

'Topologické' vlastnosti ploch

①
 ① Každá $S \subset \mathbb{R}^n$ je Lindbořfora, tzn.
 každé její otevřené pokrytí $\mathcal{G}$ má (nejméně)
společný podpokrytí.
skutečné

$$\mathcal{B} = \{ B(x, r) \mid x \in \mathbb{Q}^n, r > 0, r \in \mathbb{Q} \}$$

je společné báze otevřených množin $\mathbb{R}^n$.

Potom pro každé $x \in S$ existuje $G \in \mathcal{G}$
 takové, že $x \in G$, a dále $B_x \in \mathcal{B}$, že
 $x \in B_x \subset G$. Potom $\tilde{\mathcal{B}} := \{ B_x \mid x \in S \}$ je
 společné pokrytí S . Pro každou $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ ex.
 $G_B \in \mathcal{G}$ tak, že $B \subset G_B$. Tudíž

$$\tilde{\mathcal{G}} := \{ G_B \mid B \in \tilde{\mathcal{B}} \}$$

je společné podpokrytí S .

DŮSLEDEK: každé k -ploché $S \subset \mathbb{R}^n$ má
společný atlas.

① potřeba ne průdučce

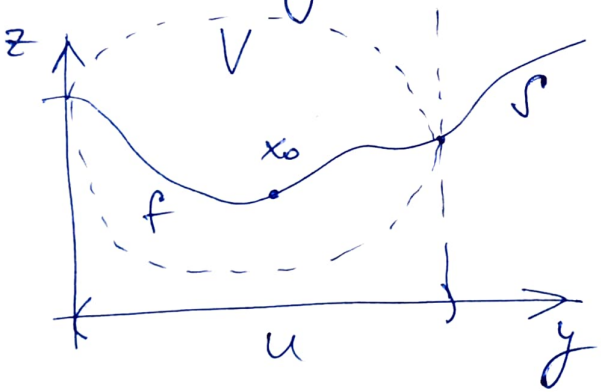
1. Najdite 2-plochu v $\mathbb{R}^3$, která je

- kompaktní
- omezená nekompaktní
- neomezená uzavřená
- neomezená neuzavřená

2. ¹ Necht $S \subset \mathbb{R}^n$ je k -plocha a $k < n$.

- Ukažte, že (i) S je (relativně) otevřená v $\overline{S}$;
 (ii) S je borelovská v $\mathbb{R}^n$ a $\lambda^k(S) = 0$;
 (iii) S je volná, tzn. $\text{int } \overline{S} = \emptyset$.

Necht $x_0 \in S$. Potom ex. okolí $V \subset \mathbb{R}^n$ bodu x_0
 a $f: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ tzn. $\mathcal{C}^u$ tak, že
 $S \cap V = \text{graf } f$. ÚVOD: Předp., že $V \subset U \times \mathbb{R}^{n-k}$

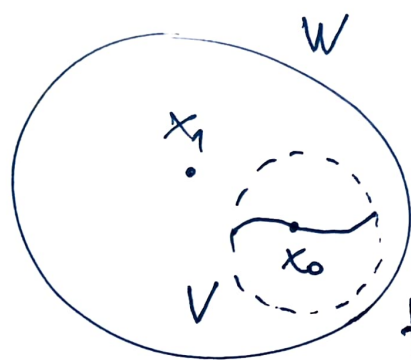


Potom platí, že
 (x) $S \cap V = \text{graf } f = \overline{S} \cap V$.
 Skutečně, necht $(y, z) \in \overline{S} \cap V$.
 a $S \cap V \ni (y_k, z_k) \rightarrow (y, z)$.

Potom $y \in U$ a ze spojitosti f v y plyne, že
 $z_k = f(y_k) \rightarrow f(y) = z$, tudíž $(y, z) \in S \cap V$.
 Tedy platí (i). Z (i) je jasné, že S je
 borelovská v $\mathbb{R}^n$.

