Tvrzení: Všechny koně mají stejnou barvu.

Důkaz: Použiju MI.

$\forall n \in \mathbb{N}$ chci dokázat: $P(n)$

$$\boxed{\text{Pro libovolnou } n\text{-tici koní jejichž barvy jsou } b_1, b_2, \dots, b_n \text{ platí: } b_1 = b_2 = \dots = b_n}$$

počet koní $\simeq$ 60 000 000

stačí $P(\text{počet koní})$

1) Základ

$P(1)$: mám jednoho koně, b_1

triv ✓

2) Indukční krok: $P(\overset{100}{n}) \Rightarrow P(n+1)$

Nechť je $n+1$ koní: $\{b_1, b_2, \dots, b_{n+1}\} = B$

$B_1 = \{b_1, \dots, b_n\}$, $B_2 = \{b_2, \dots, b_{n+1}\}$

z indukčního předpokladu:

$$\begin{matrix} b_1 = & b_2 & = & \dots & = & b_n & & \\ & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ & b_2 & = & b_3 = \dots & = & b_n & = & b_{n+1} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ platí $P(n+1)$

$\square$

$P(1)$ ✓

$P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$ ✓

$P(1) \cancel{\Rightarrow} P(2)$

$B = \{b_1, b_2\}$

obecně $B_1 \cap B_2 = \emptyset$

$B_1 = \{b_1\}$, $B_2 = \{b_2\}$

Domácí úkol 1:

$$P(n): \quad f_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

místo $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

použiju $P(n-1)\ \&\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

POZOR: v MI když dokazuji $P(n+1)$

smím použít $P(m)$, $m = 1, \dots, n$

ale neplatí:

$$\{n, n-1\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$$

pro $n = 1$

chyba byla neověření

$P(2)$

neplatí: $P(0) \wedge P(1) \Rightarrow P(2)$

neplatí

$$f_1 \leq \left(\frac{7}{4}\right)^0 = 1$$
$$\vee$$
$$1$$

$$f_0 = -10^6$$

$$f_1 = 10^6 + \frac{5}{4}$$

$$f_2 < \frac{7}{4}$$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

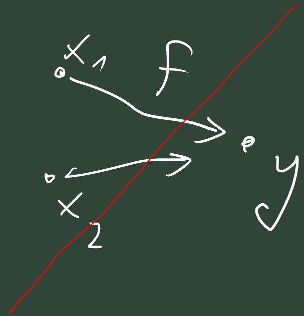
$$f_2 = \frac{5}{4} < \frac{7}{4}$$

$$\cancel{f_{n+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n}$$

I/10 $\quad M_1, M_2 \subset D(f)$

$$\underbrace{\boxed{f(M_1 \setminus M_2) = f(M_1) \setminus f(M_2)}}_{A}$$

Platí $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{\boxed{f \text{ je prosté}}}_{B}$



Důkaz: $\Leftarrow$ již víme

Ad $\Rightarrow$)

Místo $\boxed{A \Rightarrow B}$

lze dokázat $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{non } B \Rightarrow \text{non } A}$

Nechť tedy f není prosté

Pak $\exists y = f(x_1) = f(x_2)$

pro nějaká $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$

$$M_1 = \{x_1, x_2\}$$

$$M_2 = \{x_1\}$$

$$\cancel{f(M_1 \setminus M_2) = f(\emptyset) = \emptyset}$$

$$\cancel{f(M_1) \setminus f(M_2) = \{y\} \setminus \{y\} = \emptyset}$$

$$f(M_1 \setminus M_2) = f(\{x_2\}) = \{y\}$$

$$f(M_1) \setminus f(M_2) = \{y\} \setminus \{y\} = \emptyset$$

non A $\square$

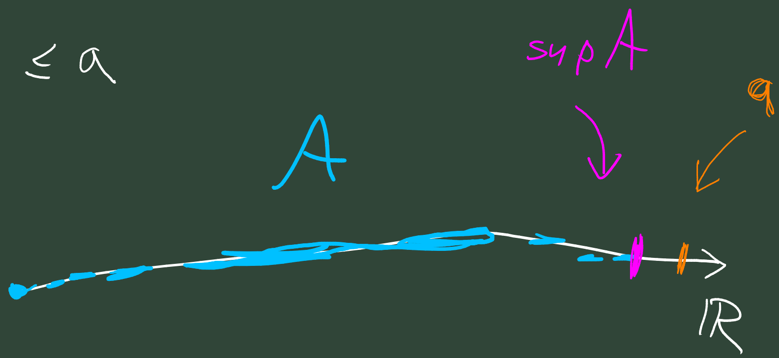
Supremum, Infimum

$A \subseteq \mathbb{R}$

* Horní závora mn. A je $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in A : x \le a$$

