frac{e^{2\pi i} - 1}{1 + a}$ pro $a \neq -1$, $2\pi i$ pro
 $a = -1$. **198** 0 . **199** $k\pi/3$, $k \in \mathbb{Z}$. **200** $\pm \pi i$. **201** $\pm 2\pi i$. **202**
 $\pm \pi i$. **203** $\pi i/2$. **204** $\frac{\sin a}{a}$. **205** $e^a(1 + a/2)$. **206** 1 . **207** $-e/2$.
208 $1 - e/2$. **209** 1 . **210** ∞ . **211** ∞ . **212** 2 . **213** 1 . **214**
 $1/4$. **215** $1/e$. **216** 0 . **217** 1 pro $|a| \leq 1$; $1/|a|$ pro $|a| > 1$. **218**
 1 ; $|z| = 1$. **219** 1 , $z \neq 1$. **220** 1 , $z \neq 1$. **221** $1/3$, $z \neq -2/3$.
222 $4; \emptyset$. **223** $1/e; \emptyset$. **224** $R = \min(1/a, 1/b)$; $|z| = R$ pro $b > a$;
 $z \neq R$ pro $b \leq a$. **225** $1/3$; $|z| = 1/3$, $z^8 \neq 1$. **226** $\max(a, b)$; \emptyset .

- 227** $|z| < 5$; $\frac{5}{(5-z)^2}$. **228** \mathbb{C} ; $(z^2 + 1 + 1/z)e^{-z} - 1/z$; $z \neq 0$. **229**
 $(1 - z^2/2) \cos z - (z/2) \sin z$; $z \in \mathbb{C}$. **230** $1 + (1 - z) \frac{\operatorname{Ln}(1-z)}{z}$, $v 0$
definueme limitou; $|z| < 1$. **231** $|z| < 1$; $\frac{1+z}{(1-z)^3}$. **232** $|z| < 1$; $\frac{z(1-z)}{(1+z)^3}$.
233 $|z| < 1$; $\frac{2z}{(1-z)^3}$. **234** $|z| < 1$; $\frac{z(3-z)}{(1-z)^3}$. **235** $z \in \mathbb{C}$; $(1 + 2z^2)e^{z^2}$.
236 $1/2e$. **237** $\pi/3\sqrt{3} + (\operatorname{Ln} 2)/3$. **238** $1 - \operatorname{Ln} 4$. **239** $\operatorname{Ln} 2 - \pi/2$.
240 $-\ln |2 \sin(x/2)|$; $0 < |x| \leq \pi$. **241** $(\pi - x)/2$; $0 < x < 2\pi$.
242 $\ln(2 \cos(x/2))$; $|x| < \pi$. **243** $x/2$; $|x| < \pi$. **244** $2e^z$. **245**
 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} z$. **246** $\sin rz$. **247** ze^z . **248** z . **249**
 $1/(1 - z^2)$; $z/(1 - z^2)$. **250** $1/(1 - z + z^2)$; $z/(1 - z + z^2)$. **252** $\pi/2$.
253 $\Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}$. **254** $\Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}$. **255** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$; $R = \infty$. **256**
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $R = \infty$. **257** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$; $R = \infty$. **258**
 $\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$; $R = \infty$. **259** $a^b \sum_{n=0}^{\infty} \binom{b}{n} (z/a)^n$, kde $\binom{b}{0} = 1$,
 $\binom{b}{n} = \frac{b(b-1)\dots(b-n+1)}{n!}$, $n = 1, 2, \dots$. **260** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n z^n}{b^{n+1}}$; $R = |b/a|$.
261 $\frac{1+i}{\sqrt{2}} (1 + \frac{1}{2} \frac{z}{i} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-3\dots(2n-3)}{2\cdot4\cdots 2n} (z/i)^n)$; $R = 1$. **262**
 $(i/6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3i)^n - (2+3i)^n}{13^n} z^n$; $R = \sqrt{13}$. **263** $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) z^n$;
 $R = 1$. **264** $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$; $R = 1$. **265** $\operatorname{Ln} 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 + 1/2^n) z^n/n$;
 $R = 1$. **266** $\frac{1}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$; $R = 3$. **267** $\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} (z -$
 $1)^{2n} + (z-1)^{2n+1}$; $R = 2$. **268** $\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-3)(z-1)^n}{2^{n+2}}$; $R = 2$.
