NOFY151 — Tahák na limity funkcí

Ondřej Kincl

ZS 2020/21

Teorie

Nechť f, g, φ jsou reálné funkce, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Definice 1. *Pro $\delta > 0$ definujeme*

$$\begin{aligned} U(x_0, \delta) &= (x_0 - \delta, x_0 + \delta), & P(x_0, \delta) &= U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}, \\ P^+(x_0, \delta) &= (x_0, x_0 + \delta), & P^-(x_0, \delta) &= (x_0 - \delta, x_0). \end{aligned}$$

Definice 2. *Funkce f má limitu y_0 v bodě x_0 (shora resp. zdola), jestliže*

$$\exists \delta > 0 : P^{+-}(x_0, \delta) \subseteq Df,$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in P^{+-}(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(y_0, \epsilon).$$

Matematický zápis:

$$\lim_{x \to x_0^{+-}} f(x) = y_0.$$

nebo ekvivalentně:

$$f(x) \to y_0 \quad \text{pro} \quad x \to x_0^{+-}. \tag{1}$$

Definice 3. *Funkce f je spojitá v bodě x_0 (shora resp. zdola), jestliže $x_0 \in Df$ a platí*

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^{+-}} f(x)$$

Věta 1. *(Jednoznačnost) Existuje max. jedno číslo y_0 které je limitou funkce f v bodě x_0.*

Věta 2. *(Aritmetika limit) Tato tvrzení platí, jestliže pravá strana má smysl:*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}.$$

Analogie platí i pro limity shora a zdola.

Věta 3. *(VOLSF) Nechť $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = y_0$ a nechť platí alespoň jeden z následujících předpokladů:*

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in P(x_0, \delta) : \varphi(x) \neq y_0 \tag{P}$$

nebo

$$f \text{ je spojitá v bodě } y_0. \tag{S}$$

Potom platí

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y).$$

Praxe

Jak v konkrétní situaci spočítám limitu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = ?$$

Trik 1. *(Dosazení do spojité funkce) Je-li f spojitá funkce, stačí dosadit. Většina standardních funkcí ($\cos x$, $\sin x$, e^x, $|x|$, x^a, $\ln x$, $\arctan x$, ...) je spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Totéž platí i pro funkce, které dostanu jejich sčítáním, násobením, dělením nebo skládáním. (Výjimku tvoří třeba funkce $\operatorname{sgn} x$, $\lfloor x \rfloor$ nebo $\lceil x \rceil$.) Příklad:*

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+1} - x) = \sqrt{0^2+1} - 0 = 1.$$

Trik 2. *(Úprava rozdílu odmocnin) Využiji toho, ze pro všechna $A, B > 0$ platí*

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A^2 - B^2}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}.$$

Trik 3. *(Limita uvnitř spojité funkce) Počítám-li limitu typu:*

$$\lim_{x\to c} \exp\left(\varphi(x)\right) \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to c} |\varphi(x)| \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to c} (\varphi(x))^n$$

typicky nejprve vyřeším

$$\lim_{x\to c} \varphi(x) = ?$$

a posléze použiji VOLFS (S).

Trik 4. *(Známe limity) Můžeme se odkázat na některou ze známých limit:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

Trik 5. *(Substituce) VOLSF mi umožňuje provádět substituce. (Ale musím ověřit předpoklady!) Např.*

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{(x^2-1)} - 1}{x^2 - 1} = \left| \begin{array}{c} \text{VOLSF (P)} \\ y = x^2 - 1 \to 0 \text{ pro } x \to 1 \\ x^2 - 1 \neq 0 \text{ pro } x \neq \pm 1 \end{array} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y}.$$

Trik 6. *(Přičtení chytré nuly) Např.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 + 1 - \cos x}{x^2} \overset{\text{(AL)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Trik 7. *(Vynásobení chytrou jedničkou) Např.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{x^2}{x^2} \overset{\text{(AL)}}{=} \left(\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\right) \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^{-2}.$$

Trik 8. *(Úprava výrazu $B(x)^{p(x)}$) Z definice obecné mocniny platí:*

$$B(x)^{p(x)} = \exp\left[p(x) \ln B(x)\right].$$

Trik 9. *Pokud chci dokázat, že limita neexistuje, mohu užít větu o jednoznačnosti limit.*

Limity podruhé - co je třeba umět k písemné části zkoušky

1 Vytknutí dominantního členu

Tento trik se typicky použije v sitaci, kdy počítám limitu pro $x \to 0$ nebo pro $x \to \infty$ ze zlomku, který obsahuje kombinaci různých mocnin a odmocnin x. V limitě $x \to \infty$ se snažím vytknout mocninu x s nejvyšším vyskytujícím se exponentem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^6 + x^2} + x^3}{\sqrt[3]{x^9 + x^3} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(\sqrt{1 + x^{-4}} + 1\right)}{x^3\left(\sqrt[3]{1 + x^{-6}} + x^{-2}\right)} = \frac{\sqrt{1+0}+1}{\sqrt[3]{1+0}+0} = 2$$

Naopak v limitě $x \to 0$ se snažím vytknout mocninu x s nejnižším vyskytujícím se exponentem:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x^6 + x^2} + x^3}{\sqrt[3]{x^9 + x^3} + x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x\left(\sqrt{x^4 + 1} + x^2\right)}{x\left(\sqrt[3]{x^6 + 1} + 1\right)} = \frac{\sqrt{0+1}+0}{\sqrt[3]{0+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Po zkrácení jsme mohli použít aritmetiku limit a větu o limitě složené funkce. Všimněme si, že nezvýrazněné členy nemají na výsledek žádný vliv.