* $\sup A$ je nejmenší horní závora



* $\inf A$ je největší dolní závora

AXIOM SUP (INF): Jedi $A \subseteq \mathbb{R}$ A je neprázdná shora (zdola) omezená pak existuje $\sup A$. ($\inf A$)

+, ·, asoc., distr., kom., 0, 1, inverzní p., $\leq$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\mathbb{Q}}$

axiom suprema ... $\mathbb{R}$

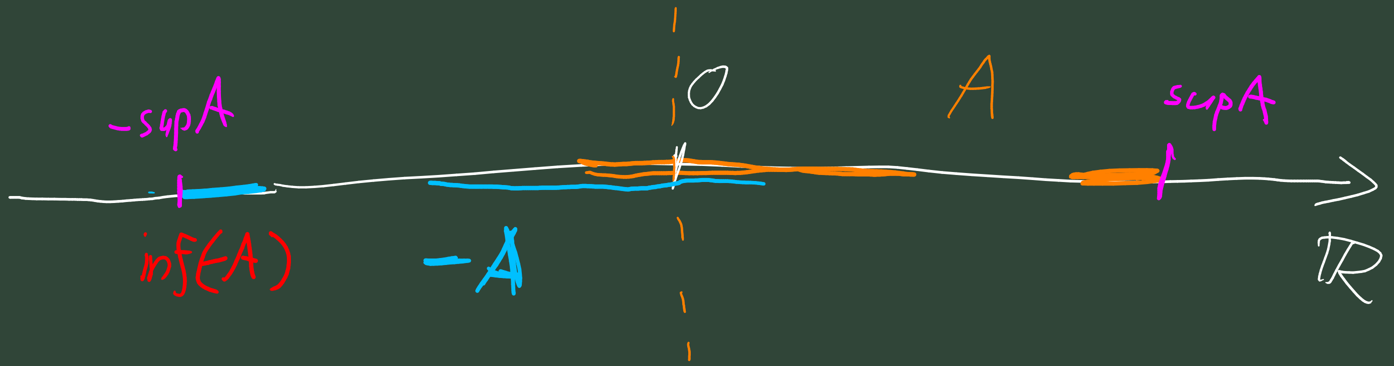
Dá se snadno ukázat:

AXIOM SUP. $\Leftrightarrow$ AXIOM INF (nad ostatními axiomy)

II/13a) $A \subseteq \mathbb{R}$ je neprázdná omezená shora, dokažte:

$$-\sup A = \inf(-A)$$

$$-A = \{-a \mid a \in A\}$$



Důkaz:

Alternativní def. $\sup A$, $\inf A$:

i) $\sup A$ je horní závora

ii) $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in A : \quad x + \varepsilon > \sup A$

$$\Updownarrow$$

$$x > \sup A - \varepsilon$$

Analogicky pro $\inf A$

$$a = \sup A$$

$$\forall x \in A : \quad x \le a \qquad \Big| \cdot (-1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha \in A : \quad a < \alpha + \varepsilon \qquad (-1)$$

$$\Rightarrow \forall x \in A : \quad -x \ge -a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha \in A : \quad -a > -\alpha - \varepsilon$$

$\forall x \in A: \quad \underbrace{-x}_{y} \geq -a$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \alpha \in A: \quad -a > \underbrace{-\alpha}_{\beta} - \varepsilon$

$\iff$

$\forall y \in -A: \quad y \geq -a$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \beta \in -A: \quad -a > \beta - \varepsilon$

$\iff$

$-a$ je inf. $-A$

neboli

$-a = \inf(-A) \quad \square$

$\forall$ mn. $B \subseteq \mathbb{R}$ zdola omezená

$A := -B$ zhora omezená

$-\sup A = \inf(-A) = \inf(-(-B)) = \inf B$

13b) A, B omezené shora (neprázdné)

