

# Aritmetika a algebra II

## Literatura k předmětu:

[BeDla] Bečvář J., Dlab V.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře*. Serifa, Praha, 2016.

## Podmínky udělení zápočtu:

- portfolio: je třeba jej přinést ke zkoušce (praktická část), ověřuje se samostatné vypracování domácích úkolů (úlohy označené hvězdičkou) v průběhu semestru
- úspěšné napsání testíku s úlohami (tzv. praktická část) na kterémkoli vypsaném termínu zkoušky (je možno používat samostatný kalkulátor; ne v mobilu, ne grafický)

## Požadavky ke zkoušce:

zkouškový testík (tzv. teoretická část) cca 90 min., ověřuje se dobrá znalost teorie (definice, věty, důkazy) v rozsahu probíraném na seminářích (včetně úloh zadávaných k samostatnému rozmyšlení)

## Materiály k jednotlivým tématům

- lineární a kvadratická rovnice: [zde](#)
- kubická rovnice: [zde](#)
- casus irreducibilis, binomické a trinomické rovnice: [zde](#)
- odmocniny a reciproké rovnice: [zde](#)
- tzv. základní věta algebry: [zde](#)
  
- text o konstrukci  $(\mathbb{Z}, +)$  na základě  $(\mathbb{N}, +)$ , rozšíření komutativního monoidu na grupu a o zavedení  $\mathbb{Q}$ : [zde](#)
- tabule ke konstrukci podílového pole: [zde](#)
- tabule k iracionálním číslům (a také algebraickým a transcendentním): [zde](#)
- tabule k důkazu iracionality  $e$  a  $\pi$ : [zde](#) (důkaz iracionality  $\pi$  se nezkouší)
- reálná čísla: v příslušné kapitole
- komplexní a hyperkomplexní čísla: [zde](#)
- pro zájemce: hyperkomplexní čísla – scan z knihy: [zde](#)
  
- řetězové zlomky, lineární diofantická rovnice a Pellova rovnice: [zde](#) (kromě poslední strany věnované souvislosti ŘZ s řadami)
- průměry: [zde](#)
- faktorizace grup (základní idea) a Lagrangeova věta: [zde](#)
- dělitelnost, EOI, GOI: [zde](#)

## Osnova předmětu

1. Lineární rovnice, řešení v tělesech  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ , počet řešení v okruhu  $\mathbb{Z}_n$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$ .
2. Kvadratická rovnice. Didaktický postup, řešení speciálních případů, odvození Viětových vzorců. Odvození vzorce pro kořeny: klasické doplnění na čtverec, mezopotámské řešení na základě Viětových vzorců, řešení soustavy z Vietových vět. Geometrické znázornění reálných a komplexních kořenů rovnice s reálnými koeficienty.
3. Kubická rovnice. Substitute pro odstranění členu obsahujícího  $x^2$ , Cardanův postup řešení (substituce  $y = u + v$ ), kvadratická resolventa, diskriminant kubické rovnice, význam výrazu  $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ . Získání všech kořenů pomocí  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ . Vlastnosti  $u, v$ . Vietovy vzorce. Casus irreducibilis – řešení pomocí goniometrické substituce.
4. Rovnice binomické, trinomické, bikvadratické.
5. Reciproká rovnice 1. druhu ( $a_k = a_{n-k}$ , stupně  $n = 2k + 1$  a  $n = 2k$ ) a 2. druhu ( $a_k = -a_{n-k}$ ), vlastnosti, kořeny, řešení.
6. Základní věta algebry a její důsledky.
7. Konstrukce oboru celých a racionálních čísel, abstraktní podstata obou konstrukcí: rozšíření komutativního monoidu se zákony krácení na grupu. Podílové pole oboru integrity celých čísel.
8. Iracionální čísla. Důkaz iracionality odmocnin přirozených čísel, která nejsou čtverci. Čísla algebraická a transcendentní. Mohutnost množiny všech algebraických čísel. Liouvilleovo číslo, mohutnost množiny všech transcendentních čísel. Bez důkazu: věta Gelfandova–Schneiderova. Důkaz iracionality čísla  $e$ . Pro zajímavost: důkaz iracionality čísla  $\pi$  (nezkouší se). Konstrukce druhých odmocnin.
9. Pole reálných čísel – zavedení: 1) desetinné rozvoje (vyločení periody  $\bar{9}$  a ošetření periody  $\bar{0}$ ), 2) základní myšlenka zúplnění  $\mathbb{Q}$ , Cauchyovské posloupnosti, ekvivalence pomocí  $\lim(a_n - b_n) = 0$ , 3) axiomatické zavedení reálných čísel ( $A+C \iff S$ ), 4) Dedekindovy řezy, Dedekindova věta.
10. Pole komplexních čísel: zavedení (problémy se zavedením), vlastnosti, geometrie v komplexní souřadnici.
11. Hyperkomplexní čísla: neúspěšné snahy o aritmetizaci bodů (třírozměrného) prostoru, tj. rozšíření  $\mathbb{C}$  o jednu další imaginární jednotku; kvaterniony (základní myšlenka).
12. Řetězové zlomky: konečné, nekonečné, periodické; výpočet článků řetězového zlomku čísel racionálních, iracionálních, druhých odmocnin. Aproximace racionálních a iracionálních čísel řetězovými zlomky, přesnost aproximace, chování posloupnosti konvergentů (věta „o cikcaku“). Řešení lineární diofantické rovnice a Pellovy rovnice pomocí řetězových zlomků.
13. Průměry: harmonický, geometrický, aritmetický, kvadratický. Geometrické znázornění, úloha o pohybu a harmonický průměr.
14. Grupy. Lagrangeova věta pro grupy. Normální podgrupa, podmínka normality, faktorizace grupy podle normální podgrupy. Relace kongruence, kompatibilita ekvivalence s grupovou operací, faktorizace grupy podle relace kongruence. Homomorfismy a izomorfismy grup; jádro homomorfismu je normální podgrupou, normální podgrupa je jádrem nějakého homomorfismu. Cyklické grupy konečné a nekonečné, izomorfismus s  $(\mathbb{Z}_n, +)$  a  $(\mathbb{Z}, +)$ . Dihedrální grupy, grupy symetrií pravidelných  $n$ -úhelníků, podgrupa rotací  $R$  o  $\frac{2\pi}{n}$ , rozklad  $\mathcal{D}_{2n} = R \cup (1, 2)R$ , izomorfismus  $D_6 \simeq S_3$ , rozklad  $\mathcal{D}_6 = R \cup (1, 2)R = \mathbb{A}_3 \cup (1, 2)\mathbb{A}_3$ .
15. Dělitelnost, prvočinitel, ireducibilní prvek, nsn, NSD. Eukleidovské obory integrity, norma, příklady. Gaussovy obory integrity – obory s jednoznačným rozkladem, příklady.  $EOI \subset GOI$ .

# 1 Kvadratická rovnice

1. \* Najděte všechna řešení rovnice v  $\mathbb{Z}_3$  (tj. v poli):

a)  $x^2 + 2 = 0$    b)  $x^2 + x + 1 = 0$    c)  $x^2 + x + 2 = 0$    d)  $x^3 + 2x = 0$

A pro zajímavost – kořenů může být více (či méně), než je stupeň rovnice

a)  $x^3 + 5x$  v  $\mathbb{Z}_6$    b)  $x^3 + 5x + 1$  v  $\mathbb{Z}_6$

2. \* Vyřešte mezopotámským způsobem kvadratickou rovnici

$$x^2 + 2 = 3x.$$

3. \* Najděte souřadnice vrcholu  $V$  paraboly  $y = ax^2 + bx + c$ .

4. \* Pomocí prostředků matematické analýzy objevte diskriminant: najděte extrém funkce

$$f : y = ax^2 + bx + c$$

a rozeberte následující případy:

- $f$  má dva různé průsečíky s osou  $x$  ( $f$  je konvexní a hodnota extrému je záporná,  $f$  je konkávní a hodnota extrému je kladná),
- $f$  se dotýká osy  $x$  (hodnota extrému je nulová),
- $f$  nemá průsečíky s osou  $x$  ( $f$  je konvexní a hodnota extrému je kladná,  $f$  je konkávní a hodnota extrému je záporná).

5. Pro nadšence: Pokuste se odvodit, jak by bylo možno znázornit kořeny kvadratické rovnice s reálnými koeficienty, které jsou komplexní.

## 1.1 Komplexní kořeny kvadratické rovnice

Uvažujme kvadratickou rovnici  $ax^2 + bx + c = 0$ , kde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Má-li tato rovnice

- 2 různé reálné kořeny, jsou rovny  $x$ -ovým souřadnicím průsečíků paraboly

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

s osou  $x$ ,

- 1 dvojnásobný kořen, je roven  $x$ -ové souřadnici společného bodu paraboly (1) s osou  $x$ ,
- 2 různé komplexní kořeny (tj. komplexně sdružené), jak je lze znázornit?

**Návod:**

Uvažujme parabolu

$$y = (x - \alpha)^2 + \beta^2,$$

kde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ . Souřadnice vrcholu  $V$  této paraboly jsou:  $V = [\alpha, \beta^2]$ .  
Hledejme nulové body; dostaneme rovnici

$$(x - \alpha)^2 = -\beta^2,$$

jejímiž kořeny jsou

$$z_{1,2} = \alpha \pm i\beta.$$

**Porovnejte** tento výsledek se znázorněním kořenů rovnice, která má kořeny reálné:

$$y = (x - \alpha)^2 - \beta^2,$$

kde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ . Souřadnice vrcholu  $V$  této paraboly jsou:  $V = [\alpha, -\beta^2]$ .  
Hledejme kořeny; dostaneme rovnici

$$(x - \alpha)^2 = \beta^2,$$

jejímiž kořeny jsou

$$z_{1,2} = \alpha \pm \beta.$$

### Závěr

- Reálné kořeny leží na ose  $x$  ve vzdálenosti  $\beta$  od  $x$ -ové souřadnice  $\alpha$  vrcholu  $V$ .
- Pokud bychom se na rovinu  $xy$  dočasně dívali jako na Gaussovu rovinu, tak komplexně sdružené kořeny kvadratické rovnice s reálnými koeficienty leží na kolmici k reálné ose (ose  $x$ ) ve vzdálenosti  $\beta$  od reálné části  $\alpha$  ( $x$ -ové souřadnice vrcholu  $V$ ).

### Důkladnější výpočet

Určeme reálnou a imaginární část nulových bodů funkce komplexní proměnné  $x \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} y(x) &= (x - \alpha)^2 + \beta^2 = (x_1 + ix_2 - \alpha)^2 + \beta^2 = [(x_1 - \alpha) + ix_2]^2 + \beta^2 \\ &= (x_1 - \alpha)^2 - x_2^2 + \beta^2 + 2ix_2(x_1 - \alpha). \end{aligned}$$

Nulové body lze tedy najít snadno:  $y(x) = 0 \iff \Re y(x) = 0$  a  $\Im y(x) = 0$ . Imaginární část se rovná nule právě tehdy, když  $x_1 - \alpha = 0$  ( $x_2 \neq 0$ , neboť by pak rovnice měla jen reálné kořeny). Reálná část  $x_1$  obou kořenů je tedy  $x_1 = \alpha$ .

Reálná část funkce  $y(x)$  se rovná nule právě tehdy, když  $(x_1 - \alpha)^2 + \beta^2 = x_2^2$ , tj.  $\beta^2 = x_2^2$ . Imaginární část  $x_2$  obou kořenů je proto  $x_2 = \pm\beta$ . Celkově má tedy funkce  $y(x)$  nulové body  $x_1 + ix_2 = \alpha \pm i\beta$ .

