Úmluva: $\mathbb{R}^n$ chápeme jako Euklidovský prostor se standardní bází $e_1, \dots, e_n$ s Euklid. skalárním součinem $\langle \cdot | \cdot \rangle$ a normou $\| \cdot \|$, které se dodefinují na celé $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ jako výše, tj. na prvočinitele. Zde

$$\Lambda^*(\mathbb{R}^n) = \{ \alpha = \sum \alpha_I e_I \mid \alpha_I \in \mathbb{R},\ I \subset \{1, \dots, n\} \}.$$

Objem rovnoběžnostěnu

Nechť $1 \le k \le n$ a $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Pro matici $W = (v_1, \dots, v_k)$ ($n \times k$) platí

$$(*) \quad \sqrt{\det(W^T W)} = \| v_1 \wedge \dots \wedge v_k \|,$$

což je rovno k-dim. objemu rovnoběžnostěnu $R = R(v_1, \dots, v_k)$ určeného vektory $v_1, \dots, v_k$.

Skutečně, z Cauchy-Binetova vzorce plyne

$$(CB) \quad \det(W^T W) = \sum_{|J|=k} (\det W_J)^2.$$

Rovnost $(*)$ dostaneme z předchozího.

Pozn.: Jsou-li φ k-mapa v $\mathbb{R}^n$, potom

$$J\varphi = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right\|;$$

$$= \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right\|, \text{ je-li } k = n-1.$$

— 16.7 —

(ii) Geometryczny sens (CB): $|\det(W_J)|$ | CB2

to k-objętość projekcji R na podprzestrzeń k-wymiarową rozpiętą przez x_J, tzn. (CB) to zobaczona Pythagorasa raz.

Rozložitelné multivektory

DEF. Řekneme, že $\omega \in \Lambda^k(V)$ je *rozložitelný*, pokud ex. $v_1, \dots, v_k \in V$ takové, že $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$.

Př. $\omega := \varphi_1 \wedge \varphi_2 + \varphi_3 \wedge \varphi_4 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ není rozložitelný, protože $\omega \wedge \omega = 2\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \neq 0$.

1. $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0$, právě když $v_1, \dots, v_k \in V$ jsou lineárně nezávislé

⇒ (i) Nechť $v_1, \dots, v_k$ jsou lin. závislé. Potom ex. i takové, že $v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$ a

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{j \neq i} a_j \, v_1 \wedge \dots \wedge \overset{i}{v_j} \wedge \dots \wedge v_k = 0.$$

(ii) Nechť $v_1, \dots, v_k$ jsou lin. nezávislé. Potom je doplníme na bázi $v_1, \dots, v_k, \dots, v_n$ prostoru V.

Máme $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge \dots \wedge v_n = \det(W) \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \neq 0$.

$\neq 0$; W ... matice souřadnic $v_1, \dots, v_n$

2. Nechť $\omega := v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0$.

Potom $\ker \omega = \mathrm{Lo}\{v_1, \dots, v_k\}$,

kde $\ker \omega := \{v \in V \mid v \wedge \omega = 0\}$.

⇒ Zřejmě je $\ker \omega$ podprostor V a $v_i \in \ker \omega$.

$\subseteq$ Vezmi $v \in \ker\omega$, tzn. $\underbrace{v \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k}_{\text{jsou lin. závislé}} = 0$. RV2

Tedy $v \in \mathrm{Lo}\{v_1, \dots, v_k\}$.

3. Označme $R_k(V) := \{\omega \in \Lambda^k(V) \mid 0 \neq \omega \text{ rozložitelná}\}$.

Vezmi $\omega, \omega' \in R_k(V)$. Potom $\ker\omega = \ker\omega'$ právě když $\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \omega' = \alpha\omega$.

$\Leftarrow$ jasné; $\Rightarrow$ Vezmi $\mathrm{Lo}\{v_1, \dots, v_k\} = \mathrm{Lo}\{v_1', \dots, v_k'\}$
dvě báze stejného k-dim. podprostoru

Potom $v_i' = \sum_{j=1}^{k} E_i^j v_j$ a $v_1' \wedge \dots \wedge v_k' = \det(E_i^j)\, v_1 \wedge \dots \wedge v_k$

E_i^j: matice přechodu, regulární

!! dělej jako v Lemmatu o Plückerových souřadnicích

Pozn: Každý orientovaný k-dim. podprostor $L \subset \mathbb{R}^n$ je jednoznačně určený nějakým $\omega \in R_k(\mathbb{R}^n)$, $\|\omega\| = 1$ a obráceně.