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

$$A+B = \{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$$

Důkaz: Nechť $\varepsilon > 0$. $\exists\, \alpha\in A,\ \beta\in B$

$\forall a\in A:\quad a \le \sup A < \alpha + \varepsilon$

$\forall b\in B:\quad b \le \sup B < \beta + \varepsilon$

$\forall a\in A$
$\forall b\in B$:
$$\underbrace{a+b}_{\text{lib. prvek } c\in A+B} \le \sup A + \sup B < \underbrace{\alpha+\beta}_{=\gamma\in A+B} + 2\varepsilon$$

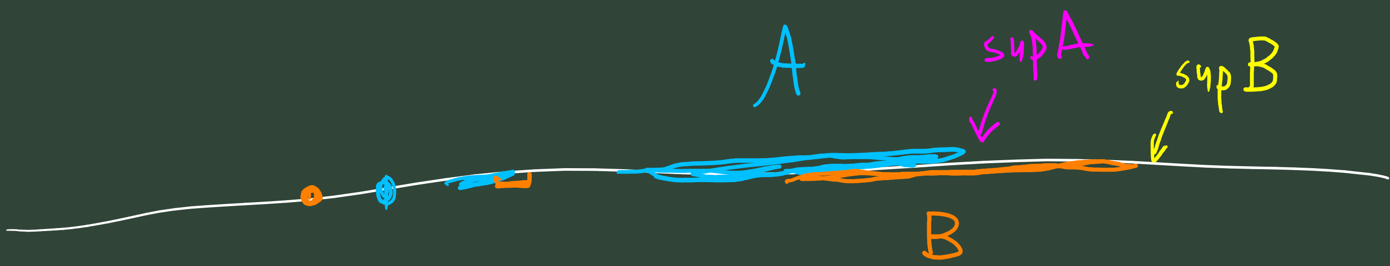
$\Rightarrow \quad \forall c\in A+B:\quad c \le \sup A + \sup B < \gamma + 2\varepsilon$

2ε je lib. malé

$\overset{\text{z def.}}{\Longrightarrow} \quad \sup(A+B) = \sup A + \sup B \quad \square$

II/14) A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$.

$$\sup(A \cup B) = \ ? \qquad \big(f(\sup A, \sup B)\big)$$



$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$$

i) $\sup(A \cup B) \le \max(\sup A, \sup B)$

ii) $\sup(A \cup B) \ge \max(\sup A, \sup B)$

Důkaz:

Ad ii) $\forall\, B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}$ shora omez.

$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow \sup B_1 \le \sup B_2$ zřejmé

Proto platí:

$$A \cup B \supseteq A \implies \sup(A \cup B) \geq \sup A$$
$$A \cup B \supseteq B \implies \sup(A \cup B) \geq \sup B$$
$$\implies \sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B)$$

Ad i) Chci

$$\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$$

BÚNO $\sup B \geq \sup A$

bez újmy na obecnosti

WLOG without loss of generality

Chci $\sup(A \cup B) \leq \sup B$

Tj. $\sup B$ je horní závora $A \cup B$?

Platí:

$\forall x \in A: \quad x \leq \sup A \leq \sup B$

$\forall y \in B: \quad y \leq \sup B$

$\square$

$$A + B \neq A \cup B$$

$$A = (0,1)$$

$$B = (1/2, 3)$$

$$A \cup B = (0,1) \cup (1/2, 3) = (0,3)$$

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A,\ b \in B)$$

$$= (1/2, 4)$$

Zápočtová písemka

- za týden

téma:

1) komplexní čísla
2) nerovnice

$$|x+3| + |x+1| \le 25$$

3) sup, inf
4) mat. indukce

- AG nerovnost
- Binomická věta
- učivo SŠ

max. 10 bodů $\times 3$

max 30 bodů za testy
+ max 10 bodů za DÚ

k zápočtu je třeba 15

$\boxed{\text{30 min} \\ \text{+15 min}}$

45 min

Limity posloupností

Def.