**Otázka pro zájemce.** Existuje podobná souvislost komplexních kořenů s vrcholy také u kubické rovnice?

### Soustavy kvadratických rovnic

1. Vyřešme metodou sčítací soustavu

$$\begin{aligned} x^2 - 3y + 4 &= z, \\ y^2 - 3z + 4 &= x, \\ z^2 - 3x + 4 &= y. \end{aligned}$$

Sečtením všech těchto rovnic dostaneme

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 4z + 4) = 0,$$

neboli

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 0.$$

Vidíme, že jedinou trojicí, která této rovnici vyhovuje, je  $[2, 2, 2]$ . Provedeme-li zkoušku, tj. dosadíme-li  $x = 2$ ,  $y = 2$ ,  $z = 2$ , ověříme, že se skutečně jedná o řešení.

2. Aplikujme postup z předchozí úlohy na soustavu

$$x^2 - 3y + 4 = z,$$

$$y^2 - 3z + 3 = x,$$

$$z^2 - 3x + 5 = y.$$

Sečtením všech těchto rovnic opět dostaneme

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 4z + 4) = 0,$$

neboli

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 0.$$

Provedeme-li zkoušku s hodnotami  $x = 2$ ,  $y = 2$ ,  $z = 2$ , zjistíme...

- \* Vysvětlete, proč jsme v prvním případě získali řešení soustavy a v druhém případě nikoli.
- Uvažujte soustavu lineárních rovnic:

$$x - y = 4,$$

$$x - y = 2.$$

- Tato soustava nemá řešení, neboť si tyto dvě rovnice odporují.
- Sečtením obou rovnic dostaneme  $2x - 2y = 6$ , neboli  $y = x - 3$ . Množinou všech řešení však není nekonečná množina  $\{[x, x - 3] : x \in \mathbb{R}\}$ .
- Pozorování:** sečtením všech rovnic soustavy sčítací metodu pouze začneme, bez následného „zžitkování“ zbylých rovnic jsme ztratili mnoho informací z těchto rovnic. Získáme tak jedinou rovnici, která však obecně může mít (mnohem) širší množinu řešení, než původní soustava.
- Pozor, nejedná se o narušení toho, že „přičíst jednu rovnici ke druhé je ekvivalentní úprava“, provedením by se tedy neměla změnit množina všech řešení. Provedli jsme totiž vlastně úpravy dvě: k první rovnici jsme přičetli druhou, následně jsme první rovnici zcela „škrtnuli“ ze soustavy.

## 2 Kubická rovnice – Cardanův postup

- Najděte jeden kořen následující kubické rovnice Cardanovým postupem.

$$x^3 + 6x - 20 = 0$$

Ostatní kořeny najděte tak, že levou stranu vydělíte známým kořenovým činitelem a vyřešíte vzniklou kvadratickou rovnici.

2. \* Najděte jeden kořen následující kubické rovnice Cardanovým postupem.

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$$

Následně najděte i ostatní kořeny této rovnice.

(pro kontrolu:  $y^3 - 2y - 4 = 0$ , kvadratická resolventa je  $t^2 - 4t + \frac{8}{27} = 0$ )

3. Vyřešte binomickou rovnici (v  $\mathbb{C}$ ):  $z^3 = 1$ . Řešení zapište v goniometrickém i algebraickém tvaru.
4. \* Ukažte, že všechny komplexní kořeny binomické rovnice  $z^3 = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , lze zapsat ve tvaru:

$$x_1 = \sqrt[3]{a}, \quad x_2 = \varepsilon \cdot \sqrt[3]{a}, \quad x_3 = \varepsilon^2 \cdot \sqrt[3]{a}.$$

Je předpoklad  $a \in \mathbb{R}$  nutný?

5. Všimněte si, že právě v tomto tvaru

$$\sqrt[3]{t_1} = \{u, \varepsilon \cdot u, \varepsilon^2 \cdot u\}, \quad \sqrt[3]{t_2} = \{v, \varepsilon \cdot v, \varepsilon^2 \cdot v\},$$

jsou komponenty kořenů

$$\begin{aligned}x_1 &= u + v, \\x_2 &= \varepsilon u + \varepsilon^2 v, \\x_3 &= \varepsilon^2 u + \varepsilon v.\end{aligned}$$

kubické rovnice

$$x^3 + px + q = 0.$$

6. Dle Vietových vět platí:  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ; pozorujme, že koeficienty  $\varepsilon$  a  $\varepsilon^2$  jsou skutečně umístěny tak, že  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ :

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= u + \varepsilon u + \varepsilon^2 u + v + \varepsilon^2 v + \varepsilon v \\&= (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) \cdot u + (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) \cdot v = 0 \cdot u + 0 \cdot v = 0.\end{aligned}$$

7. \* Označme jednu z třetích odmocnin z jedné řeckým písmenem  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ukažte, že

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0.$$

8. \* Ukažte, že předchozí tvrzení lze snadno zobecnit: označíme-li

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

tak platí:

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

9. \* a) Ukažte, že platí následující tvrzení: jsou-li komplexní čísla  $u, v$  komplexně sdružená, tj.

$$u = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{a} \quad v = r \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi),$$

jsou komplexně sdruženými také jejich třetí mocniny.

b) Platí analogické tvrzení pro druhé mocniny?

### 3 Kubická rovnice – diskriminant

- \* U kvadratické rovnice jsme objevili diskriminant prostředky matematické analýzy. Pokuste se provést totéž u kubické rovnice (uvažujte funkci  $y = x^3 + px + q$ ).
- \* Najděte všechny kořeny rovnice  $x^3 - 3x - 2 = 0$  standardním Cardanovým postupem. Vyšetřete průběh funkce  $y = x^3 - 3x - 2$  (najděte extrémy, inflexní body, intervaly, kde je tato funkce rostoucí, klesající, konvexní, konkávní) a načrtněte její graf.
- Zopakujte si: diskriminantem kubické rovnice  $x^3 + px + q = 0$  rozumíme výraz:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Pokud jsou  $p, q \in \mathbb{R}$ , má tato kubická rovnice v případě, že:

- $D < 0$ , všechny tři kořeny reálné (tzv. *casus irreducibilis*),
  - $D > 0$ , jeden reálný a dva komplexně sdružené kořeny,
  - $D = 0$ , násobné kořeny.
- Zajímavost.* Pro rozhodování, zda nastává casus irreducibilis, používáme výraz

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

což je modifikovaný diskriminant kvadratické resolventy. Přesně tento výraz se vyskytuje v Cardanových vzorcích pod druhou odmocninou. Pozor: ani diskriminant kvadratické resolventy, ani uvedený výraz  $D$  přísně vzato *není* diskriminantem kubické rovnice. Diskriminant  $D_n$  polynomiální rovnice stupně  $n$  je pojem, který bude obecně zaveden v 5. ročníku. U kubické rovnice pak odvodíme, že jejím diskriminantem je výraz

$$D_3 = -27 \cdot 4 \cdot \left( \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \right),$$

který se od námi používaného  $D$  liší nejen faktorem  $27 \cdot 4$ , ale i znaménkem (což je celkem nepříjemnost).

### 4 Kubická rovnice – casus irreducibilis

- \* Pokuste se najít jeden kořen následující kubické rovnice Cardanovým postupem.

$$x^3 - 13x + 12 = 0$$

**Alespoň jeden kořen dopočítejte až „do konce“.** (Tato rovnice má tři reálné kořeny, všechny jsou celými čísly. Aspoň jeden kořen vyjádřený pomocí třetích odmocnin komplexních čísel z Cardanových vzorců tedy dopočítejte až do podoby celého čísla. Třetí odmocniny komplexních čísel můžete hledat např. pomocí goniometrického tvaru a Moiverovy věty.)

- Pomocí vztahu pro  $\cos 3\alpha$  najděte všechny kořeny rovnice

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

- \* U následujících rovnic ověřte (pomocí diskriminantu), že nastává casus irreducibilis, následně najděte všechny jejich kořeny pomocí goniometrických substitucí.
  - $x^3 - 13x + 12 = 0$
  - $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

## 5 Rovnice binomická, trinomická a bikvadratická

1. \* Najděte v komplexním oboru všechny třetí odmocniny z čísla  $-8$ :  
a) řešte v  $\mathbb{C}$  binomickou rovnici  $z^3 = -8$ ;  
b) pokuste se získaná řešení zapsat pomocí  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ .

2. \* Napište čtvrtou odmocninu čísla  $16$  v  $\mathbb{R}$  a v  $\mathbb{C}$ .

3. \* Řešte v  $\mathbb{C}$  binomickou rovnici

$$z^4 = -1 + i\sqrt{3}.$$

4. \* Řešte v  $\mathbb{C}$  bikvadratickou rovnici

$$x^4 + x^2 - 20 = 0.$$

5. \* Řešte v  $\mathbb{C}$  rovnici

$$x^3 \cdot (x^3 - 7) = 12 \cdot (18 + x^3).$$

6. \* Najděte v  $\mathbb{C}$  všechny kořeny následujících trinomických rovnic.

a)  $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

b)  $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$

$$[3, -\frac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{3}), -2, 1 \pm i\sqrt{3}]$$

## 6 Reciproké rovnice – teorie

Nechť je dána rovnice ve tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

kde  $a_n \neq 0$ .

**Reciproká rovnice 1. druhu:**  $a_i = a_{n-i}$  pro všechna  $i = 0, 1, \dots, n$

- lichého stupně: má kořen  $x_1 = -1$   
po vydělení kořenovým činitelem  $x + 1$  zbude reciproká rovnice 1. druhu sudého stupně
- sudého stupně: „prostřední“ koeficient  $a_{\frac{n}{2}}$  může být libovolný  
řešíme pomocí substituce  $z = x + \frac{1}{x}$

**Reciproká rovnice 2. druhu:**  $a_i = -a_{n-i}$  pro všechna  $i = 0, 1, \dots, n$

- má vždy kořen  $x_1 = 1$  (nezávisí na paritě stupně)

- po vydělení kořenovým činitelem  $x - 1$  zbude reciproká rovnice 1. druhu (snadno se ověří vydělením  $x - 1$ )

*Pozorování:* Reciproká rovnice 2. druhu sudého stupně má jediný „prostřední“ koeficient  $a_{\frac{n}{2}}$ . Jak vypadá? Jelikož musí platit  $a_i = -a_{n-i}$ , tak musí být nulový:  $a_{\frac{n}{2}} = 0$ .

**Proč se takové rovnice nazývají reciproké?** Pro reciproké rovnice 1. i 2. druhu platí: je-li  $\alpha$  kořenem této rovnice, pak je jejím kořenem také  $\frac{1}{\alpha}$ . A převrácená hodnota se také nazývá *reciproká hodnota*.

Jak tvrzení dokázat: Stačí předpokládat, že reciproká rovnice má kořen  $\alpha$ , pak do ní dosadit  $\frac{1}{\alpha}$  a ihned bude zřejmé, že je také kořenem.

**Reciprokosti lze využít při hledání kořenů:** Máme-li zadánu reciprokou rovnici 1. či 2. druhu s celočíselnými koeficienty, můžeme se pokusit hledat její kořeny pomocí Vietových vět. Je-li absolutní člen roven přirozenému číslu, můžeme zkusit všechny jeho dělitele. Výhodou je, že najdeme-li jeden kořen  $x_0$ , máme automaticky i další kořen, který je jeho převrácenou hodnotou:  $\frac{1}{x_0}$ .