269 $\frac{-1+iv\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} (z-1)^n$; $R = 1$. **270** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}$;
 $R = 1$. **271** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(1+n\pi/2)}{\sin(1+n\pi/2)} (z-1)^{2n}$; $R = \infty$. **272** $1 + z^2 + z^4/3 + \dots$
273 $1 - z^2/4 - z^4/96 + \dots$. **274** $1 + z^2 - z^3/2 + 5z^4/6 - 3z^5/4 + \dots$
275 $1 + z + z^2 + 5z^3/6 - 5z^4/8 + 13z^5/30 + \dots$. **276** $z + z^2/2! + 2z^3/3! +$
 $9z^5/5! + \dots$. **277** $2[z^2/2 + (1 + 1/2)z^3/3 + (1 + 1/2 + 1/3)z^4/4 + \dots +$
 $(1 + 1/2 + \dots + 1/(n-1))z^n/n \dots]$. **278** $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{(n-1)^{k-1}}{k-1} \right] z^n$.
279 2 . **280** 1 . **281** 1 . **282** 2 . **283** 2 . **284** 15 . **285** 3 .

2.4.

- 291** $-(1/2) \sum_{n=0}^{\infty} (z/2)^n$ pro $|z| < 2$; $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n/z^{n+1}$ pro $|z| > 2$.
292 $\frac{1}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{a^{n+1} b^{n+1}}$ pro $|z| < |a|$; $\frac{1}{b-a} \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}$ pro $0 <$
 $|z-a| < |b-a|$; $\frac{1}{b-a} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^{n-1} - a^{n-1}}{z^n}$ pro $|z| > |b|$; $\frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} +$

$\frac{a^n}{z^{n+1}}$ pro $|a| < |z| < |b|$. **293** $\frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2+i)^{n+1} - (2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}$ ($z - 2$)ⁿ pro $0 < |z - 2| < \sqrt{5}$; $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ pro $1 < |z| < 2$. **294** $\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(n+3)^n (z-i)^n}{2^{n+1}}$ pro $0 < |z - i| < 2$; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{z^{2n+2}}$ pro $|z| > 1$. **295** $\frac{1}{2} + z + z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)! z^n}$ pro $0 < |z| < \infty$. **296** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(z-1)^n}$ pro $0 < |z - 1| < \infty$; $1 - \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}) \frac{1}{z^n}$ pro $|z| > 1$. **297** $\cos 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 4^{k-1} \sin 1}{(2k-1)!(z-2)^{k-1}}$ pro $0 < |z - 2| < \infty$. **298** $(z - 1) + 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(2k-1)!(z-2)^{k-1}} + \frac{2(-1)^k}{(2k+1)!(z-1)^{2k}}$ pro $0 < |z - 1| < \infty$. **299** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!(n+k)!}) (z^n + \frac{1}{z^n})$. **300** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} < \infty$. **301** $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(1+n\pi/2)}{n!(z-1)^n}$ pro $0 < |z - 1| < \infty$. **302** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n - a^n}{n z^n}$ pro $|z| > \max(|a|, |b|)$. **303** ano. **304** ano. **305** ano. **306** ne. **307** ne. **308** ne. **309** ne. **310** ne. **311** ne. **312** ano. **313** je pro $a \in \mathbb{Z}$. **314** ano. **315** ne. **316** ne. **317** ano, obě větve. **318** ne. **319** ano, všechny tři. **320** ano, dvě ze čtyř. **321** ne. **322** ne. **323** ano, každá větev. **324** $z = 0$, $z = \pm 1$ jsou jednoduché póly, ∞ je regulární bod. **325** $z = 0$ je