Kuželosečky

Zdeněk Halas & Jana Hromadová

„Tribonacciho skriptum“

Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova

28. května 2026

Obsah

Úvod . . . 6

I Elementární poznatky o kuželosečkách **8**

1 Základní poznatky o kuželosečkách **9**

1.1 Kružnice . . . 9

1.1.1 Rovnice kružnice . . . 9

1.1.2 Rovnice tečny kružnice . . . 10

1.2 Definice kuželoseček . . . 11

1.3 Tečny regulárních kuželoseček . . . 12

1.4 Elipsa . . . 13

1.4.1 Rovnice elipsy . . . 14

1.4.2 Rovnice tečny elipsy . . . 16

1.5 Parabola . . . 17

1.5.1 Rovnice paraboly . . . 17

1.5.2 Rovnice tečny paraboly . . . 18

1.6 Hyperbola . . . 19

1.6.1 Rovnice asymptot hyperboly . . . 20

1.7 Poznámky k definicím: osa, poloosa, střed . . . 21

2 Kružnice **22**

2.1 Různé charakterizace kružnice . . . 22

2.2 Mocnost bodu ke kružnici a rovnice kružnice . . . 23

2.2.1 Zavedení mocnosti bodu ke kružnici ve školské matematice . . . 25

2.3 Apollóniova kružnice . . . 28

3 Kuželosečky obecně **30**

3.1 Planimetrické definice kuželoseček a řezy kuželové plochy . . . 30

3.1.1 Quételetova–Dandelinova věta pro elipsu . . . 32

3.1.2 Quételetova–Dandelinova věta pro parabolu . . . 33

3.2 Vzdálenost ohnisek elipsy znázorněná na kuželové ploše . . . 34

3.3 Parabola jako „limitní případ“ elipsy . . . 34

3.4 Přímka jako limitní případ kružnice . . . 36

3.5 Jednotná rovnice kuželoseček . . . 37

3.5.1 Interpretace ε v případě elipsy . . . 39

3.5.2 Řídicí přímka elipsy a kuželová plocha . . . 40

3.6 Rovnice kuželoseček v kartézských a v polárních souřadnicích . . . 41

3.7 Rovnice elipsy v polárních souřadnicích . . . 42

3.8 Parametr kuželosečky a její ohnisko . . . 43
3.8.1 Parametr elipsy a její ohnisko . . . 43
3.8.2 Parametr paraboly a její ohnisko . . . 44
3.8.3 Latus rectum . . . 44
3.9 Průměry vzdáleností hlavních vrcholů od ohniska . . . 44
3.10 Vzdálenost bodu elipsy od ohniska . . . 45
3.11 Kuželosečky jako množiny bodů v Gaussově rovině . . . 47
3.12 Rovnice kuželosečky pomocí determinantů . . . 48
3.12.1 Rovnice přímky pomocí determinantů . . . 48
3.12.2 Rovnice kružnice pomocí determinantů . . . 48
3.12.3 Rovnice kuželosečky pomocí determinantů . . . 48
3.13 Obrazy kuželoseček v kruhové inverzi . . . 49
3.13.1 Hyperbola . . . 49
3.13.2 Elipsa . . . 49
3.13.3 Parabola . . . 50

4 Z historie kuželoseček **51**
4.1 Kuželosečky a sluneční hodiny . . . 51
4.2 Počátky zkoumání kuželoseček . . . 52
4.3 Názvy kuželoseček . . . 54