**Jaké reciproké rovnice lze vyřešit v radikálech?** Reciproké rovnice jsou ve speciálním tvaru; díky symetričnosti (či antisymetričnosti) koeficientů stačí znát jen polovinu koeficientů. Podobné je to i s kořeny: také stačí znát jen polovinu kořenů, zbylé totiž jsou jejich převrácenými hodnotami. Díky tomuto speciálnímu tvaru tedy můžeme vždy řešit v radikálech (tj. „vzorečkem“ pro kořeny obsahujícím pouze  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $:$  a  $k$ -té odmocniny) rovnice nejen stupně nižšího než pátého, ale až do stupně „dvojnásobného“, tj. do stupně devátého včetně.

1. Příklad reciproké rovnice, která je řešitelná i po redukci na rovnici polovičního stupně, přestože je to rovnice pátého stupně:

$$x^{10} + 5x^8 + 10x^6 + x^5 + 10x^4 + 5x^2 + 1 = 0.$$

Určete všechny její kořeny v  $\mathbb{C}$ . Platí i pro její komplexní kořeny, že je-li jejím kořenem  $\alpha \in \mathbb{C}$ , je také jejím kořenem  $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{C}$ ?

2. Příklad reciproké rovnice, která po redukci na rovnici polovičního stupně není řešitelná:

$$x^{10} + 5x^8 + 11x^6 + x^5 + 11x^4 + 5x^2 + 1 = 0.$$

Provedte redukci na rovnici polovičního stupně. Platí přesto pro každý z jejích deseti kořenů, že je-li jejím kořenem  $\alpha \in \mathbb{C}$ , je také jejím kořenem  $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{C}$ ?

**Dokažte** následující tvrzení (viz též přednáška).

1. Jestliže je  $n$  liché a  $a_k = a_{n-k}$  pro každé  $k = 0, 1, \dots, n$ , pak má tato rovnice kořen  $x_1 = -1$ .
2. Jestliže  $a_k = -a_{n-k}$  pro každé  $k = 0, 1, \dots, n$ , pak má tato rovnice kořen  $x_1 = 1$ .
3. V obou předchozích případech platí: je-li  $\alpha$  kořenem této rovnice, pak má také kořen  $\frac{1}{\alpha}$ .

**Pozorování**, která jsou zásadní (viz též přednáška):

1. Rovnici

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

vydělte kořenovým činitelem  $x + 1$ .

2. Rovnici

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0$$

vydělte kořenovým činitelem  $x - 1$ .

## 6.1 Reciproké rovnice – ukázkový příklad

Řešte v  $\mathbb{R}$  následující rovnici.

$$6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6 = 0$$

**Řešení:**

- Jedná se o reciprokou rovnici 1. druhu. Je lichého stupně, tj. jeden kořen je  $x_0 = -1$ . Vydělíme tedy kořenovým činitelem  $x + 1$ , dostaneme:

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$$

- Máme tedy reciprokou rovnici (opět 1. druhu, na tom se nic nemění) sudého stupně. Je-li stupeň  $2n$ , vydělíme rovnici  $x^n$ . Toto je klíčový trik vedoucí k řešení. Dostaneme:

$$6x^2 + \frac{6}{x^2} + 5x + \frac{5}{x} - 38 = 0.$$

- Zavedeme substituci  $z = x + \frac{1}{x}$ . Uvědomíme si, že  $z^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ , tj.  $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$ . Podobně příznivá situace nastane i v případě vyšších mocnin  $z$  (což bychom potřebovali, pokud bychom řešili reciprokou rovnici vyššího stupně).
- Rovnice přejde po substituci na tvar:

$$6(z^2 - 2) + 5z - 38 = 0.$$

- Tuto kvadratickou rovnici ( $6z^2 + 5z - 50 = 0$ ) snadno vyřešíme:  $z_1 = -\frac{10}{3}$ ,  $z_2 = \frac{5}{2}$ .
- Vrátime se k původní neznámé  $x$  (pomocí substitučního vztahu  $z = x + \frac{1}{x}$ ). První dva kořeny reciproké rovnice tedy získáme řešením rovnice  $-\frac{10}{3} = x + \frac{1}{x}$ , druhé dva kořeny z rovnice  $\frac{5}{2} = x + \frac{1}{x}$ . Jsou to vlastně kvadratické rovnice (po vynásobení  $x \neq 0$ ).
- Rovnice  $-\frac{10}{3} = x + \frac{1}{x}$ , tj.  $3x^2 + 10x + 3 = 0$  má kořeny  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -\frac{1}{3}$ , rovnice  $\frac{5}{2} = x + \frac{1}{x}$ , tj.  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  má kořeny  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = \frac{1}{2}$ .
- Všechny kořeny zadané reciproké rovnice tedy jsou:

$$-1, -3, -\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2}.$$

## 6.2 Reciproké rovnice – praxe

1. \* Určete typ následujících reciprokových rovnic a najděte všechny jejich kořeny v  $\mathbb{R}$ .

a)  $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0$  [1, 2,  $\frac{1}{2}$ , 3,  $\frac{1}{3}$ ]

b)  $10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 = 0$  [2,  $\frac{1}{2}$ , 5,  $\frac{1}{5}$ ]

c)  $8x^5 - 6x^4 - 83x^3 - 83x^2 - 6x + 8 = 0$  [-1, -2,  $-\frac{1}{2}$ , 4,  $\frac{1}{4}$ ]

d)  $6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6 = 0$

## 7 Tzv. Základní věta algebry

- **Pozor:** tzv. Základní věta algebry sice na první pohled vypadá, že se týká hlavně polynomů, ale v podstatě jde spíše o vlastnost pole komplexních čísel: *je algebraicky uzavřené*.
- materiál k tzv. Základní větě algebry: [zde](#)

### Počet kořenů polynomu

Jeden z důsledků TZVA je, že polynom stupně  $n \geq 1$  nad  $\mathbb{C}$  má v  $\mathbb{C}$  právě  $n$  kořenů (počítáno včetně násobnosti). Tohle však nad jinými poli neplatí. Na začátku semestru jsme na to měli příklady. Pro připomenutí:

Následující rovnice lze řešit zkusmo – dosazením všech hodnot z konečné množiny  $\mathbb{Z}_n$ .

1. \* Najděte v poli  $\mathbb{Z}_3$  všechna řešení rovnice  $x^2 + x + 2 = 0$ .
2. \* Najděte v okruhu  $\mathbb{Z}_6$  všechna řešení rovnice  $x^3 + 5x = 0$ .

## 8 Konstrukce $\mathbb{Z}$ – opakování

- materiál ke konstrukci  $(\mathbb{Z}, +)$  na základě  $(\mathbb{N}_0, +)$  je [zde](#) v pdf
- abstraktní podstata této konstrukce je

rozšíření komutativního monoidu se zákony krácení na grupu

- úplně stejnou abstraktní podstatu má zavedení  $\mathbb{Q}$ , přesněji  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ : opět se jedná o rozšíření komutativního monoidu se zákony krácení na grupu
- Připomeňte si, jaké struktury tvoří následující množiny s binárními operacemi:

$$\begin{aligned} &(\mathbb{N}_0, +) \quad \text{a} \quad (\mathbb{Z}, +) \\ &(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot) \quad \text{a} \quad (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \end{aligned}$$

- Připomeňme si:
  - Jedno celé číslo je jednou třídou ekvivalence, tedy nekonečnou množinou.
  - Původní číslo  $n \in \mathbb{N}_0$  je tedy třídou

$$T([n, 0]) = \{[a, b]; a, b \in \mathbb{N}, [a, b] \sim [n, 0]\}.$$

- Relace ekvivalence je definována pro všechna  $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$  takto:

$$[a, b] \sim [c, d] \quad \iff \quad a + d = c + b.$$

Pod uspořádanými dvojicemi si představujeme rozdíly, tj.  $[a, b]$  odpovídá rozdílu  $a - b$ . Uspořádané dvojice potřebujeme proto, že rozdíl je definován jako součet  $a + (-b)$ , přičítáme tedy opačný prvek, který v  $\mathbb{N}_0$  neexistuje k žádnému (nenulovému) přirozenému číslu.

## 9 Racionální čísla

1. Zkuste si rozmyslet, jak byste na úrovni druhého stupně ZŠ vyložili sčítání zlomků.
2. Zkuste si rozmyslet, jak byste na úrovni druhého stupně ZŠ vyložili násobení zlomků.
3. \* Dokažte, že násobení racionálních čísel je asociativní.
4. \* Dokažte, že zobrazení  $f: (\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Q}, +, \cdot)$  přiřazující celým číslům třídy ekvivalence dle následujícího předpisu je homomorfismus. Pro každé  $n \in \mathbb{Z}$  definujeme

$$f(n) = T([n, 1]).$$

Je tedy třeba dokázat, že pro každé  $k, n \in \mathbb{Z}$  platí:

$$f(n + k) = f(n) + f(k) \quad \text{a} \quad f(n \cdot k) = f(n) \cdot f(k).$$

Tento homomorfismus realizuje *vnoření*  $\mathbb{Z}$  do  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}$  je tedy rozšířením  $\mathbb{Z}$ .

5. \* Převeďte desetinné číslo 0,12 na zlomek.
6. \* Převeďte zlomek  $\frac{23}{30}$  na desetinné číslo.

## 10 Iracionální čísla

1. Zopakujte si důkazy tvrzení:
  - mohutnost množiny racionálních čísel je spočetná,
  - mohutnost množiny reálných čísel je nespočetná.
2. \* Uměli byste dokázat, že  $\log_5 2$  je iracionálním číslem?
3. \* Zkonstruuje dvěma různými způsoby úsečku délky  $\sqrt{3}$  cm (Eukleidova věta o výšce a „šnek“).
4. V Platónově dialogu Theaitétos (147d) se píše: *Tuhle Theodóros nám znázorňoval obrazci cosi o mocninách, o čtverci obsahujícím tři čtverečné stopy a o čtverci obsahujícím pět čtverečných stop, že svou stranou nejsou souměřitelné se čtvercem o jedné stopě, a tak probíral jednu mocninu po druhé až po čtverec o sedmnácti čtverečných stopách; při tomto se nevím proč zastavil.* Proč se Theodóros zastavil právě u odmocniny čísla 17?
5. \* Která z následujících čísel jsou transcendentní? Užijte Gelfandovu–Schneiderovu větu, ověřte splnění jejích předpokladů.

$$\sqrt{5} \quad 2^{\frac{1}{3}} \quad 2^{\sqrt{2}} \quad (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \quad 1^\pi \quad e^\pi \quad \pi^e$$

# 11 Reálná čísla

## Opakování

1. Připomeňte si zavedení reálných čísel pomocí desetinných rozvoju.
2. Připomeňte si větu o supremu a Cantorův princip uzavřených do sebe vložených intervalů. (Matematická analýza I)
3. Připomeňte si axiomy spojitosti v rámci axiomatizace planimetrie a porovnejte je s Cantorovým principem uzavřených do sebe vložených intervalů a s Archimédovým axiómem. (viz Základy planimetrie, kap. 13.6 na str. 229 ve skriptu)

## 11.1 Různé způsoby zavedení $\mathbb{R}$

Reálná čísla je možno zavést různými způsoby, např.:

1. pomocí desetinných rozvoju (je nutno vyloučit periodu 9 a ošetřit periodu 0),
2. zúplněním  $\mathbb{Q}$  (pomocí cauchyovských posloupností),
3. axiomaticky: zde v pdf (pouze pasáže označené svislým červeným pruhem),
4. pomocí Dedekindových řezů: zde v pdf,  
studovat pouze: Def. 1.7, V 1.10, Pozn. 1.11, V 1.12, Úml. 1.13, Def. 1.14, Def. 1.15, V 1.18 + Důsl., Def. 1.21, V 1.22 a 1.23.

Pro zájemce: Vývoj představ o reálných číslech

Porovnejte Dedekindovu teorii řezů s Dedekindovým axiómem. (viz Základy planimetrie, kap. 13.6 na str. 229 ve skriptu)

## 12 Komplexní čísla

1. \* V čem je problém?