jednoduchý pól, $z = \pm 2i$ jsou dvojnásobné póly, ∞ je regulární. **327** $z = \pm i$ jsou jednoduché póly, ∞ je podstatná singularita. **328** ∞ je podstatná singularita. **329** ∞ je podstatná singularita. **330** $z = 2k\pi i$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ jsou jednoduché póly, ∞ je hromadný bod pólů. **331** $z = 0$ je dvojnásobný pól, $z = 2k\pi i$, $k = \pm 1, 2, \dots$ jsou jednoduché póly, ∞ je hromadný bod pólů. **332** $z = \operatorname{Ln} 2 + (2k + 1)\pi i$, k celé, jsou jednoduché póly, ∞ je hromadný bod pólů. **333** $z = 1$ je podstatná singularita, ∞ je regulární bod. **334** $z = 0$ a ∞ jsou podstatné singularity. **335** $z = (2k + 1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$ jsou jednoduché póly, ∞ je hromadný bod pólů. **336** $z = 1/k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ jsou podstatné singularity, 0 je hromadný bod podstatných singularit, ∞ je podstatná singularita. **337** výsledek jako v příkladu **336**. **338** pro jednu větev regulární bod, pro druhou jednoduchý pól. **339** pro jednu větev jednoduchý pól, pro ostatních pět větví regulární bod. **340** pro jednu větev dvojnásobný pól, pro druhou regu-

lární bod. **341** pro jednu větev regulární bod, pro druhou podstatná singularita. **342** pro jednu větev regulární bod, pro druhou podstatná singularita. **343** pro obě větve jednoduchých pól. **344** $\operatorname{res}_{\pm 1} f = -1/2$, $\operatorname{res}_0 f = 1$, $\operatorname{res}_{\infty} f = 0$. **345** $\operatorname{res}_i f = -i/4$, $\operatorname{res}_{-i} f = i/4$, $\operatorname{res}_{\infty} f = 0$. **346** $\operatorname{res}_{-1} f = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = -\operatorname{res}_{\infty} f$. **347** $\operatorname{res}_0 f = 1$, $\operatorname{res}_{\pm 1} f = -1/2$, $\operatorname{res}_{\infty} f = 0$. **348** $\operatorname{res}_0 f = 0$, $\operatorname{res}_1 f = 1$, $\operatorname{res}_{\infty} f = -1$. **349** $\operatorname{res}_{-1} f = 2 \sin 2$, $\operatorname{res}_{\infty} f = -2 \sin 2$. **350** $\operatorname{res}_0 f = 1/9$, $\operatorname{res}_i f = -\frac{1}{54}(\sin 3 - i \cos 3)$, $\operatorname{res}_{-3i} f = -\frac{1}{54}(\sin 3 + i \cos 3)$, $\operatorname{res}_{\infty} f = \frac{1}{27}(\sin 3 - 3)$. **351** $\operatorname{res}_{(2k+1)\pi/2} f = -1$, $k \in \mathbb{Z}$. **352** $\operatorname{res}_{k\pi} f = (-1)^k$, $k \in \mathbb{Z}$. **353** $\operatorname{res}_{k\pi} f = 0$, $k \in \mathbb{Z}$. **354** $\operatorname{res}_2 f = \operatorname{res}_{\infty} f = 0$. **355** $\operatorname{res}_2 f = -\operatorname{res}_{\infty} f = -143/24$. **356** $\operatorname{res}_0 f = -\operatorname{res}_{\infty} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$. **357** $\operatorname{res}_{-1} f = -\operatorname{res}_{\infty} f = -\cos 1$. **358** 1; -1. **359** 0; 2. **360** -2; 0. **361** $\pm(a-b)^2/8$. **362** $a-b$. **363** $e^a - e^b$. **364** $2k\pi i + \frac{1}{2.31} - \frac{1}{4.51} + \dots$ pro $\ln 1 = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **365** $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3.41} - \frac{1}{5.61} + \dots$ pro všechny větve. **366** $-\pi i \sqrt{2}$. **367** $-2\pi i$. **368** $-\pi i/124$. **369** πi . **370** 1. **371** 0. **372** $32\pi i$. **373** 0. **374** 0 pro $r < 1$, ± 1 pro $r > 1$ (znamenko závisí na výběru větve). **375** $\frac{1}{4}\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. **376** $-\pi/27$. **377** $\pi/4a$. **378** $\frac{(2n-3)!