7 Fubiniho věta je zřejmě $\mathcal{A}^n(\text{graf } f) = 0$. Top 2
 Víme, že existuje speciální otevřené pokrytí
 $\{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ plochy S takové, že $S \cap V_i$
 je grafem funkce. Tudíž $\mathcal{A}^n(S) = 0$.

(iii) Ukažte $x_1 \in \bar{S}$ a $W \subset \mathbb{R}^n$ je okolí x_1 .



Ex. $x_0 \in S \cap W$ a okolí $V \subset W$
 bodu x_0 tak, že $(x_1, x_0) \subset S$.

Tedy $V \not\subset \bar{S}$, tudíž ani $W \not\subset \bar{S}$,
 tj. $x_1 \notin \text{int } \bar{S}$. ▣

3. Ukážte, že jednoválcové plochy nemusejí
 být kompaktní

3.3 Ukažte $\varphi: U \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{na}} S \subset \mathbb{R}^n$ je mapa.
 otev. komp. obobedna $\mathbb{R}^k$ kompaktní $\mathbb{R}^n$ ▣

Vektorový součin v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ①

VS1

LEMMA Necht V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Je-li $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineární forma, potom existuje jedine $v \in V$ tak, že

$$f(w) = \langle w, v \rangle, \quad w \in V \quad [\text{známo?}]$$

DŮKAZ: Necht $e_1, \dots, e_n$ je ON-báze V .
Potom takové v existuje, potom

$$f(e_i) = \langle e_i, v \rangle = v_i$$

neboli $v = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i$. Ať pro takto

definovanou v dostaneme, že pro každou

$$w = \sum_{j=1}^n w_j e_j \quad \text{je} \quad f(w) = \sum_{j=1}^n w_j \underbrace{f(e_j)}_{= v_j} = \langle w, v \rangle. \quad \square$$

×
Necht $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$Lw := \det(w, v_1, \dots, v_{n-1}), \quad w \in \mathbb{R}^n$$

je lineární forma a z lemmatu existuje
jediný $v \in \mathbb{R}^n$ takový, že $Lw = \langle w, v \rangle, w \in \mathbb{R}^n$.

Položme $v_1 \times \dots \times v_{n-1} := v \in \mathbb{R}^n$, $\forall n$.

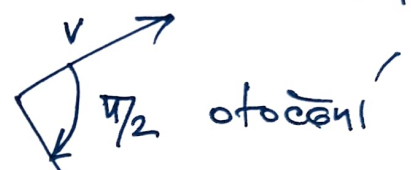
VS2

$$(*) \langle w, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle = \det(w, v_1, \dots, v_{n-1}), w \in \mathbb{R}^n.$$

V souřadnicově: $v_1 \times \dots \times v_{n-1} = \left(\det(e_i, v_1, \dots, v_{n-1}) \right)_{i=1}^n$

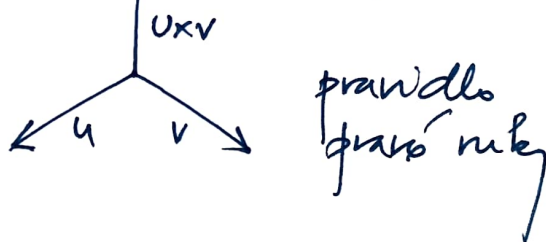
$n=2$ $u \times v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ -v^1 \end{pmatrix}$

unární
operace



$n=3$ $u \times v = \left(\begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} \right)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & u^1 & v^1 \\ 0 & u^2 & v^2 \\ 0 & u^3 & v^3 \end{pmatrix}$$



Vlastnosti:

(1) $v_1 \times \dots \times v_{n-1} = 0$, právě když jsou $v_1, \dots, v_{n-1}$ lineárně závislé

(2) $\langle v_i, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle = 0 \quad \forall i=1, \dots, n-1$

(3) $v_{b(1)} \times \dots \times v_{b(n-1)} = \text{sgn}(b) v_1 \times \dots \times v_{n-1}$
pro každou permutaci b indexů $\{1, \dots, n-1\}$.