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

2. \* Vypočtete hodnotu druhé odmocniny v  $\mathbb{R}$  a v  $\mathbb{C}$ :

$$\sqrt{9}_{\mathbb{R}} = \quad \sqrt{9}_{\mathbb{C}} =$$

3. Je třeba si jasně uvědomit, že psát  $\sqrt{-1}$  místo imaginární jednotky  $i$  je nesprávné a může to vést při neopatrném počítání k nesprávným výsledkům. Pro pořádek:

$$\sqrt{-1}_{\mathbb{R}} = \text{neexistuje} \quad \sqrt{-1}_{\mathbb{C}} = \{i, -i\}$$

4. \* Zdůvodněte, proč nestačí při zavádění komplexních čísel specifikovat, že se jedná o množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel. Co je třeba ještě dodat?

### 5. Definice oboru komplexních čísel:

Oborem komplexních čísel rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel

$$\mathbb{C} = \{[a, b]; a, b \in \mathbb{R}\},$$

na níž jsou definovány operace  $+$  a  $\cdot$  následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}: \quad [a, b] + [c, d] &= [a + c, b + d], \\ \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}: \quad [a, b] \cdot [c, d] &= [ac - bd, ad + bc]. \end{aligned}$$

6. Poznámky k definici oboru komplexních čísel:

- Sčítání probíhá po složkách (je tak mimo jiné kompatibilní se sčítáním reálných čísel, neboť  $\mathbb{R}$  je ztotožnitelné s podmnožinou  $\{[a, 0]; a \in \mathbb{R}\}$  komplexních čísel;  $\mathbb{C}$  je tak skutečně rozšířením  $\mathbb{R}$ ).
- Násobení je definováno tak, aby bylo distributivní vůči sčítání, asociativní a komutativní; navíc požadujeme, aby  $[0, 1] \cdot [0, 1] = [-1, 0]$ , což odpovídá známému  $i^2 = -1$ .
- *Pozor:* při definici komplexních čísel se nelze omezit jen na množinu, pouhé  $\mathbb{R}^2$  ještě nespecifikuje, že se jedná o komplexní čísla. Komplexní čísla se z  $\mathbb{R}^2$  stanou až tehdy, když na  $\mathbb{R}^2$  definujeme výše uvedeným způsobem operace  $+$  a  $\cdot$ .  
Ostatně v některých situacích  $\mathbb{R}^2$  považujeme za vektorový prostor, jindy za množinu všech bodů v rovině, jindy zase za množinu všech komplexních čísel. Záleží tedy nejen na množině samotné, ale na celé struktuře.

7. Připomeňme si, že je třeba rozlišovat:

- komplexní číslo (uspořádané dvojice reálných čísel s definovanými operacemi  $+$  a  $\cdot$ ),
- algebraický, goniometrický, exponenciální tvar komplexního čísla,
- obraz komplexního čísla v Gaussově rovině (komplexní číslo  $[a, b]$  interpretujeme geometricky jako bod v rovině o souřadnicích  $[a, b]$ , volíme kartézskou soustavu souřadnic).

## 8. Jak vznikne algebraický tvar komplexního čísla

- Uspořádaná dvojice  $[1, 0] \in \mathbb{C}$  reprezentuje reálné číslo 1, běžně tedy píšeme 1.
- Uspořádaná dvojice  $[0, 1] \in \mathbb{C}$  reprezentuje imaginární jednotku, běžně ji zapisujeme  $i$ .

Všimněme si, že tyto dva prvky, uvažujeme-li o nich jako o vektorech z  $\mathbb{R}^2$ , tvoří v  $\mathbb{R}^2$  bázi:  $\vec{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1)$ . Vektor  $(a, b)$  reprezentující komplexní číslo  $[a, b]$  tedy můžeme psát jako lineární kombinaci prvků báze, tj.  $(a, b) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ . Odtud plyne algebraický tvar  $a + bi$  komplexního čísla  $[a, b]$  (místo  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  píšeme 1 a místo  $\vec{e}_2 = (0, 1)$  píšeme  $i$ ).

komplexní číslo  $[a, b] \rightarrow$  vektor  $(a, b) \rightarrow a(1, 0) + b(0, 1) \rightarrow a \cdot 1 + b \cdot i \rightarrow a + bi$

## 9. Rozlišujeme:

- *imaginární jednotka* je název pro  $i$ ,
- *komplexní jednotka* je název pro každé komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je jedna. V goniometrickém tvaru lze goniometrické jednotky zapsat přehledně: jedná se o právě všechna komplexní čísla

$$\cos \alpha + i \sin \alpha,$$

kde  $\alpha \in \mathbb{R}$  (stačí  $\alpha \in (0, 2\pi)$ ). Obrazem množiny všech komplexních jednotek v Gaussově rovině je jednotková kružnice se středem v počátku.

## 10. \* Pomocí součtových vzorců odvoďte vztah pro součin dvou komplexních jednotek:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

Všimněme si, že odtud plyne geometrická interpretace násobení komplexní jednotkou:

vynásobit  $\cos \varphi + i \sin \varphi$  geometricky znamená otočit o  $\varphi$ .

## 11. \* Ze vztahu pro násobení komplexních jednotek v goniometrickém tvaru odvoďte součtové vzorce pro funkce sinus a kosinus.

## 12. Pozor: vždy je třeba jasně říci, z čeho vycházíme a co odvozujeme, abychom neměli definice či odvození kruhem. Standardní je odvodit součtové vzorce a z nich Moivreovu větu. Opačný postup lze používat jako pomůcku pro zapamatování či jako pomůcku pro rychlé odvození vztahů pro $\sin 3\alpha$ , $\cos 3\alpha$ , $\sin 4\alpha$ , $\cos 4\alpha$ , ...

## 13. \* Odvoďte vzorec pro $\sin 3\alpha$ a $\cos 3\alpha$ tak, že porovnáte výsledky umocnění

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 =$$

získané pomocí Moiverovy věty a binomické věty.

## 14. \* Dokažte Moivreovu větu tak, jak ji budete dokazovat svým studentům. Zvažte různé možnosti.

V: Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a pro každé  $\varphi \in \mathbb{R}$  platí:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

## 12.1 Proč vyučovat komplexní čísla?

Pozorovali jsme poměrně hodně důvodů:

- žáci mohou zažít *vyšší míru jednotnosti* v matematice (např. kvadratická rovnice má vždy kořen, lze dojít až k TZVA),
- výrazným prvkem je *opakování předchozí látky* (aplikace více oblastí probraných dříve),
  - opakování goniometrie (zejména součtové vzorce), myšlenka polárních souřadnic,
  - analytická geometrie (kružnice, elipsa, skalární součin, obsah rovnoběžníku),
  - rovnice (kvadratická, binomická),
  - planimetrie (Pýthagorova věta) a geometrická zobrazení v rovině (čísla komplexně sdružená a osová souměrnost),
  - opakování binomické věty (a porovnání s Moivreovou větou), důkaz indukci,
  - odmocnina (co to vlastně je, rozlišování odmocnin v  $\mathbb{R}$  a v  $\mathbb{C}$ ),
  - aplikace usměrňování zlomků (dělení komplexních čísel),
- návaznosti: je mnohem lepší, když má VŠ student s komplexními čísly již zkušenost ze SŠ, tu a tam se totiž prostě najednou potřebují...
  - nutnost pro elektrotechniku (střední průmyslové školy, fyzika, ČVUT, ...),
  - případné kurzy komplexní analýzy (opět je dobré mít předchozí zkušenosti, i když se zde většinou základní poznatky o komplexních číslech opakují)
  - budování číselných oborů ( $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{O} \rightarrow \dots$ )
  - základní věta algebry
  - řešení kubické rovnice (a historie matematiky – motivace k zavedení komplexních čísel)
  - klasifikace kuželoseček (opět jednotnost v matematice)
  - elegantní popisy některých geometrických zobrazení
  - implementace rotací ve 3D
  - Minkowského prostoročas a speciální teorie relativity, Lobačevského geometrie
  - hlubší vztahy mezi elementárními funkcemi
  - Fourierovy řady – elegantní zápisy
  - ...

## 12.2 Geometrie komplexních čísel

### 12.2.1 Součin komplexních čísel a součiny vektorů

Pozorujme klíčový vztah ( $u = u_1 + u_2i$ , tedy  $\bar{u} = u_1 - u_2i$ ,  $v = v_1 + v_2i$ ):

$$\boxed{\bar{u}v = (u_1v_1 + u_2v_2) + i(u_1v_2 - u_2v_1).}$$

Pokud bychom uvažovali vektory  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ , tak by

$$\operatorname{Re}(\bar{u}v) = \vec{u} \cdot \vec{v}, \quad \operatorname{Im}(\bar{u}v) = \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Vidíme, že reálnou část tvoří přímo skalární součin vektorů  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , což je základ metrické geometrie (vzdálenosti, odchylky), a imaginární část je tvořena vnějším součinem (obsah rovnoběžníku).

Toto pozorování vedlo ke snaze najít rozšíření komplexních čísel na trojsložková hyperkomplexní čísla, která by byla možno použít k pěstování stereometrie.

### 12.2.2 Popis geometrických útvarů pomocí komplexních čísel

1. kružnice:  $|z - z_0| = r$
2. kruh:  $|z - z_0| \leq r$
3. elipsa:  $|z - f_1| + |z - f_2| = 2a$
4. vnitřní oblast elipsy:  $|z - f_1| + |z - f_2| < 2a$
5. Analytickou geometrii v rovině lze přeformulovat na geometrii v komplexní souřadnici: bod  $[x, y]$  lze reprezentovat komplexním číslem  $z = x + iy$ . Potom  $\bar{z} = x - iy$ , odkud sečtením, resp. odečtením těchto vztahů dostaneme:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Například **obecnou rovnici přímky**

$$ax + by + c = 0$$

pak můžeme přepsat ve tvaru  $a\frac{z+\bar{z}}{2} + b\frac{z-\bar{z}}{2i} + c = 0$ , což po úpravě přejde na tvar:

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + c = 0,$$

kde  $\alpha = \frac{1}{2}(a + bi)$ .

6. \* přímka procházející body, které jsou obrazy komplexních čísel  $a, b \in \mathbb{C}$ :

$$\det \begin{pmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ukažte, že se skutečně jedná o specifikovanou přímku.

7. kružnice procházející body, které jsou obrazy komplexních čísel  $a, b, c \in \mathbb{C}$ :

$$\det \begin{pmatrix} z\bar{z} & \bar{z} & z & 1 \\ a\bar{a} & \bar{a} & a & 1 \\ b\bar{b} & \bar{b} & b & 1 \\ c\bar{c} & \bar{c} & c & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ukažte, že se skutečně jedná o specifikovanou kružnici.

8. \* Načrtněte v Gaussově rovině množinu obrazů všech komplexních čísel  $z \in \mathbb{C}$ , která splňují následující podmínku.
  - a)  $|z - i| = 4$ ,    b)  $|z - i| \leq 4$ ,    c)  $1 \leq |z - i| \leq 4$ ,    d)  $|z - i| = |z + i|$ ,    e)  $|z - i| + |z + i| = 4$ .

### 12.2.3 Geometrie trojúhelníku pomocí komplexních čísel

1. Některé partie geometrie trojúhelníku lze budovat pomocí tří navzájem různých komplexních čísel

$$\omega_1 = \cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1,$$

$$\omega_2 = \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2,$$

$$\omega_3 = \cos \varphi_3 + i \sin \varphi_3,$$

jejichž obrazy jsou vrcholy zadaného trojúhelníku. Všimněme si, že jeho opsaná kružnice je kružnicí jednotkovou.