}{(2n-2)!} \frac{\pi}{2}$ pro $n > 1$, $\frac{1}{\pi}$ pro $n = 1$. **379** $\pi/\sqrt{2}$. **380** $\frac{\pi}{ab(a+b)}$. **381** $\pi/(n \sin(\pi/n))$. **382** $\frac{\pi \sin(\pi/2n)}{n \sin(\pi/n)}$. **383** $\pi/4$. **384** $5\pi/12$. **385** $4\pi/3$. **386** $\pi/4$. **387** $\pi/(16a^3)$. **388** $3\pi\sqrt{2}/(16a)$. **389** $\pi/(a^{3/2}b^{5/2})$. **390** $\pi(2b + a)/(2ab^3(a + b)^2)$. **391** $\frac{\pi\sqrt{a(2n-3)!}}{a^n\sqrt{b(2n-2)!}}$. **392** $\frac{\pi}{3e^8}(\cos 1 - 3 \sin 1)$. **393** $\frac{\pi}{3e^3}(3 \cos 1 + \sin 1)$. **394** $\frac{\pi}{2e^4}(2 \cos 2 + \sin 2)$. **395** $\frac{\pi}{2b}e^{-ab}$. **396** $\frac{\pi}{2} \cos 2$. **397** $\frac{\pi}{2}e^{-ab}$. **398** $\frac{\pi(4-e)}{3e^2}$. **399** $\frac{\pi}{2}(e^{-1} + e^{-3})$. **400** $\pi(e^{-2} + e^{-3})$. **401** $\frac{\pi}{e}(\cos 4 - \sin 4)$. **402** $\frac{\pi}{4ae^2}$. **403** $\frac{\pi(ab+1)}{4b^3e^{ab}}$. **404** $\frac{\pi(a^2+3a+3)}{16a^3e^a}$. **405** $-\frac{\pi}{3e^{-a}\sqrt{3/2}}(2 \sin \frac{a}{2} - \sin(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{3}))$. **406** $\frac{\pi(1/ae^a - 1/be^b)}{2(b^2 - a^2)}$. **407** $\frac{-\pi t}{a(t^2 + a^2)}$. **408** a) πa ; b) $-\pi a$. **409** a) πi ; b) $-\pi i$. **410** $\frac{\pi}{3}(\cos 1 - 1/e^2)$. **411** $\frac{\pi}{3}[\sin |t| + e^{-|t|\sqrt{2}/2}(\sin |t|/2 + \sqrt{3} \cos(t/2))]$. **412** $\frac{\pi}{4}(e^{-|t|} - \sin |t|)$. **413** $\pi(2 \sin 2 - 3 \sin 3)$. **414** $\pi(e^{-ab} - 1/2)$. **415** $\frac{\pi}{2b^2}(1 - e^{-ab})$. **416** $\frac{\pi}{4b^4}[2 - (2 + ab)e^{-ab}]$. **417** $\pi(b - a)$. **418** $\frac{\pi a}{2b^2} - \frac{\pi(1 - e^{-2ab})}{4b^3}$. **419** $\frac{\pi}{2a^3}(1 - a + a^2/2 - e^{-a})$. **420** $\pi/2$. **421**

- $3\pi/8$. **422** $\pi/3$. **423** $\frac{\pi(1-2^{a-1})}{\sin a}$ (pro $a = 1$ je $I = \text{Ln} 2$). **424**
 $\frac{\pi}{2} \tanh \frac{\pi a}{2}$. **425** $\frac{\pi}{2 \cosh(\pi a/2)}$. **426** $\frac{\pi^2 e^{\pi a}}{(e^{\pi a} + 1)^2}$. **427** $1/\cos \frac{a}{2}$. **428**
 $\frac{\pi}{a} \text{Ln}(1+a)$ pro $0 < a \leq 1$; $\frac{\pi}{2} \text{Ln} \frac{1+a}{a}$ pro $a > 1$. **429** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3 \sin \pi a} \sin \frac{\pi(1-a)}{3}$.
430 $\frac{\pi}{4} (1 - 1/\cosh a)$. **431** $2/\sqrt{a^2 - 1}$. **432** $\frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}$. **433**
 $2\pi/5$. **434** $\frac{2\pi}{1-a^2}$ pro $|a| < 1$; $\frac{2\pi}{a^2-1}$ pro $|a| > 1$; 0 (hlavní hodnota)
pro $|a| = 1$, $a \neq \pm 1$ (pro $a = \pm 1$ hlavní hodnota neexistuje). **435**
 $\frac{\pi(a+1)}{1-a^2}$ pro $|a| < 1$; $\frac{\pi(a^6+1)}{a^6(a^2-1)}$ pro $|a| > 1$; $\frac{\pi}{2} \frac{1-a^{12}}{a^6(a^2-1)}$ (hlavní hodnota)
pro $|a| = 1$, $a \neq \pm 1$ (pro $a = \pm 1$ hlavní hodnota neexistuje). **436**
 $\frac{\pi(2a+b)}{a(a+b)^{3/2}}$. **437** $2\pi(\sqrt{2} - 5/4)$. **438** $2\pi/n!$ pro $n \geq 0$; 0 pro $n < 0$.