(4) $\|v_1 \times \dots \times v_{n-1}\| = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1}^{n-1}}$, což

Gramova
metrice

je rovnou objemu rovnoběžnostěnu určeného
vektory $v_1, \dots, v_{n-1}$.

$R(v_1, \dots, v_{n-1})$

úkol 1: (1), (2), (3) plyne z (*); V₀ | VSB
ii

$$(4) \|v_1 \times \dots \times v_{n-1}\|^2 = \langle v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle$$

$$(*) = \det(v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}) \quad (\Delta)$$

objem rovnoběžnostěnu
v $\mathbb{R}^n$

$$= \|v_1 \times \dots \times v_{n-1}\| \cdot \lambda_V(\mathcal{R}(v_1, \dots, v_{n-1})), \quad \square$$

kolmost

Fubini

kde $V = \text{Lo}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$
pro lin. nez.

(5) Jsou-li $v_1, \dots, v_{n-1}$ lineárně nezávislé,
potom je $v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}$ kladně
orientovaná báze $\mathbb{R}^n$. (z (Δ))

orientace vektorového prostoru V

Necht' $e_1, \dots, e_n$ a $e'_1, \dots, e'_n$ jsou dvě báze V
a necht' $E = (E_{ij}^L)$ je matice přechodu mezi
nimi, tzn. $e'_j = \sum_{i=1}^n E_{ij}^L e_i$. Potom víme, že
tyto báze jsou souhlasné (opacné) orientované,
pokud $\det E > 0$ (< 0). Systém všech bází
V se rozděluje 2 třídy souhlasné orient.
bází. Tyto třídy se nazývají orientace V.

^{zadánu}
 Polud na V máme ovládací σ , uvažujme σ ovládaným vektor. prostorem (V, σ) . VS4
 Řekneme, že báze B ovládaného prostoru (V, σ) je kladně ovládaná, je-li $B \in \mathcal{O}$,
opačně $\notin$

Pozn: (i) Je-li $e_1, \dots, e_n$ kladně ovládaná báze V , potom nepř. - $e_1, e_2, \dots, e_n$ nebo $e_2, e_1, e_3, \dots, e_n$ jsou opačně ovládaná báze.
 (ii) Standardní ovládací ve $\mathbb{R}^n$ je zadána standardní bází $e_1, \dots, e_n$, kde

$$e_i = (0 \mid \dots \mid 0 \mid \overset{i}{1} \mid 0 \mid \dots \mid 0).$$

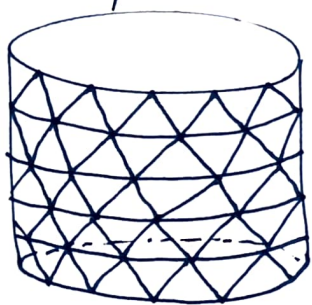
Míra na ploše

Gr

Dělení úměr: Aproximace pomocí čar.

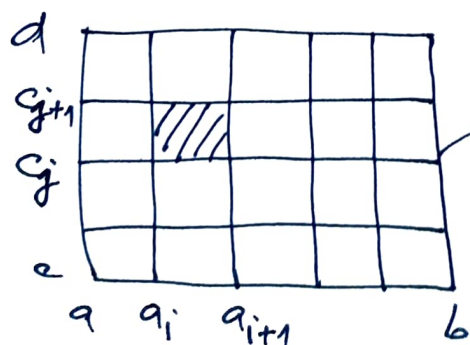


Obrak plochy: Složitější! Např. aproximace
vlnce $S \subset \mathbb{R}^3$ ('plochami' složenými z trojúhelníků
níže vždy nebudou, viz [ČERNÝ & POLKORNY, 17.2.5].