2 Důkaz, že limita neexistuje

Marně bychom se snažili spočítat např. limitu

$$\lim_{x\to\infty} e^{\sin x},$$

jelikož tato limita neexistuje (tj. ani vlastní ani nevlastní). Při důkazu neexistence limity postupujeme sporem: předpokládáme, že limita existuje a že je rovna $A \in [-\infty, \infty]$. Zvolme $c \in \mathbb{R}$ a uvažujme posloupnost $x_n := c + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Dle Heineho věty pak

$$A = \lim_{n\to\infty} e^{\sin x_n} = e^{\sin c}$$

Není ale možné, aby tato rovnost platila pro libovolné $c \in \mathbb{R}$, pročež dostáváme spor.

3 Součin omezené funkce krát funkce jdoucí do nuly

Toto tvrzení je jednoduchým důsledkem věty o dvou strážnících: Je-li h omezená na prstencovém okolí bodu $c \in [-\infty, \infty]$ a jestliže $f(x) \to 0$, pro $x \to c$, potom

$$\lim_{x\to c} f(x)h(x) = 0.$$

Toto tvrzení používáme nejčastěji v situaci, kdy h nemá limitu. Např.:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x^3)}{x} = 0,$$

neboť $\sin(x^3)$ je omezená a $x^{-1} \to 0$.

4 L'Hospitalovo pravidlo

Tvrzení 1. *Nechť $c \in [-\infty, \infty]$ a nechť f, g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí c, přičemž g je na tomto okolí nenulová. Dále nechť je splněn jeden z těchto předpokladů*

- $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \qquad \text{(případ "}\tfrac{0}{0}\text{")}$$
- $$\lim_{x\to c} |g(x)| = +\infty \qquad \text{(případ "}\tfrac{X}{\infty}\text{")}$$

Potom platí

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

vždy, když pravá strana má smysl.

L'Hospitalovo pravidlo je velice efektivní metoda, pokud se ve zlomku vyskytují funkce, které se po zderivování zjednoduší (polynomy, $\arctan x$, $\arcsin x$, $\ln x$). Můžeme se setkat s výrazem, který není apriori napsán ve tvaru zlomku, a pak je třeba jej vhodně upravit, např.

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

Nikdy nesmíme zapomenout ověřit předpoklady! V tomto případě $(*)$ platí, protože čitatel i jmenovatel jdou do nuly a pravá strana má smysl. (Výpočtem jsme ověřili, že pravá strana se rovná jedné. Problém by nastal, kdyby limita podílu derivací neexistovala – levá strana by neměla smysl. Pak bychom o původní limitě nedostali žádnou informaci a museli bychom použít jiný postup.)

5 Růstová škála

Je vhodné si zapamatovat, že pro každé $a > 0$ platí

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

6 Taylorův polynom

Tvrzení 2. *(Peanova) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, nechť funkce f má v bodě a derivace až do řádu n včetně, nechť p je polynom řádu nejvýše n-tého. Pak*

$$f(x) = p(x) + o((x-a)^n), \quad x \to a$$

právě tehdy když $p(x) = T^n_{a,f}(x)$.

Limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^3}$$

bychom mohli spočíst trojím použitím l'Hospitalova pravidla. Vícenásobné derivování může být ovšem pracné. Tehdy se hodí použít rozvoj do Taylorovy řady:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{3} - o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = \frac{1}{6}.$$

Při určování Taylorova polynomu máme často na výběr ze dvou postupů:

1. Přes derivace, podle vzorečku

$$T^n_{a,f} = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n.$$

2. Sčítáním, násobením, dělením a skládáním Taylorových polynomů známých funkcí.

Druhý postup bývá rychlejší. Přitom se symbolem o pracujeme jako s generickým označením funkce, která splňuje

$$\frac{o(x)}{x} \to 0, \quad x \to a.$$

Podobně jako u generické konstanty C v integrálu, každý výskyt symbolu o reprezentuje jinou funkci s vlastností výše. Prostě jsme jen líní po každé úprávě vymýšlet nový název. Např.

$$\begin{aligned}\sin(\sin x) &= \sin x - \frac{1}{6}\sin^3 x + o(\sin^3 x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\end{aligned}$$

Seznam funkcí, jejichž Taylorovy rozvoje je vhodné znát (všechno pro $x \to 0$)

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.
\end{aligned}$$

Dále je důležité vědět, že sudé funkce mají v Taylorově polynomu pouze sudé mocniny x, liché funkce pouze liché mocniny x. Před hledáním Taylorova polynomu funkce je dobré se nejprve zamyslet, jestli tato funkce nelze nejprve vhodně upravit, abychom si usnadnili práci! Např.

$$\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{1-x} \right) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln(1-x).$$