2. Definujme dále užitečné výrazy

$$s_1 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \quad s_2 = \omega_1 \omega_2 + \omega_2 \omega_3 + \omega_3 \omega_1, \quad s_3 = \omega_1 \omega_2 \omega_3.$$

Všimněme si, že se jedná o výrazy z Vietových vět.

3. \* Dokažte, že trojúhelník s vrcholy, které jsou obrazem komplexních čísel  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , je rovnostranný právě tehdy, když

$$s_1 = 0.$$

4. \* Dokažte, že trojúhelník s vrcholy, které jsou obrazem komplexních čísel  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , je pravoúhlý právě tehdy, když

$$s_1 s_2 = s_3.$$

[Z Thalétovy věty plyne, že právě dva vrcholy leží na průměru jednotkové kružnice, tj. BÚNO:  $\omega_2 = -\omega_1$ .]

## 12.3 Čísla dvojná, duální, komplexní

Připomeňme si motivační výpočet k zavedení operace násobení na množině komplexních čísel (vlastně na množině uspořádaných dvojic reálných čísel), v němž se místo s uspořádanými dvojicemi pracuje s lineárními polynomy (tím je zaručena asociativita, komutativita, distributivita, ...). Imaginární jednotku značme prozatím obecně  $\omega$ :

$$(a + b\omega) \cdot (c + d\omega) = ac + ad\omega + bc\omega + bd\omega^2 = (ac + bd\omega^2) + (ad + bc)\omega.$$

Aby byl tento součin opět pouze lineárním polynomem (aby byla splněna uzavřenost vzhledem k násobení), je třeba určit, čemu má být rovno  $\omega^2$ .

**Věta:** Existují právě tři neizomorfní reálné algebry s jednotkovým prvkem, jež mají dimenzi 2: algebra komplexních čísel, algebra duálních čísel, algebra dvojných čísel. Zvolíme-li:

- $\omega^2 = -1$ , dostaneme algebra komplexních čísel (je to algebra s dělením),
- $\omega^2 = 0$ , dostaneme algebra duálních čísel,
- $\omega^2 = 1$ , dostaneme algebra dvojných čísel.

Jediným oborem s dělením jsou komplexní čísla, která tvoří společně se sčítáním a násobením *pole* (tj. komutativní těleso).

Ve zbylých dvou algebrách nelze obecně dělit, neboť v nich existují netriviální dělitelé nuly. V těchto algebrách tedy k některým prvkům prvek inverzní existuje, k některým však nikoli.

Místo obecného  $\omega$  značíme imaginární jednotky v jednotlivých oborech takto:

- $i$  u komplexních čísel, tj.  $i^2 = -1$ ,
- $\varepsilon$  u duálních čísel, tj.  $\varepsilon^2 = 0$ , ( $\varepsilon \neq 0$ )
- $e$  u dvojných čísel, tj.  $e^2 = 1$ . ( $e \neq \pm 1$ )

Vše shrňme v následující tabulce.

název	podmínka	typ komplexních čísel	tvar	netriviální dělitelé nuly	lze dělit
komplexní čísla	$i^2 = -1$	eliptická	$a + bi$	neexistují	ano
duální čísla	$\varepsilon^2 = 0$	parabolická	$a + b\varepsilon$	$b\varepsilon \cdot b\varepsilon = 0$	ne
dvojná čísla	$e^2 = 1$	hyperbolická	$a + be$	$(a + ae) \cdot (a - ae) = 0$	ne

### 12.3.1 Množiny všech jednotek

Obecně je druhá mocnina modulu (používáme místo termínu *absolutní hodnota* obvyklého u reálných a komplexních čísel) definována jako součin čísla a čísla sdruženého (konjugovaného):

$$\|x + y\omega\|^2 := (x + y\omega) \cdot (x - y\omega) = x^2 - y^2\omega^2.$$

Jelikož tento výraz nemusí být nezáporný (u dvojných čísel), budeme raději pracovat přímo s touto druhou mocninou místo samotného modulu.

Podívejme se tedy, jak vypadají množiny všech jednotek, tj. čísel, jejichž druhá mocnina modulu je rovna jedné:

$$\|x + y\omega\|^2 = 1 \iff x^2 - y^2\omega^2 = 1.$$

Konkrétně tedy:

- komplexní čísla:  $x^2 - y^2 i^2 = 1$ , tj.  $x^2 + y^2 = 1$  (proto eliptická čísla)
- duální čísla:  $x^2 - y^2 \varepsilon^2 = 1$ , tj.  $x^2 = 1$  ... soustava dvou rovnoběžek ( $x = 1$  a  $x = -1$ )
- dvojná čísla:  $x^2 - y^2 e^2 = 1$ , tj.  $x^2 - y^2 = 1$  (proto hyperbolická čísla)

Duální čísla se někdy nazývají parabolická podle toho, že parabola je také jakýmsi mezistupněm mezi elipsou a hyperbolou.

Pro dvojná čísla se v angličtině používají (kromě *double numbers*) různé termíny: *split-complex numbers*, *hyperbolic numbers*, *perplex numbers*. Původ prvního názvu (*split* – rozložit, rozdělit) je při pohledu na výraz  $x^2 - y^2 e^2 = x^2 - y^2$  zřejmý: lze jej v  $\mathbb{R}$  snadno rozložit na součin:  $(x + y) \cdot (x - y)$ . Název *perplex numbers* (*perplex* – zmást, poplést) vychází z toho, že  $e^2 = 1$ , čemuž vyhovují dvě reálná čísla, přesto však  $e$  není reálným číslem, což může působit matoucím dojmem.

### 12.3.2 Kterými čísly $a + b\omega$ lze dělit?

Právě takovými čísly  $a + b\omega$ , pro něž je  $\|a + b\omega\|^2 \neq 0$  (modul jsme opět nahradili jeho druhou mocninou), tj.

$$a^2 - b^2\omega^2 \neq 0.$$

Pro jednotlivé typy čísel teď snadno zjistíme, kterými lze dělit, neboli ke kterým existuje prvek inverzní:

- komplexní čísla:  $a^2 + b^2 \neq 0 \iff a \neq 0 \wedge b \neq 0$  (tj. ke každému nenulovému prvku existuje prvek inverzní,  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  je tedy pole),
- duální čísla:  $a^2 \neq 0 \iff a \neq 0$  (tj. ke každému prvku, který není ve tvaru  $b\omega$ , existuje prvek inverzní),
- dvojná čísla:  $a^2 - b^2 \neq 0 \iff a \neq \pm b$  (tj. ke každému prvku, který není tvaru  $a \pm ae$ , existuje prvek inverzní).

### 12.3.3 Aplikace duálních čísel

Duální čísla mají několik významných aplikací. Jednou z nich je možnost pohodlného výpočtu derivace polynomu. Co se stane, dosadíme-li do polynomu s reálnými koeficienty

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$$

duální číslo  $a + b\varepsilon$ ?

**Pozorování 1:** Jelikož je  $\varepsilon^2 = 0$ , proto  $\varepsilon^3 = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon^4 = 0$ ,  $\varepsilon^5 = 0$ , ...

**Pozorování 2:**  $(a + b\varepsilon)^2 = a^2 + 2ab\varepsilon$  (zbylý člen  $b^2\varepsilon^2$  binomického rozvoje je nulový)

$(a + b\varepsilon)^3 = a^3 + 3a^2b\varepsilon$  (zbylé členy binomického rozvoje jsou nulové)

$(a + b\varepsilon)^4 = a^4 + 4a^3b\varepsilon$  (zbylé členy binomického rozvoje jsou nulové)

$(a + b\varepsilon)^k = a^k + ka^{k-1}b\varepsilon$  (zbylé členy binomického rozvoje jsou nulové)

Dosazením duálního čísla  $a + b\varepsilon$  do polynomu  $P$  tedy dostaneme:

$$\begin{aligned} P(a + b\varepsilon) &= c_0 + c_1(a + b\varepsilon) + c_2(a + b\varepsilon)^2 + c_3(a + b\varepsilon)^3 + \dots + c_n(a + b\varepsilon)^n \\ &= c_0 + c_1a + c_2a^2 + c_3a^3 + \dots + c_na^n + c_1b\varepsilon + 2c_2ab\varepsilon + 3c_3a^2b\varepsilon + \dots + nc_na^{n-1}b\varepsilon \\ &= P(a) + P'(a)b\varepsilon. \end{aligned}$$

Vidíme, že reálná část je rovna přímo hodnotě polynomu  $P(a)$ , druhá složka obsahuje derivaci polynomu  $P$  v bodě  $a$ .

## 13 Hamiltonovy kvaterniony

### 13.1 Základní shrnutí

W. R. Hamilton objevil rozšíření oboru komplexních čísel na (nekomutativní) těleso. Jeho prvky jsou tvaru

$$a + bi + cj + dk$$

a nazývají se kvaterniony. Počítá se s nimi jako s algebraickými výrazy s proměnnými  $i, j, k$ , ovšem s výjimkou komutativity násobení. Tím je zajištěna asociativita sčítání i násobení, distributivita a komutativita sčítání.

Sčítání tedy probíhá „po složkách“, násobení kvaternionů je nekomutativní a je založeno na vztazích

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.}$$

### 13.2 Komplexní čísla a geometrie v rovině

Komplexní čísla jsou podle definice uspořádanými dvojicemi reálných čísel. Budeme-li se na ně dívat jako na souřadnice bodů v rovině, zjistíme, že se výborně hodí k popisu geometrických vztahů v rovině.

Skvělou ukázkou je součin komplexních čísel  $\bar{u}v$ , tj.

$$\bar{u}v = [u_1v_1 + u_2v_2, u_1v_2 - u_2v_1] = \left[ \vec{u} \cdot \vec{v}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right],$$

který obsahuje

- v první složce skalární součin vektorů  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  a  $\vec{v} = (v_1, v_2)$
- a ve druhé složce jejich vnější součin (tj. determinant, geometricky „orientovaný“ obsah).

### 13.3 Hyperkomplexní čísla a geometrie v prostoru?

Nabízí se tak myšlenka, zda by nebylo možné rozšířit obor komplexních čísel na uspořádané trojice reálných čísel. Získali bychom tak *hyperkomplexní čísla*, která by se pak použila k popisu geometrie v trojrozměrném prostoru.

### 13.4 Co bychom si tedy přáli

- Hyperkomplexní čísla by měla být *rozšířením* pole komplexních čísel  $\mathbb{C} = \{[a, b]; a, b \in \mathbb{R}\}$  na pole (či aspoň *na těleso*) s nosičem  $\{[a, b, c]; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ . Mělo by se tedy jednat o uspořádané trojice reálných čísel. Ty můžeme psát jako lineární kombinace bázových vektorů, které v oboru hyperkomplexních čísel odpovídají základním prvkům  $[1, 0, 0]$ ,  $[0, 1, 0]$ ,  $[0, 0, 1]$ . Ty si však pro lepší přehlednost nahradíme:  $1 \sim [1, 0, 0]$ ,  $i \sim [0, 1, 0]$ ,  $j \sim [0, 0, 1]$ . Hledaná hyperkomplexní čísla  $[a, b, c]$  tedy budeme (místo lineárních kombinací bázových vektorů) psát ve tvaru

$$a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j.$$

- *Sčítání* by opět probíhalo *po složkách*.

- *Násobení* musí být distributivní vůči sčítání, mělo by být asociativní, navíc požadujeme, aby  $[0, 1, 0] \cdot [0, 1, 0] = [-1, 0, 0]$ , což odpovídá známému  $i^2 = -1$ , a  $[0, 0, 1] \cdot [0, 0, 1] = [-1, 0, 0]$ , což odpovídá  $j^2 = -1$ .