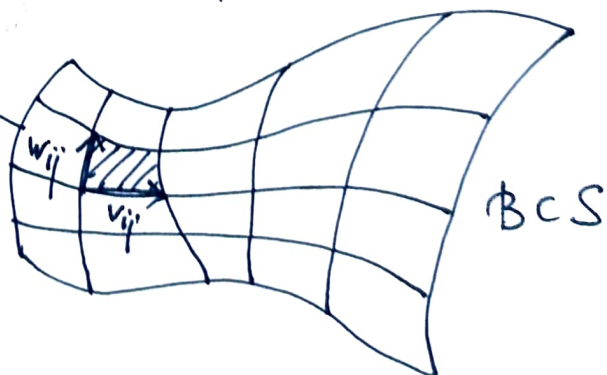


HEURISTIKA: Jak dekvant umm X_S na ^{jednod.} 2-ploše $S \subset \mathbb{R}^3$? Nodet $\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{ot.}} S$ je

mapa a $B := \varphi(I)$, kde $I = [a, b] \times [c, d]$
 $\subset U$. Uvátme dělení $D_1: a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$,
 $D_2: c = c_0 < c_1 < \dots < c_l = d$.



φ



Potom $\lambda_S(B) = \sum_{i,j} \lambda_S(\varphi(I_{ij}))$, kde

621

$I_{ij} := [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$. Pro dost jemná D_1, D_2

je $\lambda_S(\varphi(I_{ij})) \doteq \|v_{ij} \times w_{ij}\| \doteq \underbrace{J\varphi(a_i, c_j)}_{\text{obraz rovnoběžníku se stranami}} \lambda^2(I_{ij})$,

$v_{ij} := \varphi(a_{i+1}, c_j) - \varphi(a_i, c_j) \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_i, c_j) (a_{i+1} - a_i)$,

$w_{ij} := \varphi(a_i, c_{j+1}) - \varphi(a_i, c_j) \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_i, c_j) (c_{j+1} - c_j)$,

$J\varphi := \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$.

Potom $\lambda_S(B) \doteq \sum_{i,j} J\varphi(a_i, c_j) (a_{i+1} - a_i) \cdot (c_{j+1} - c_j)$

Riemannovské
sumy pro u, v

$|D_1| \rightarrow 0$
 $|D_2| \rightarrow 0$

$$\int_a^b \left(\int_c^d J\varphi(u, v) dv \right) du$$

Ze známou výměrou je $J\varphi(u) = \sqrt{D\varphi(u)^T D\varphi(u)} \quad (*)$.
 $\underbrace{\quad}_{\text{det(gramiánu)}}$

DEF. Necht $S \subset \mathbb{R}^n$ je jednoduchá k -plocha
a $\varphi: U \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{\eta} S$ je mapa. Potom η a S
definují borelovskou míru λ_S jako

$$\lambda_S(B) := \int_{\varphi^{-1}(B)} \mathcal{J}\varphi(u) d\lambda^k(u)$$

C22

pro každou borelovskou $B \subset S$, zde

$$\mathcal{J}\varphi := \sqrt{\det (\mathbb{D}\varphi)^t \mathbb{D}\varphi}.$$

Pozn: (i) Na předchozí uvažování, že λ_S vzniklo ze parametrizace (mapy) φ jednodušší plochy S

(ii) Nodot V je k -dimenzionální vekt. podprostor $\mathbb{R}^n$. Potom zřejmě A_V splývá s množinou definicí na V a 1. částí.

Skutečně, pro $\varphi = L$, kde $L: \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{ne}} V$ je lineární zobrazení, máme

$$\mathcal{J}\varphi(u) = \sqrt{\det(L^t L)}, \quad u \in \mathbb{R}^k.$$

$$\text{Tudíž } \lambda_V(L(B)) = \sqrt{\det(L^t L)} \lambda^k(B),$$

$B \subset \mathbb{R}^k$ je borelovská.