439 $\pi i \text{sgn } a$ (pro $a = 0$ hlavní hodnota = 0). **440** $-2\pi i \text{sgn } \text{Im } a$.
441 $13\pi/45$. **442** π/a^2 pro $|a| > 1$; π pro $|a| \leq 1$. **443** a) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+1}}$;
b) 0. **444** a) $\frac{\pi(1-\sqrt{1-a})}{a}$; b) π/a . **445** 0 pro $n = 2k$; $\frac{(-1)^k 2\pi a^{2k+1}}{1-a^2}$
pro $n = 2k+1$. **446** $\frac{2}{3}\pi(3/4)^n$. **447** $\pi 2^{1-n} (-i)^n$. **448** π . **449**
 $\frac{\pi \sqrt{2-4/3}}{\sqrt{3}}$. **450** 0. **451** $\frac{\pi}{2 \cosh(\pi/2)}$. **452** $\frac{\pi \sin(\text{Ln } 2)}{4 \cosh(\pi/2)}$. **453** a) $\frac{\pi}{b^a \sin \pi a}$;
b) $\frac{\pi}{a} \text{cof } \pi a$. **454** $(2^a - 1) \frac{\pi b^{a-1}}{\sin \pi a}$ pro $a \neq 0$; $-\frac{1}{b} \text{Ln} 2$ pro $a = 0$. **455**
 $\frac{\pi}{2 \sin \pi a} (1 - 2^a + 3^{a-1})$ pro a necelé; $\text{Ln}(3/2)$ pro $a = 1$; $\text{Ln}(4/3\sqrt{3})$ pro
 $a = 2$. **456** $\frac{\pi}{2a} \text{Ln } a$. **457** $\frac{\pi}{8a} (\pi^2 + 4 \text{Ln}^2 a)$. **458** 0. **459** π^2 . **460**
 $2\pi(\pi/9 - 1/\sqrt{3})$. **461** $-\pi^2 \sqrt{2}/4$. **462** $\frac{\pi}{\sin \pi p} [2^p(1-p/2) - 1]$. **463**
 $\frac{\pi}{\sin \pi p} [1 - (\frac{a}{1+a})^p]$. **464** $\frac{\pi p}{\sin \pi p} \frac{a^{p-1}}{(1+a)^{p+1}}$. **465** $\frac{\pi}{\sin \pi p} (\sin \frac{\pi p}{2} + \cos \frac{\pi p}{2} - 1)$.
466 $\pi^3 \sqrt{4/\sqrt{3}}$. **467** $\frac{\pi}{\sin \pi p} (2^{p/2} \cos \frac{\pi p}{4} - 1)$. **468** 0. **469** $-2\pi^2/3$.
470 $\frac{1}{2} \Gamma(\frac{z+1}{2})$. **471** $\frac{1}{p} \Gamma(\frac{z+1}{p})$. **472** $\Gamma(z)$. **473** $\Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2}$. **474**
 $\Gamma(z) \sin \frac{\pi z}{2}$ pro $z \neq 0$; $\pi/2$ pro $z = 0$. **475** $\frac{1}{p} \Gamma(\frac{1}{p}) \sin \frac{\pi}{2p}$. **476**
 $\frac{1}{p} \Gamma(\frac{1}{p}) \cos \frac{\pi}{2p}$. **477** $\frac{1}{p-1} \Gamma(\frac{1}{p}) \cos \frac{\pi}{2p}$. **478** $\frac{1}{(p-1)(2p-1)} \Gamma(\frac{1}{p}) \cos \frac{\pi}{2p}$.

2.5.

- 481** ano. **482** ne. **483** ano. **484** ne. **485** ano. **486** ano.
487 ano. **488** ne. **489** ano. **490** ano. **491** $f(z) = az + b$,
 $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. **492** $f(z) = -az + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. **493**
 $f(z) = -i(az + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. **494** $f(z) = az + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$,
 $a > 0$. **495** $f(z) = z + ai$ nebo $f(z) = -z + 1 + ai$, $a \in \mathbb{R}$. **496**

- $f(z) = z + a$ nebo $f(z) = -z - i + a$, $a \in \mathbb{R}$. **497** $f(z) = z + a(1+i)$
nebo $f(z) = -z + 1 + a(1+i)$, $a \in \mathbb{R}$. **498** $f(z) = e^{ia} R_z + w_0$.