Navíc předpokládáme, že  $ij \neq ji$ , abychom nevytvořili opět jen  $\mathbb{C}$  (z podmínky  $ij \neq ji$  už plyne, že  $ji = -ij$ ). Nelze tedy očekávat, že násobení trojic bude komutativní. Abychom nevytvořili pouze  $\mathbb{C}$ , nestačí předpokládat, že  $i \neq j$ , neboť této podmínce by vyhovovala volba  $j = -i$ .

- Pokud by se nám podařilo najít definici násobení, tak bychom pozorovali, zda obsahuje v některých svých složkách výrazy důležité pro třírozměrnou geometrii (skalární součin, ...).

### 13.5 Neexistence hyperkomplexních čísel s právě dvěma imaginárními jednotkami

Pokud bychom tedy hledali předpis pro násobení třísložkových hyperkomplexních čísel, museli bychom předně najít součiny základních („bázových“) prvků:  $1, i, j$ . Z nich bychom pak „dopočítali“ součiny všech ostatních hyperkomplexních čísel (pomocí předpokládané asociativity a distributivity násobení a asociativity a komutativity sčítání).

Pro začátek se tedy pokusme vyplnit tabulku násobení:

$\cdot$	1	i	j
1	1	i	j
i	i	-1	
j	j		-1

Není však jasné, čemu má být roven součin  $i \cdot j$  ( $j \cdot i$  by bylo rovno  $-i \cdot j$ ).

**Problém:** Pokusy vypočítat  $i \cdot j$  a  $-j$  vedou ke sporu.

Naznačme aspoň stručně, proč vedou pokusy o výpočet  $ij$  a  $-j$  ke sporu.

- Pokusme se najít chybějící součin  $ij$ . O něm však víme jen to, že je třísložkovým hyperkomplexním číslem, lze jej tedy zapsat ve tvaru

$$ij = r_1 + r_2i + r_3j,$$

kde  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$  jsou nějaké reálné koeficienty.

- Prozkoumejme také „nový“ (oproti  $\mathbb{C}$ ) prvek  $j$ . V tělese by k němu měl existovat prvek opačný i inverzní; násobení i sčítání by mělo být asociativní, násobení by také mělo být vůči sčítání distributivní.

Vypočtěme tedy prvek opačný k jednotce  $j$  pomocí následujících úprav.

$$\begin{aligned} -j &= -(1j) = (-1)j = (ii)j = i(ij) = i(r_1 + r_2i + r_3j) = r_1i + r_2i^2 + r_3ij = \\ &= r_1i - r_2 + r_3ij = r_1i - r_2 + r_3(r_1 + r_2i + r_3j) = (r_3r_1 - r_2) + (r_1 + r_3r_2)i + r_3^2j. \end{aligned}$$

Porovnáním s  $-j = 0 \cdot 1 + 0i + (-1)j$  dostáváme

$$r_3r_1 - r_2 = 0, \quad r_1 + r_3r_2 = 0, \quad r_3^2 = -1.$$

Poslední rovnost však není splněna pro žádné  $r_3 \in \mathbb{R}$ , žádné takové reálné  $r_3$  neexistuje. Dostáváme se tak ke sporu. Vyjádření prvku opačného k imaginární jednotce  $j$  a následné výpočty s použitím asociativity a distributivity totiž vedly ke zjištění, že opačný prvek  $k$   $j$  neexistuje...

**Špatná zpráva:** Pole komplexních čísel nelze rozšířit pouze o jednu další imaginární jednotku tak, abychom dostali aspoň těleso. Ještě lépe o tom hovoří následující věta.

**Věta:** Každá reálná algebra s jednotkovým prvkem, která má dimenzi 3, má netriviální dělitele nuly. *(nelze tedy očekávat 3D algebru s dělením)*

## 13.6 Objev tělesa kvaternionů

Jak Hamilton objevil kvaterniony? Hledal právě hodnotu součinu  $ij$ . Nakonec ji položil rovnu nějakému  $k$ :

$$ij = k,$$

o němž předpokládal, že  $k^2 = -1$ ; uvědomil si tedy, že násobení uspořádaných trojic reálných čísel sice korektně definovat nelze, potíže však zmizí, přidáme-li ještě jednu imaginární jednotku  $k$ . Tak došlo k objevu kvaternionů.

Hamilton tak ukázal, že pole komplexních čísel lze rozšířit o další dvě imaginární jednotky, čímž dostaneme nekomutativní těleso *kvaternionů*. To tedy obsahuje celkem tři navzájem různé imaginární jednotky, takže jeho prvky jsou reprezentovány uspořádanými čtveřicemi reálných čísel (odtud název kvaterniony). Násobení kvaternionů už bohužel není komutativní ( $ji = -ij$ , ...).



Pamětní deska na mostě v Dublinu.

Here as he walked by | on the 16th of October 1843 | Sir William Rowan Hamilton | in a flash of genius discovered | the fundamental formula for | quaternion multiplication |

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

& cut it on a stone of this bridge.

## 13.7 Definice kvaternionů

Nekomutativní těleso kvaternionů budeme značit  $\mathbb{H}$  (podle Hamiltona). Formálně jeho prvky můžeme považovat za prvky vektorového prostoru  $\mathbb{R}^4$  s bází  $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , přičemž

$$\vec{e}_0 = (1, 0, 0, 0), \quad \vec{e}_1 = (0, 1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 0, 1, 0), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 0, 1).$$

Místo  $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  však budeme psát obvyklé  $1, i, j, k$ .

Sčítání prvků vektorového prostoru  $\mathbb{R}^4$  provádíme po složkách. Násobení definujeme pouze na prvcích báze, na celou množinu  $\mathbb{H}$  jej rozšíříme pomocí distributivity. Definiční vztahy pro násobení jsou následující:

- $\vec{e}_0 \vec{e}_n = \vec{e}_n \vec{e}_0 = \vec{e}_n$  pro  $n = 0, 1, 2, 3$  ( $\vec{e}_0$  je jednotkovým prvkem),
- $\vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = \vec{e}_3^2 = -\vec{e}_0$  (imaginární jednotky),
- $\vec{e}_1 \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \vec{e}_1 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \vec{e}_3 = -\vec{e}_3 \vec{e}_2 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \vec{e}_3 = \vec{e}_2$  (násobení imag. jednotek).

Pro pohodlí si tyto vztahy ještě můžeme přepsat pomocí obvyklých:  $1, i, j, k$ :

- $1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad 1 \cdot j = j \cdot 1 = j, \quad 1 \cdot k = k \cdot 1 = k,$
- $i^2 = j^2 = k^2 = -1,$
- $ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$

1. \* Pokuste se z uvedených definičních vlastností násobení kvaternionů najít inverzní prvek k prvku:

a)  $i$ ,      b)  $j$ ,      c)  $k$ ,      d)  $ij$ .

## 13.8 Byl objev kvaternionů zklamáním?

Několik poznámek úvodem:

- Hamilton hledal hyperkomplexní čísla o třech složkách, aby pomocí nich mohl pěstovat třírozměrnou geometrii, zjistil však, že neexistují (s takovými vlastnostmi, které si představoval).
- Hamilton místo toho objevil kvaterniony, zdánlivě vhodné ke zkoumání čtyřrozměrné geometrie. To vypadá mnohem méně užitečně...
- Sám Hamilton byl svým objevem kvaternionů nadšen, napsal o nich dvě monografie.
- Hamilton si všiml, že kvaterniony, i když se jedná o uspořádané čtveřice reálných čísel, lze výborně použít k něčemu, co tehdy nebylo rozvinuté: pěstování vektorového počtu ve 3D. Sen o popisu geometrických vztahů pomocí hyperkomplexních čísel se tedy aspoň částečně splnil.

Inspirujme se komplexními čísly a vynásobme následující dva kvaterniony

$$u = (u_0, u_1, u_2, u_3) = u_0 + u_1i + u_2j + u_3k, \quad v = (v_0, v_1, v_2, v_3) = v_0 + v_1i + v_2j + v_3k.$$

U prvního vezmeme rovnou kvaternion sdružený:  $\bar{u} = u_0 - u_1i - u_2j - u_3k$  (jako u komplexních čísel). Tedy:

$$\bar{u}v = (u_0 - u_1i - u_2j - u_3k)(v_0 + v_1i + v_2j + v_3k) = \dots$$

1. \* Vypočtěte zadaný součin  $\bar{u}v$ . Pozor na nekomutativitu násobení, využívejte vztahů z definice kvaternionů ( $ij = -ji = k, \dots$ ).

2. Hamilton rozdělil kvaternion  $a + bi + cj + dk$  na skalární část, tj.  $a$ , a na vektorovou část, tj.  $bi + cj + dk$ .
3. \* Ve vypočteném součinu  $\bar{u}v$  zvolte  $u_0 = 0$  a  $v_0 = 0$ , čímž dostanete součin vektorových částí. Všimněte si, že výsledný součin vektorových částí, tj.  $(u_1, u_2, u_3)$  a  $(v_1, v_2, v_3)$ , stručně budeme psát  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ , je opět kvaternion, jehož:
  - skalární část je rovna skalárnímu součinu příslušných vektorů  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,
  - vektorová část je rovna vektorovému součinu příslušných vektorů  $\vec{u} \times \vec{v}$ .
4. \* Všimněme si, že se v součinu  $\bar{u}v$  objevuje i násobení vektoru skalárem. Příslušné části zvýrazněte.
5. \* Pro úplnost dodejme, že při sčítání kvaternionů  $u + v$  se objevuje standardní součet reálných čísel ve skalární části, ve vektorové části pak obvyklý součet vektorů (tj. po složkách). Proveďte příslušný výpočet  $u + v$  a jednotlivé komponenty zvýrazněte.

### 13.9 Oktoniony, „hexadekaniony“

Omezení při hledání případných dalších rozšíření pole komplexních čísel ukazují, že s rostoucí dimenzí rozšíření se postupně zhoršují vlastnosti výsledné struktury.

- **Hermann Hankel (1867):** Reálná komutativní asociativní algebra s dělením, která obsahuje komplexní čísla jako vlastní podalgebru, neexistuje. *(při rozšiřování komplexních čísel už nelze očekávat komutativitu násobení)*
- **Georg Frobenius (1878):** Reálné asociativní algebry s dělením jsou pouze tři: reálná čísla, komplexní čísla a kvaterniony. *(při rozšiřování kvaternionů už nelze očekávat asociativitu násobení)*
- Kolik můžeme mít imaginárních jednotek?  
**Heinz Hopf (1940):** Dimenze reálné algebry s dělením musí být mocninou dvojky. Můžeme mít tedy právě  $2^n - 1$  imaginárních jednotek ( $n = 0, 1, 2, 3$ ).

Z následujícího přehledu hyperkomplexních čísel je patrné, že se zvyšujícím se počtem imaginárních jednotek se postupně ztrácejí důležité vlastnosti. Násobení oktonionů už není ani asociativní, hexadekaniony dokonce obsahují netriviální dělitele nuly, takže už nejsou algebrou s dělením.

reálná čísla	násobení: K, A;	neex. netrív. dělitelé nuly;	lineární uspořádání
komplexní čísla	násobení: K, A;	neex. netrív. dělitelé nuly	
kvaterniony	násobení: A;	neex. netrív. dělitelé nuly	
oktoniony		neex. netrív. dělitelé nuly	
hexadekaniony	— (existují netriviální dělitelé nuly)		

Pozorujeme tedy (a lze dokázat):

**Zobecněná Frobeniova věta:** Reálné alternativní algebry **s dělením** konečné dimenze existují právě čtyři:

*reálná čísla, komplexní čísla, kvaterniony a oktoniony.*

## Vlastnosti oktonionů:

- Násobení oktonionů už sice není ani asociativní, ale je alespoň *alternativní*, tj. pro každé dva oktoniony  $a, b$  platí:

$$(aa)b = a(ab), \quad (ab)a = a(ba), \quad (ab)b = a(bb).$$

- Ke každému nenulovému oktonionu existuje oktonion inverzní.