[Je-li $v_1, \dots, v_k$ kladně orient. báze L, potom $\omega := (v_1 \wedge \dots \wedge v_k) / \|v_1 \wedge \dots \wedge v_k\|$.]

DU1

Duální prostor

(1.) Nechť V je reálný vektorový prostor a $e_1, \dots, e_n$ je báze V. Potom

$$V^* := \{\alpha : V \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ lineární}\}$$

formy, kovektory

je duální prostor k V. Báze V^* duální k $e_1, \dots, e_n$ je tvořena $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \in V^*$ pro které $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j := 1$ pro $i = j$; 0 $i \neq j$.

Spec. $\dim V = \dim V^*$.

Zřejmě $\varepsilon^i(v) = v^i$, $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i \in V$.

Pozn: V a V^* jsou izomorfní, nikoli ale kanonicky

(2.) Druhý duál $V^{**} := (V^*)^*$ ztotožňujeme s V. Skutečně, $\varkappa : V \to V^{**}$ definované

$$\varkappa(v)(\alpha) := \alpha(v), \quad v \in V \text{ a } \alpha \in V^*,$$

je kanonický izomorfismus V na V^{**}.

[Skutečně, $\varkappa$ je zřejmě prostá a lineární a $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$.]

DU2

Značení: Duální bázi $(\mathbb{R}^n)^*$ ke standardní bázi $e_1, \dots, e_n$ prostoru $\mathbb{R}^n$ značíme $dx_1, \dots, dx_n \in (\mathbb{R}^n)^*$, tj.

$$dx_i(x) := x_i, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Potom

$$\Lambda^*((\mathbb{R}^n)^*) = \left\{ \omega = \sum_I \omega_I dx_I \;\middle|\; \omega_I \in \mathbb{R} \text{ a } I \subset \{1, \dots, n\} \right\},$$

zde $dx_I := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, kde $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ jsou prvky indexové množiny I.

Diferenciální formy

Připomeň: Duální báze $(\mathbb{R}^n)^*$ značíme $dx_1, \dots, dx_n$, tj. $dx_i(x) = x_i$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Potom $\omega \in \Lambda^*((\mathbb{R}^n)^*)$ lze psát $\omega = \sum \omega_I dx_I$, kde $\omega_I \in \mathbb{R}$ a $I \subset \{1, \dots, n\}$.

DEF: (i) **Diferenciální formou** ω na otevřené $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme zobrazení $\omega: \Omega \to \Lambda^*((\mathbb{R}^n)^*)$ třídy $\mathcal{C}^\infty$. Označme $\mathcal{E}^*(\Omega)$ vektor. prostor všech diferenc. forem na Ω. Každou $\omega \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ lze tedy jednoznačně psát jako

(1) $$\omega(x) = \sum_I \omega_I(x)\, dx_I, \quad x \in \Omega,$$

kde $I \subset \{1, \dots, n\}$, $\omega_I \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, jsou-li $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ prvky I.

(ii) Je-li $\omega \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ a $\omega(\Omega) \subset \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$, potom říkáme, že ω má **stupeň** k (tzv. **k-forma**). Označme $\mathcal{E}^k(\Omega)$ vektor. prostor všech k-forem na Ω.

Pozn: (i) každé $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ má tvar (1), kde sčítáme přes $|I| = k$.

(ii) Zřejmě $\mathcal{E}^*(\Omega) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{E}^k(\Omega)$ a $\mathcal{E}^0(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$ hladké funkce, 0-formy

DEF: Na $\mathcal{E}^*(\Omega)$ definujeme vnější násobení

$(\omega \wedge \tau)(x) := \omega(x) \wedge \tau(x)$, $x \in \Omega$ a $\omega, \tau \in \mathcal{E}^*(\Omega)$.