499 Množina přímek $u = 1/a$ rovnoběžných s imaginární osou (bez
této osy). **500** Množina přímek $v = -1/b$ rovnoběžných s reálnou
osou (bez této osy). **501** Množina kružnic $b(u^2 + v^2) + u + v = 0$
dotýkajících se v počátku přímky $v = -u$ a sama tato přímka. **502**
Svazek přímek $v = -ku$. **503** Svazek kružnic, procházejících body 0 a
 $w_0 = +/z_0$ a přímka, spojující tyto dva body. **504** Křivka $u^2 = -\frac{v^3}{v+1}$.
505 Svazek Apolloniových kružnic vzhledem k bodům z_1, z_2 . Pro $a < 1$
má příslušná kružnice střed $z_1 + \frac{a^2|z_1-z_2|}{1-a^2}(z_1 - z_2)$ a poloměr $\frac{a|z_1-z_2|}{1-a^2}$;
pro $a = 1$ dostáváme přímku P - osu symetrie bodů z_1, z_2 ; pro $a > 1$
(záměnou bodů z_1, z_2 a čísel $a, 1/a$) kružnice symetrické podle P ke
kružnicím popsaným pro $a < 1$. **506** Svazek oblouků kružnic z bodu
 z_1 do bodu z_2 ; pro $t > 0$ vlevo od orientované přímky $\overline{z_1 z_2}$, pro $t < 0$
vpravo, pro $t = 0$ je to přímka $\overline{z_1 z_2}$ bez úsečky $\overline{z_1 z_2}$; pro $t = \pi$ je to úsečka
 $\overline{z_1 z_2}$. **507** Konvexní oblast vymezená pravým úhlem s vrcholem v bodě
 $a = (z_1 + z_2)/2$ a hraničními polopřímkami $\overline{az_1}$ a polopřímkou osy sy-
metrie bodů z_1, z_2 , pravou vzhledem ke směru $\overline{z_1 z_2}$. **508** $\frac{2+i}{5}$. **509**
 $\frac{9}{2} + i$. **510** $a^* = z_0 - 2e^{it}(\bar{u} - \bar{z}_0)$. **511** $a^* = z_0 + \frac{R^2}{a-z_0}$. **517** $|z| = 2$.
518 $z = 1/2$. **519** $z - 1/4 = 1/4$. **520** $xx_0 + yy_0 = 1/2$. **521**
je symetrická sama se sebou. **522** lemniskata $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.
523 Obvod sférického trojúhelníka s vrcholy $1/\bar{z}_1, 1/\bar{z}_2, 1/\bar{z}_3$, tvořeny
tými oblouky kružnic proložených vždy dvěma z vrcholů a počátkem,
které jsou vyřáté dvěma vrcholy a neobsahují počátek; jedna z těchto
stran může být přímka s odstraněným omezeným intervalem. **524**
Polokruh $|w| < 1$, $\text{Im } w < 0$. **525** Oblast, obsahující bod $w = 0$, ohr-
ničená oblouky kružnic $|w| = 1$ a $|w + 5i/4| = 3/4$. **526** Oblast vzniklá
z dolní poloroviny $\text{Im } w < 0$ odstraněním kruhu $|w - 1/2 + i/2| < 1/\sqrt{2}$.
527 Oblast ohraničená přímkou $\text{Re } w = 1$ a dotýkající se jí kružnicí
 $|w - 1/2| = 1/2$. **528** Oblast ohraničená dotýkajícími se kružnicemi
 $|w - 1/2| = 1/2$ a $|w - 3/4| = 1/4$. **529** Oblast ohraničená přím-
kou $\text{Re } w = 1/2$ a kružnicí $|w - 4/3| = 2/3$. **530** $-\frac{2i(z+i)}{4z-1-5i}$. **531**
 $\frac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}$. **532** $\frac{(1+i)z+1+3i}{(1+i)z+3+i}$. **533** $\frac{iz+2+i}{z+1}$. **534** $\frac{1-i}{2}(z+1)$. **535**