K objevu oktonionů se píše v článku J. Bečváře, 150 let od objevu kvaternionů:

*O svém objevu kvaternionů napsal Hamilton již 17. 10. 1843 svému příteli J. T. Gravesovi. Ten, inspirován Hamiltonem, našel v prosinci 1843 systém hyperkomplexních čísel s osmi základními jednotkami. Jeho objev byl však zveřejněn až roku 1848.*

*Mezitím sestrojil nezávisle na Gravesovi stejný obor hyperkomplexních čísel Arthur Cayley, který svou práci publikoval již roku 1845. Termín oktávy zavedl Hamilton; dnes se užívá též termínů Cayleyova čísla nebo Gravesova-Cayleyova čísla.*

## 14 Řetězové zlomky

### 14.1 Řetězové zlomky – opakování

- \* Pomocí Eukleidova algoritmu najděte největší společný dělitel čísel 323 a 266.
- \* Rozviňte do řetězového zlomku číslo  $\frac{323}{266}$ .
- \* Najděte racionální číslo, jehož řetězový zlomek je  $[1; 1, 1, 1]$ .
- Jednoduchý algoritmus výpočtu prvních 10 článků řetězového zlomku daného čísla  $x$ . (Implementace je v jazyce Python 3.)

*# Výpočet řetězového zlomku  $q$  čísla  $x$*

```
import math
```

```
x = math.pi
```

```
q = []
```

```
for k in range(10):
```

```
    q.append( int(x) )    # přidat celou část do seznamu q
```

```
    x = 1 / (x - int(x)) # výpočet dalšího článku: odečíst celou část, převrácená hodnota
```

```
print(q)    # tisk řetězového zlomku
```

- \* S použitím kalkulátoru vypočtete prvních deset článků řetězového zlomku čísla  $\log_2 \frac{3}{2}$  a příslušné konvergenty.
- \* Uvažujme racionální číslo  $q$ , jehož hodnota je rovna řetězovému zlomku  $q = [3; 4, 5, 6]$ . Najděte řetězový zlomek čísla  $\frac{1}{q}$ .
- Rozviňte do řetězového zlomku  $\sqrt{2}$ . Pozorujme, že k tomu nepotřebujeme kalkulátor.
- \* Bez použití kalkulátoru rozviňte do řetězového zlomku čísla:

$$\sqrt{5} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{6} \quad \sqrt{n^2 + 1} \quad \sqrt{n^2 + 2}$$

- Předchozí úlohy dávají tušit, že řetězové zlomky druhých odmocnin jsou periodické. Skutečně, obecně platí, že periodické řetězové zlomky mají právě tzv. kvadratické iracionality, tedy všechny výrazy tvaru

$$\frac{P + \sqrt{D}}{Q}.$$

Předpokládáme, že  $P, Q, D$  jsou celá čísla,  $D > 0$  a není čtvercem (druhou mocninou přirozeného čísla).

- Z předchozího bodu dostáváme:

řetězový zlomek	čísla
konečný	racionální čísla
periodický	kvadratické iracionality
nekonečný neperiodický	ostatní iracionální čísla

## Teoretické opakování

### 11. Definujme:

konečný řetězový zlomek (délky  $n$ ) – rozumíme jím číslo ve tvaru

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_n}}}}},$$

přičemž předpokládáme:  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $q_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{N}$ .

Konečný řetězový zlomek délky  $n$  obvykle píšeme v stručnějším tvaru  $[q_0; q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]$ .

$k$ -tý konvergent řetězového zlomku  $[q_0; q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]$  – zlomek, který je roven  $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_k]$ , předpokládáme:  $k \leq n$ . Tedy:

$$\frac{A_0}{B_0} = [q_0] = q_0 = \frac{q_0}{1}, \quad \frac{A_1}{B_1} = [q_0; q_1] = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_1 q_0 + 1}{q_1},$$

$$\frac{A_2}{B_2} = [q_0; q_1, q_2] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \dots$$

12. \* Jak lze efektivně počítat konvergenty příslušné jednotlivým článkům řetězového zlomku? Odvoďte vztah pro výpočet čitatele konvergentů.
13. \* Ukažte, že posloupnost konvergentů  $\frac{A_{2n}}{B_{2n}}$  tvoří rostoucí posloupnost.
14. \* Vypočtěte všechny konvergenty příslušné řetězovému zlomku  $[1, 2, 2, 1, 3, 1]$  a vypočtěte rozdíl všech bezprostředně sousedních konvergentů (tj.  $\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0}$ ,  $\frac{A_2}{B_2} - \frac{A_1}{B_1}$ ,  $\frac{A_3}{B_3} - \frac{A_2}{B_2}$ , ...).  
Pozorujte: jak se mění absolutní hodnoty těchto rozdílů a jak se mění znaménka těchto rozdílů?
15. Vypočtěte obecně rozdíl  $n$ -tého a  $(n+1)$ -ního konvergentu. Všimněte si čitatele tohoto rozdílu a vysvětlete, proč je tak důležitý.
16. \* Dodatek – zajímavé pozorování:
  - a) Vypočtěte následující součin matic (první matice má vyměněné řádky, aby se pak ve sloupcích objevovaly čitatele a jmenovatele konvergentů, nikoli jmenovatele a čitatele).

$$\begin{pmatrix} 1 & q_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_4 \end{pmatrix}$$

b) Vypočtěte všechny konvergenty řetězového zlomku  $[1; 2, 3, 4]$ .

c) Vypočtěte následující součin matic:  $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ .

## 14.2 Lineární diofantické rovnice – věta o existenci řešení

Na základě tří pozorování:

- Bezoutova věta garantuje existenci celočíselných řešení  $x, y$  rovnice  $ax + by = \text{NSD}(a, b)$ ,
- $43x + 30y = 1 \implies 43 \cdot 3x + 30 \cdot 3y = 3$ , (existence řešení pro lib. pravou stranu v případě nesoudělných  $a, b$ )
- $12x + 15y = 7$  nemá řešení, protože  $3 \cdot (4x + 5y) \neq 7$ ,

odvodte základní větu o existenci řešení lineární diofantické rovnice:

**Věta:** Lineární diofantická rovnice  $ax + by = c$ , kde  $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , má řešení  $x, y \in \mathbb{Z}$  právě tehdy, když

$$\text{NSD}(a, b) \mid c.$$

Je-li jedno řešení této rovnice  $x_0, y_0$ , pak všechna řešení jsou ve tvaru  $x = x_0 + bn, y = y_0 - an, n \in \mathbb{Z}$ .

## 14.3 Lineární diofantické rovnice – řešení

1. \* Najděte všechna řešení následujících lineárních diofantických rovnic.

$$\begin{array}{llll} 1) \ 89x + 144y = 1 & 2) \ 89x + 144y = 5 & 3) \ 21x + 12y = 1 & 4) \ 11x + 29y = 1 \\ 5) \ 12x + 17y = 1 & 6) \ 9x + 24y = 1 & 7) \ 9x + 24y = 3 & 8) \ 9x + 24y = 15 \end{array}$$

2. Pozorování:

Lineární diofantická rovnice  $43x + 30y = 1$  má řešení  $x = 7 + 30k, y = -10 - 43k$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ .  
Zkouška:

$$43x + 30y = 43(7 + 30k) + 30(-10 - 43k) = 301 + 43 \cdot 30k - 300 - 43 \cdot 30k = 1.$$

Jaké bude mít řešení diofantická rovnice  $43x + 30y = 3$ ? Pravá strana má vyjít trojnásobná, takže i řešení bude trojnásobné:  $x = 3 \cdot 7 + 30k, y = 3 \cdot (-10) - 43k$ . Zkouška:

$$\begin{aligned} 43x + 30y &= 43(3 \cdot 7 + 30k) + 30(3 \cdot (-10) - 43k) = 3 \cdot 301 - 3 \cdot 300 + 43 \cdot 30k - 43 \cdot 30k = \\ &= 3 \cdot (301 - 300) + 0k = 3. \end{aligned}$$

Stručně řečeno:

$$43x + 30y = 1 \implies 43 \cdot 3x + 30 \cdot 3y = 3$$

3. Pozorování:

Lineární diofantická rovnice  $6x + 15y = 1$  nemá řešení v  $\mathbb{Z}$ . Proč?

Stačí si uvědomit:  $3 \cdot (2x + 5y) = 1$ . Součin čísla 3 a jiného celého čísla nikdy nedá 1.

Všimněme si: jsou-li  $a, b$  nesoudělná (tj.  $\text{NSD}(a, b) = 1$ ), má lineární diofantická rovnice  $ax + by = 1$  vždy řešení. Je to vlastně také důsledek Bezoutovy věty.

4. \* V knize [BeDla] je následující zábavná úloha:

*Karel Zpěvák prodával své poslední CD ve dvou vydáních. Základní vydání za 299 Kč a luxusní vydání s připojenou obrazovou publikací za 472 Kč.*

*Jeho agent mu po měsíčním prodeji přinesl utržených 140 407 Kč s omluvou, že nemůže nalézt záznam, kolik kterého vydání prodal.*

*Nu, při téhle sumě to nevádí. Je pouze jediná možnost, kolik kterých vydání jste prodal.*

- a) Kolik základních a kolik luxusních vydání se prodalo?  
 b) Kolik základních a kolik luxusních vydání by se prodalo v případě tržby 300 000 Kč?  
 Provedte diskusi.  
 c) Kolik základních a kolik luxusních vydání by se prodalo v případě tržby 100 000 Kč?  
 Provedte diskusi.

Pro pohodlí dodejme, že  $299 = 13 \cdot 23$  a  $472 = 8 \cdot 59$ .

5. \* Najděte kořeny kvadratické rovnice  $x^2 + x - 1 = 0$ . Kladný kořen této rovnice je tzv. *zlaté číslo*, značíme jej  $\varphi \approx 0,618\dots$  Tj.

$$\varphi^2 + \varphi = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\varphi + 1 = \frac{1}{\varphi}} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \frac{1}{1 + \varphi}$$

Rozviňte zlaté číslo  $\varphi$  do řetězového zlomku a najděte prvních pět konvergentů.

6. Provokativní příklad. Pozorujte následující diofantické rovnice a (jedno) jejich řešení.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 & [-1, 1] \\ 3x + 5y &= 1 & [2, -1] \\ 5x + 8y &= 1 & [-3, 2] \\ 8x + 13y &= 1 & [5, -3] \\ 13x + 21y &= 1 & [-8, 5] \\ 21x + 34y &= 1 & [13, -8] \\ 34x + 55y &= 1 & [-21, 13] \\ 55x + 89y &= 1 & [34, -21] \end{aligned}$$

Hezké: Fibonacciho čísla se objevují v koeficientech i v řešení.

7. Pozorujme ryze periodický řetězový zlomek:  $\alpha = [\overline{1, 2, 3}]$ . Můžeme jej rozepsat různými způsoby, například:

$$\alpha = [\overline{1, 2, 3}] = [1, 2, 3, \overline{1, 2, 3}] = [1, 2, 3, \alpha] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\alpha}}}$$

Z rovnice  $\alpha = [1, 2, 3, \alpha]$  snadno dopočítáme hodnotu tohoto ryze periodického řetězového zlomku  $\alpha$ , stačí vypočítat příslušné konvergenty:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{10}{7}, \quad \frac{10\alpha + 3}{7\alpha + 2},$$

hodnota řetězového zlomku  $[1, 2, 3, \alpha]$  je tedy  $\frac{10\alpha + 3}{7\alpha + 2}$ . Vyřešíme tedy rovnici

$$\alpha = \frac{10\alpha + 3}{7\alpha + 2}.$$

Po úpravách dostaneme kvadratickou rovnici, která má jediné kladné řešení

$$\alpha = \frac{4 + \sqrt{37}}{7}.$$

8. \* Najděte hodnotu následujících ryze periodických řetězových zlomků.

a)  $[\overline{2, 1, 1}]$       b)  $[\overline{1}]$

## 14.4 Pellova rovnice – příprava

Následující opakování je užitečné při řešení Pellovy rovnice.