Posloupnost (v $\mathbb{R}$):

je funkce z $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$k \in \mathbb{N} \longmapsto a_k \in \mathbb{R}$

Třeba: * $a_k = \frac{1}{2}k$, tj

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

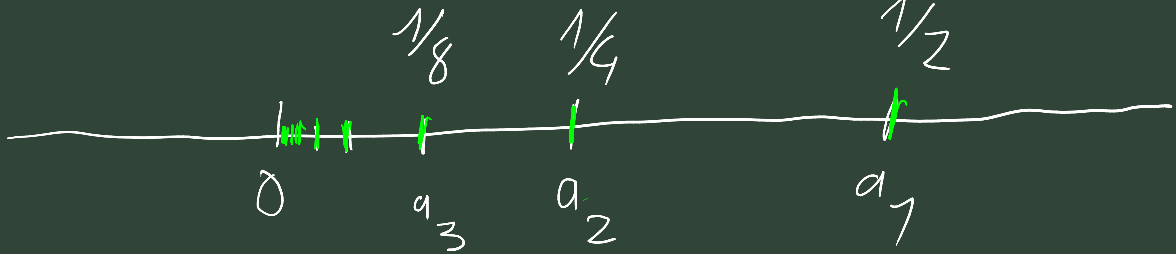
$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

* fibonacci: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$

$f_0 = 0$

$f_1 = 1$

Limity posloupnost

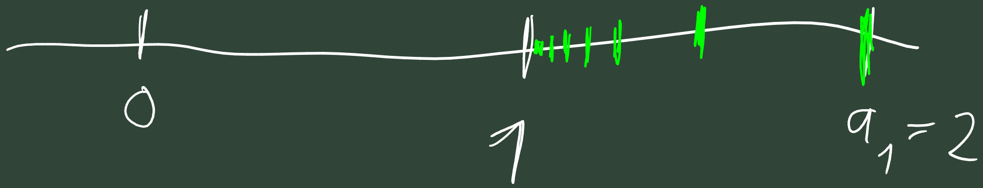


$$a_k \longrightarrow 0$$

Jiný příklad:

$$a_k = \frac{k+1}{k}$$

$$a_1 = 2$$



$$a_2 = \frac{3}{2}$$

$$a_k \longrightarrow 1$$

$$a_3 = \frac{4}{3}$$

$$\vdots$$

JAK TO DEFINOVAT $a_k \longrightarrow c \in \mathbb{R}$

Def. Nechť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost.

Řekneme, že a_k konverguje k reálnému číslu $c \in \mathbb{R}$

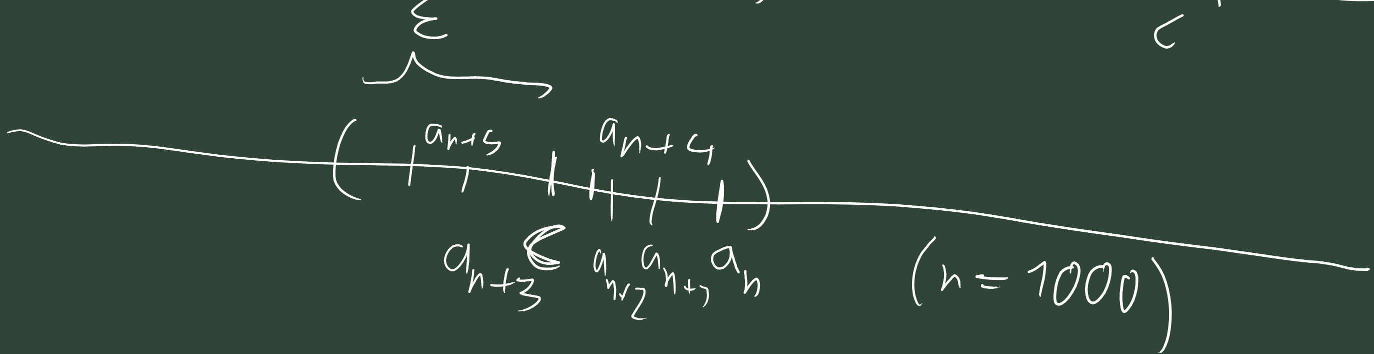
$$\left(\text{Značíme} \quad a_k \xrightarrow{k\to\infty} c \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = c \right)$$

jestliže $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N},$ $(k = n, n+1, n+2, \ldots)$

$k \geq n$: ~~$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall \varepsilon > 0$~~

$$|a_k - c| \leq \varepsilon$$

$$(<)$$



$(n = 1000)$

Př. Chci dokázat

$$a_k = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Dokažte $a_k \to 0$.

(Chci dokázat: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k = n, n+1, \dots$

$$|a_k| \le \varepsilon$$

?)

Nechť $\varepsilon > 0$, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ tak velké, že

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^k} \le \varepsilon, \quad \forall k = n, n+1, \dots$$

$$\Rightarrow a_k \to 0$$

$\square$