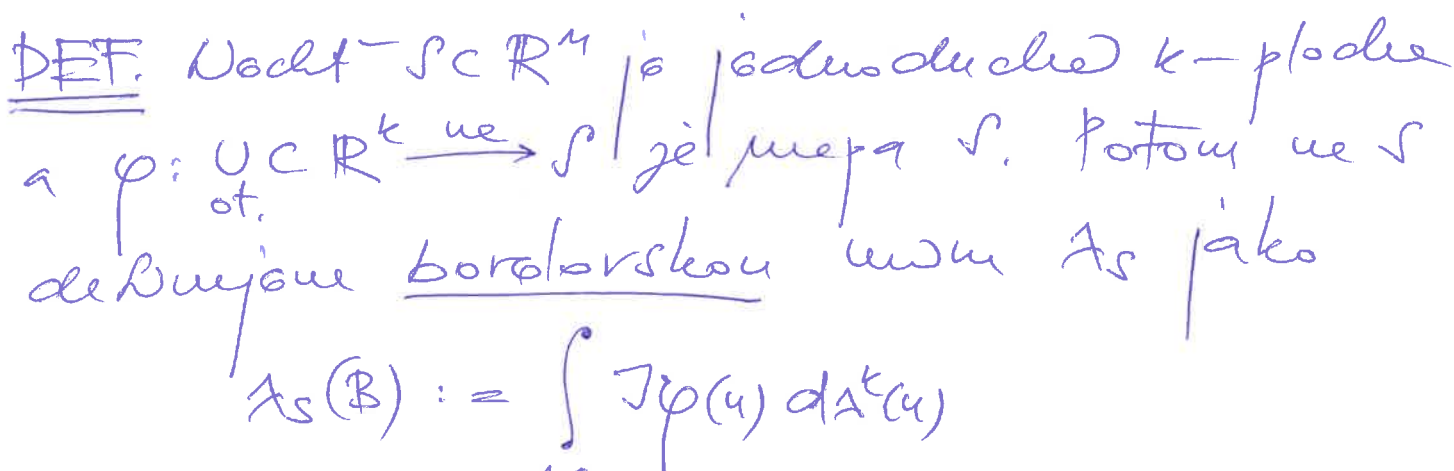


Problem Nicht-SC $\mathbb{R}^n$ ist (jedwache) k -fache. Ist der Quotient μ S priv. oder nicht?



Def $J_p := \sqrt{\det((\Phi p)^\top \Phi p)}$ a x^k ist Lapbergnorm und

Pozn: Vline $\alpha \in \mathcal{S}$ je bornolovska v $\mathbb{R}^n$, tm. $S \in B_n$,
kde B_n je nejmenší b -algebra obsahující
všechny omezené množiny v $\mathbb{R}^n$.

Pozn: Nodit-SC $\mathbb{R}^n$ je (jednoduchá) 622.1
 n -plocha, tm. S je otevřená v $\mathbb{R}^n$.

Potom $A_S = A^n|_S$.

[Shrnutí, $J\varphi = |\det(\Phi\varphi)|$ a rovnost
plyne z věty o substituci v $\mathbb{R}^n$.]

Ⓓ Dokazuje sa, že je korektný, tm. nezávislý
na voľbe parametrizácie. G23

DŮKAZ: Necht $\varphi: U \xrightarrow{\eta^a} S$ a $\psi: V \xrightarrow{\eta^a} S$ jsou
dvě mapy parametrizující plochu S . Víme,
že přechodová zobrazení $\phi := \psi^{-1} \circ \varphi: U \xrightarrow{\eta^a} V$
je diffeomorfismus. Potom $\varphi = \psi \circ \phi$,
 $D\varphi = D\psi \circ D\phi$ a $(J\varphi)^2 = \det((D\varphi)^T D\varphi) =$
 $= \det(\underbrace{(D\phi)^T}_{k \times k} \underbrace{(D\psi)^T}_{m \times k} \underbrace{D\psi}_{k \times k} \underbrace{D\phi}_{k \times k}) = \underbrace{(\det(D\phi))^2}_{\text{máme}} \cdot (J\psi)^2$