1. \* Jakou strukturu má řetězový zlomek čísla  $\sqrt{n}$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  není čtvercové číslo?
2. \* Které řetězové zlomky jsou periodické? Které jsou konečné (a proč)? Které jsou nekonečné (a proč)?

## 14.5 Pellova rovnice – řešení

1. Řešení Pellovy rovnice  $x^2 - Ny^2 = 1$ :  
Rozvíňme do řetězového zlomku  $\sqrt{N} = [q_0; \overline{q_1, q_2, q_3, \dots, q_3, q_2, q_1, 2q_0}]$ . Jedno netriviální řešení je obsaženo v čitateli a jmenovateli jistého konvergentu. Kterého? Je-li délka periody  $p$  (tj. počet článků v periodě):

- sudá, vezmeme konvergent článku před  $2q_0$  ( $\sqrt{N} = [q_0; q_1, q_2, q_3, \dots, q_3, q_2, \mathbf{q_1}, 2q_0, \dots]$ ),
- lichá, vezmeme konvergent článku před  $2q_0$ , ale až při druhém průchodu periodou ( $\sqrt{N} = [q_0; q_1, q_2, q_3, \dots, q_3, q_2, q_1, 2q_0, q_1, q_2, q_3, \dots, q_3, q_2, \mathbf{q_1}, 2q_0, \dots]$ ).

V případě sudé délky periody  $p$  tedy bereme  $p$ -tý konvergent, v případě liché délky periody  $p$  bereme  $2p$ -tý konvergent.

2. Příklad:

Nalezneme jedno netriviální celočíselné řešení rovnice  $x^2 - 23y^2 = 1$ .

Odmocninu z 23 rozvineme do řetězového zlomku:

$$\sqrt{23} = [4; \overline{1, 3, 1, 8}]$$

Délka periody je  $p = 4$ , což je sudé číslo, takže řešení bude obsaženo v čitateli a jmenovateli konvergentu příslušného článku 1 (bezprostředně před článkem 8). Jednotlivé konvergenty postupně jsou:

$$\frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{19}{4}, \frac{24}{5}, \dots$$

Řešením je  $x = 24$ ,  $y = 5$ , neboť  $24^2 - 23 \cdot 5^2 = 576 - 575 = 1$ .

3. \* Najděte základní řešení Pellovy rovnice  $x^2 - 2023y^2 = 1$ .

Řešením je  $[2024, 45]$ , tj. Pellova rovnice s koeficientem 2023 má řešení  $x = 2024$ , což by byl skvělý tip na novoroční přání.

4. Prozkoumejme otázku novoročních přání s Pellovou rovnicí. Nastane někdy podobně hezká situace jako u rovnice s koeficientem 2023?

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2020y^2 &= 1, & [809, 18], & \quad p = 4, \sqrt{2020} = [44; \overline{1, 16, 1, 88}] \\
 x^2 - 2021y^2 &= 1, & [45495, 1012], & \quad p = 6, \sqrt{2021} = [44; \overline{1, 21, 2, 21, 1, 88}] \\
 x^2 - 2022y^2 &= 1, & [1349, 30], & \quad p = 4, \sqrt{2022} = [44; \overline{1, 28, 1, 88}] \\
 x^2 - 2023y^2 &= 1, & [2024, 45], & \quad p = 4, \sqrt{2023} = [44; \overline{1, 43, 1, 88}] \\
 x^2 - 2024y^2 &= 1, & [4049, 90], & \quad p = 2, \sqrt{2024} = [44; \overline{1, 88}] \\
 x^2 - 2025y^2 &= 1, & [1, 0], & \quad p = 0, \sqrt{2025} = [45] \\
 x^2 - 2026y^2 &= 1, & [4051, 90], & \quad p = 1, \sqrt{2026} = [45; \overline{90}] \\
 x^2 - 2027y^2 &= 1, & [8209351, 182340], & \quad p = 2, \sqrt{2027} = [45; \overline{45, 90}] \\
 x^2 - 2028y^2 &= 1, & [3650401, 81060], & \quad p = 2, \sqrt{2028} = [45; \overline{30, 90}] \\
 x^2 - 2029y^2 &= 1, & [4164193801, 92446380], & \quad p = 5, \sqrt{2029} = [45; \overline{22, 1, 1, 22, 90}] \\
 x^2 - 2030y^2 &= 1, & [1315441, 29196], & \quad p = 2, \sqrt{2030} = [45; \overline{18, 90}] \\
 x^2 - 2031y^2 &= 1, & [913951, 20280], & \quad p = 2, \sqrt{2031} = [45; \overline{15, 90}] \\
 x^2 - 2032y^2 &= 1, & [44757606858751, 992898844800], & \quad p = 28 \\
 x^2 - 2033y^2 &= 1, & [61795078487, 1370519436], & \quad p = 20 \\
 x^2 - 2034y^2 &= 1, & [406801, 9020], & \quad p = 2, \sqrt{2034} = [45; \overline{10, 90}] \\
 x^2 - 2035y^2 &= 1, & [329671, 7308], & \quad p = 2, \sqrt{2035} = [45; \overline{9, 90}] \\
 x^2 - 2036y^2 &= 1, & [313201220822405001, 6941200020407350] \\
 x^2 - 2037y^2 &= 1, & [155143351, 3437460], & \quad p = 10, \sqrt{2037} = [45; \overline{7, 1, 1, 22, 30, 22, 1, 1, 7, 90}] \\
 x^2 - 2038y^2 &= 1, & [16073715125005882674057412962488837, 356052612909782828757661492925706], \\
 & & & \quad p = 74 \\
 x^2 - 2039y^2 &= 1, & [179221048487196942112440, 3968993620357130831179], & \quad p = 44 \\
 x^2 - 2040y^2 &= 1, & [146881, 3252], & \quad p = 2, \sqrt{2040} = [45; \overline{6, 90}] \\
 x^2 - 2041y^2 &= 1, & [15380575814145385, 340448239257108], & \quad p = 36 \\
 x^2 - 2042y^2 &= 1, & [10775075410899, 238447322110], & \quad p = 13, \sqrt{2042} = \\
 & & & \quad [45; \overline{5, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 5, 90}] \\
 x^2 - 2043y^2 &= 1, & [102151, 2260], & \quad p = 2, \sqrt{2043} = [45; \overline{5, 90}] \\
 x^2 - 2044y^2 &= 1, & [35087884780634163199, 776098318507233120], & \quad p = 32 \\
 x^2 - 2045y^2 &= 1, & [33708961, 745416], & \quad p = 10, \sqrt{2045} = [45; \overline{4, 1, 1, 22, 18, 22, 1, 1, 4, 90}] \\
 x^2 - 2046y^2 &= 1, & [1668545, 36888], & \quad p = 12, \sqrt{2046} = [45; \overline{4, 3, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 3, 4, 90}] \\
 x^2 - 2047y^2 &= 1, & [5566204448, 123026943], & \quad p = 12, \sqrt{2047} = [45; \overline{4, 9, 1, 4, 8, 45, 8, 4, 1, 9, 4, 90}] \\
 x^2 - 2048y^2 &= 1, & [886731088897, 19594173939], & \quad p = 24 \\
 x^2 - 2049y^2 &= 1, & [28661728361680464688535, 633186135065525829476], & \quad p = 44 \\
 x^2 - 2050y^2 &= 1, & [17322499, 382590], & \quad p = 7, \sqrt{2050} = [45; \overline{3, 1, 1, 1, 1, 3, 90}]
 \end{aligned}$$

5. Vidíme, že rok 2023 byl celkem unikátní, neboť  $45^2 = 2025$ .

Podobná situace nastane nejdříve v roce 2114, neboť  $46^2 = 2116$ :

$$x^2 - 2114y^2 = 1, \quad [2115, 46], \quad p = 4, \sqrt{2114} = [45; \overline{1, 44, 1, 90}].$$

A naposledy tato situace nastala v roce 1934, neboť  $44^2 = 1936$ :

$$x^2 - 1934y^2 = 1, \quad [1935, 44], \quad p = 4, \sqrt{1934} = [43; \overline{1, 42, 1, 86}].$$

6. Některé koeficienty  $n$  Pellovy rovnice  $x^2 - ny^2 = 1$  jsou nepříjemné, neboť řetězový zlomek  $\sqrt{n}$  má velmi dlouhou periodu.

Pozorujme koeficienty  $n < 1000$  a příslušné délky period  $p \geq 30$  (v závorce).

331 (34), 379 (30), 421 (37), 436 (30), 454 (34), 463 (32), 478 (36), 508 (32), 526 (40), 541 (39),  
 556 (36), 571 (42), 589 (40), 601 (31), 604 (44), 613 (33), 619 (38), 631 (48), 649 (30), 652 (36),  
 661 (39), 669 (38), 673 (31), 691 (38), 694 (46), 718 (40), 721 (40), 724 (42), 739 (46), 751 (52),  
 764 (32), 766 (44), 769 (37), 772 (30), 796 (44), 811 (38), 823 (44), 844 (48), 849 (30), 859 (46),

862 (40), 883 (46), 886 (54), 889 (42), 907 (42), 913 (32), 919 (60), 921 (34), 937 (33), 946 (30), 956 (32), 958 (36), 964 (34), 967 (32), 974 (32), 981 (30), 989 (32), 991 (60)

Prvním „nepříjemným“ koeficientem je 331, nejdelsí periodu ( $p = 60$ ) pozorujeme u 919 a 991.

Mnohem nepříjemnější jsou však koeficienty, jejichž  $p$  je liché, neboť je pak potřeba počítat  $2p$ -tý konvergent, tedy použít dvojnásobný počet článků. Nejnepříjemnějšími jsou tedy Pellovy rovnice s koeficienty ( $n < 1\,000$ ):

$$421 (37), 541 (39), 661 (39), 769 (37).$$

7. \* Najděte základní řešení následujících Pellových rovnic (jsou zvoleny tak, že pokrývají různé případy).

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 7y^2 = 1 & \quad \text{b) } x^2 - 17y^2 = 1 & \quad \text{c) } x^2 - 13y^2 = 1 & \quad \text{c}_1) x^2 - 13y^2 = -1 \\ \text{d) } x^2 - 130y^2 = 1 & \quad \text{e) } x^2 - 2023y^2 = 1 \end{aligned}$$

8. Srovnajte náročnost hledání řešení následujících Pellových rovnic.

$$\text{*a) } x^2 - 420y^2 = 1 \quad \text{!!!b) } x^2 - 421y^2 = 1$$

Pozor: druhá rovnice je určena milovníkům počítání s pomocí počítače či programovatelného kalkulátoru (ruční výpočet zde nedoporučuji). K řešení potřebujeme konvergent příslušný zlomku  $[20, 1, 1, 13, 5, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 9, 1, 7, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 7, 1, 9, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 5, 13, 1, 1, 40, 1, 1, 13, 5, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 9, 1, 7, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 7, 1, 9, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 5, 13, 1, 1]$ , jeho číselník má 34 cifer, jmenovatel 33 cifer:

$$\frac{3879474045914926879468217167061449}{189073995951839020880499780706260}$$

\* Jak je tomu s první rovnicí?