Tedy pro každou borelovskou $B \subset S$ je

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} J\varphi(u) d\lambda^k(u) = \int_{\varphi^{-1}(B)} J\psi(\phi(u)) \underbrace{|\det(D\phi(u))|}_{\substack{\text{jakobián} \\ v = \phi(u)}} d\lambda^k(u)$$

$\stackrel{\text{vůl} = \text{substituce}}{=} \int_{\psi^{-1}(B)} J\psi(v) d\lambda^k(v). \quad \square$

VEĽTA (existence a jednoduchosť mery na ploche; definícia) G24

Na každej k -ploche $S \subset \mathbb{R}^n$ existuje práve jedna Borelovská miera λ_S taká, že pre každú mieru φ plochy S je

$$\lambda_S|_{\langle \varphi \rangle} = \lambda_{\langle \varphi \rangle}$$

DŮKAZ: (i) Necht $\{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je spočetý atlas S . Uvažujme rozklad $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots$, kde

$$S_1 := \langle \varphi_1 \rangle, S_2 := \langle \varphi_2 \rangle \setminus \langle \varphi_1 \rangle,$$

$$S_3 := \langle \varphi_3 \rangle \setminus (\langle \varphi_1 \rangle \cup \langle \varphi_2 \rangle), \text{ atď. } \text{Položíme}$$

$$\lambda_S(B) := \sum_i \lambda_{\langle \varphi_i \rangle} (B \cap S_i)$$

pre každú borelovskú $B \subset S$.

(ii) Je-li φ miera S a $B \subset \langle \varphi \rangle$ je borelovská, potom

$$\sum_i \lambda_{\langle \varphi \rangle} (B \cap S_i) = \lambda_{\langle \varphi \rangle} (B).$$

(iii) Jednoduchosť: Necht $\{\varphi_j^? \mid j=1,2,3,\dots\}$ je ~~práve~~ spočetý atlas S a $\{S_j^? \mid j=1,2,3,\dots\}$ je ~~práve~~ rozklad S .

Necht μ je borelovské měřítko na S
 taková že $\mu|_{\langle \varphi \rangle} = \lambda_{\langle \varphi \rangle}$ pro každou
 měří φ plochu S . Potom pro každou borelov.
 $B \subset S$ platí

$$\mu(B) = \sum_i \mu(B \cap S_i) = \sum_i \lambda_{\langle \varphi_i \rangle}(B \cap S_i) = \lambda_S(B).$$

Pozn: Jsou-li $S_i \subset S$ k -plochy v $\mathbb{R}^n$, potom $\lambda_{S_i} = \lambda_S|_{S_i}$. $\square$

DEF: (Plošný integrál 1. druhu)

Je-li $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha a $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ borelovsky
 měřitelná funkce, pak definujeme

$$\int_{\mathbb{I}} f dS := \int_{\mathbb{I}} f d\lambda_{\mathbb{I}},$$

ma-li Lebesgueův integrál ve pravé straně
 smysl. Zde $\lambda_{\mathbb{I}}$ je borelovské měřítko na $\mathbb{I}$
 z předchozí věty.

Pozn: (i) dS je tradičním značením

(ii) Necht $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}^n$ je jednoduščí plocha a
 $\varphi: U \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{me}} \mathbb{I}$ je mapa. Potom $\lambda_{\mathbb{I}} = \mu \varphi^{-1}$,
 kde $\mu(V) := \int_V J\varphi(u) d\lambda^k(u)$, $V \subset U$ borelovskou.
 Proto

$$\int_{\mathbb{I}} f dS = \int_U f \circ \varphi d\mu = \int_U f(\varphi(u)) J\varphi(u) d\lambda^k(u).$$

Speciálně, pro $\boxed{k=1}$ je $J\varphi = \|\varphi'\|$ a

626

$$\int_I f dS = \int_{\varphi} f dS,$$

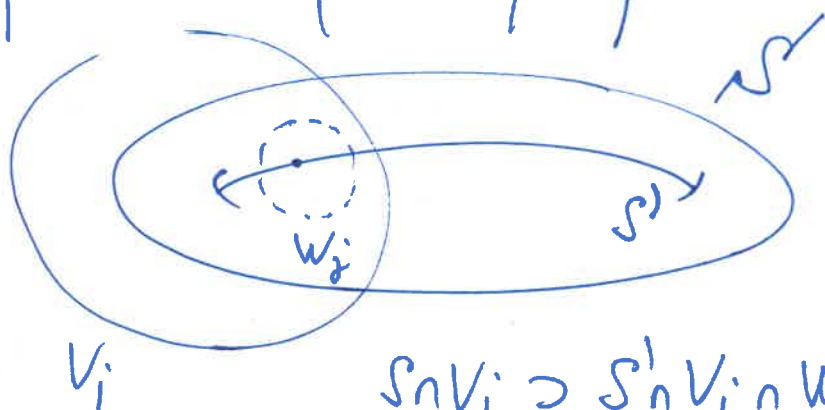
křivkový integrál
1. druhu z G_1

je-li U interval.

VĚTA (Podplochy nízké dimenze mají malou míru)
Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k -plocha, $S' \subset \mathbb{R}^n$ je l -plocha
a $S' \subset S$. Je-li $l < k$, potom $\lambda_S(S') = 0$.

DŮKAZ: Víme, že každá plocha lze pohybt
společně umístit jednoduchým plochám,
protože we společný střed.

BŮHO: Lze předpokládat, že S, S' jsou
jednoduché.



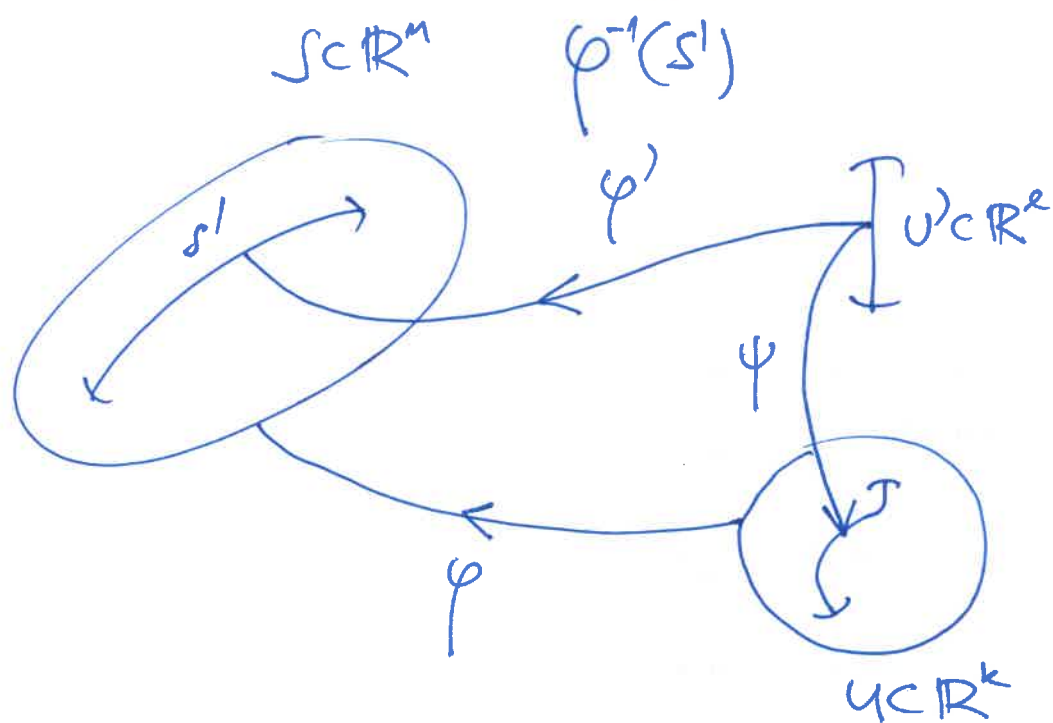
$S \cap V_i \supset S' \cap V_i \cap W_j$
jednod. jednoduch.

Vzměme tedy mapy $\varphi: U \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{we} S$ a

$\varphi': U' \subset \mathbb{R}^l \xrightarrow{we} S'$. Z lemmatu o podmaní
je $\psi := \varphi^{-1} \circ \varphi': U' \rightarrow \mathbb{R}^k$ ~~l~~ l -mapa a

$\psi(U') = \varphi^{-1}(S')$ je l -plocha v $\mathbb{R}^k$.

To avoid this, we ~~also~~ $\lambda^k(\varphi^{-1}(s')) = 0$, G27
 and $\lambda_S(s') = \int \mathcal{I}\varphi d\lambda^k = 0$.



Zobecněné plochy

G28

DEF. Neprotaveno $S \subset \mathbb{R}^n$ je zobecněná k-plocha,
jestliže existuje rozklad
(disjunktní)

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q \quad (X)$$

Kde $p \geq 1, q \geq 0$, množiny S_j jsou jednoduché
 k -plochy a každá M_j je l_j -plocha s
 $0 \leq l_j < k$ a platí podmínky

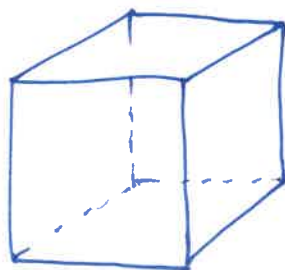
$$S_j \cap \left(\bigcup_{k \neq j} S_k \cup \bigcup_{i=1}^q M_i \right) = \emptyset \quad (*)$$

pro $j = 1, \dots, p$.

Pozn: (i) Pod ^{jednod., zobecn.} 0-plochou rozumíme množinu
isolovaných bodů v $\mathbb{R}^n$. Dále n-plocha je
libovolně otevřená $U \subset \mathbb{R}^n$ (s atakem $\{Id_U\}$).
^{tm. je jednoduché}

(ii) Jednoduché k -plochy S_i tvoří komp-
onentami S a body $x \in S_i$ tvoří regulár-
ní body S .

Pr. $\partial[0,1]^n$ je zobecněná $(n-1)$ -plocha v $\mathbb{R}^n$
hranice
jednotkové
krychle



DEF. Pro zobecněnou k -plochu S jako
 $\nu(x)$ definujeme nyní λ_S jako

$$\lambda_S(B) := \lambda_{S_1}(B \cap S_1) + \dots + \lambda_{S_p}(B \cap S_p)$$

pro každou borelovskou $B \subset S$ a plošný
 integrál na S 1. druhu jako integrál podle
 λ_S .

⊕ (kompatibilita definice λ_S) Podíváme nyní
 λ_S na zobecněnou k -plochu S rozdělenou na
 jejím roztělu (x) .

DŮKAZ: Mějme dan takový roztěl S
 $S = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q = S'_1 \cup \dots \cup S'_{p'} \cup M'_1 \cup \dots \cup M'_{q'}$

Konstruujeme $\lambda_{S_i}(B) := \lambda_{S_i}(B \cap S_i)$ pro každou
 borelovskou $B \subset S$ a stejné i $\lambda_{S'_j}$. Zřejmě
 stačí ukázat, že

$$\sum_{j=1}^p \lambda_{S_j} = \sum_{j'=1}^{p'} \lambda_{S'_{j'}}$$

Zřejmě každé $S_{j'} = S - \left(\bigcup_{k \neq j'} \overline{S_k} \cup \bigcup_{i \text{ stran.}} \overline{M_i} \right)$ je
 (vlastně) otevřené v S .

Proto $S_j \cap S_j^{\text{ot.}}$ je otvorené v A_j , tudíž $\square$ G3.
 je to k -plocha. Dále $S_j \cap M_i'$ je otvorené
 v M_i' , tudíž je to ℓ_i -plocha a $\lambda_{S_j}(M_i') = 0$.
 Z toho je jasné, že

$$\lambda_{S_j} = \sum_{j'=1}^{p'} \lambda_{S_j \cap S_{j'}}.$$

Konečně máme

$$\sum_{j=1}^p \sum_{j'=1}^{p'} \lambda_{S_j \cap S_{j'}} = \sum_{j=1}^p \lambda_{S_j} = \sum_{j'=1}^{p'} \lambda_{S_{j'}}. \quad \square$$

Pozn: Obecně je těžké ukázat, že každá
 k -plocha $S \subset \mathbb{R}^n$ je také zobrazená k -plocha.
 Víme-li ale, že $S \subset \mathbb{R}^n$ je k -plocha i zobrazená
 k -plocha, potom zřejmě obě definice λ_S
 splývají.