5 Elipsa **57**
5.1 Planimetrická definice elipsy a rovnice elipsy . . . 57
5.2 Eukleidova věta o výšce pro elipsu . . . 58
5.2.1 Speciální případ pro kružnici . . . 58
5.3 Souměrnost elipsy . . . 59
5.4 Parametrické vyjádření elipsy . . . 60
5.5 Elipsa jako afinní obraz kružnice . . . 61
5.6 Obsah vnitřní oblasti elipsy . . . 62
5.7 Délka elipsy . . . 63
5.8 Elipsa jako řez válcovou plochou . . . 65
5.9 Rozvinutí válcové plochy do roviny . . . 66
5.10 Zahradnická konstrukce elipsy . . . 67
5.11 Proužková součtová konstrukce elipsy . . . 67
5.12 Trojúhelníková konstrukce elipsy . . . 68
5.12.1 Konstrukce tečny elipsy . . . 69
5.13 Hyperoskulační kružnice . . . 71
5.14 Ohnisková vlastnost elipsy – odvození analytickou metodou . . . 73
5.15 Tečna elipsy . . . 75
5.16 Ohnisková vlastnost elipsy – jednoduchý syntetický důkaz . . . 76
5.17 Vrcholová kružnice a rovnoběžné průvodiče . . . 76
5.18 Égregia proprietás . . . 77
5.19 Pól a polára . . . 80
5.19.1 Kolmost spojnice bodu B řídicí přímky s ohniskem a poláry bodu B . . . 80
5.20 Feynmanova konstrukce elipsy . . . 81
5.21 Konstrukce elipsy pomocí dotýkajících se kružnic . . . 82

6 Parabola **84**
6.1 Rovnice paraboly . . . 84
6.2 Rovnice tečny paraboly . . . 84
6.3 Tečna paraboly jako osa souměrnosti . . . 86
6.4 Konstrukce tečny paraboly . . . 88
6.4.1 Subtangenta . . . 88
6.5 Rovnice tečny paraboly – geometrická interpretace . . . 89
6.6 Ohnisková vlastnost paraboly . . . 90
6.7 Subnormála a parametr paraboly . . . 90
6.8 Hyperoskulační kružnice paraboly . . . 92
6.9 Tečna paraboly a souměrnost . . . 93
6.10 Kolmost tečen paraboly . . . 93
6.11 Avicennova konstrukce paraboly . . . 95
6.12 Parabola a vrh šikmý . . . 96

7 Hyperbola **98**
7.1 Parametrické vyjádření jedné větve hyperboly . . . 98
7.2 Obsah trojúhelníku ohraničeného asymptotami a tečnou . . . 99
7.2.1 Sdružené hyperboly a obsah rovnoběžníku . . . 101
7.3 Sečna hyperboly . . . 101
7.4 Menaichmos – hyperbola a nepřímá úměrnost . . . 102
7.5 Hyperbola v běžném životě . . . 103

8 Vztahy mezi kuželosečkami **105**
8.1 Konfokální elipsy a hyperboly . . . 105
8.2 Souvislosti mezi elipsou a parabolou . . . 106

II Aplikace lineární algebry na kuželosečky a metoda invariantů **107**

9 Elementy projektivní geometrie a lineární algebra **108**
9.1 Úvod – o čem to je . . . 108
9.2 Maticová reprezentace kuželosečky . . . 108
9.3 Homogenní souřadnice . . . 110
9.3.1 Geometrické znázornění homogenních souřadnic bodu $X = [x, y]$ . . . 110
9.3.2 Výhoda homogenních souřadnic: nevlastní body a homogenizace . . . 111
9.3.3 Reálná projektivní rovina . . . 112

10 Transformace kuželosečky **113**
10.1 Posunutí (translace) . . . 114
10.1.1 Matice posunutí . . . 115
10.1.2 Posunutí kuželosečky . . . 116
10.1.3 Střed regulární kuželosečky . . . 117
10.2 Otočení (rotace) . . . 118
10.2.1 Matice otočení kolem počátku o orientovaný úhel φ . . . 118
10.2.2 Otočení kuželosečky . . . 119
10.2.3 Matice otočení v geometrii a lineární algebře . . . 121
10.3 Transformace paraboly . . . 122

11 Metoda invariantů **123**
11.1 Základní myšlenka metody invariantů . . . 123
11.1.1 Invarianty – determinanty a vlastní čísla . . . 124
11.2 Praktické provedení (u regulární kuželosečky) . . . 124
11.2.1 Elipsa a hyperbola . . . 125

12 Tečny a asymptoty **128**
12.1 Tečna kuželosečky . . . 128
12.1.1 Tečna elipsy – středoškolský přístup . . . 128
12.1.2 Rovnice tečny regulární kuželosečky obecně – analogie . . . 130
12.1.3 Rovnice tečny regulární kuželosečky obecně – sečna přejde v tečnu . . . 131
12.1.4 Problém charakterizace tečny pomocí jediného společného bodu s regulární kuželosečkou . . . 132
12.1.5 Rovnice tečny regulární kuželosečky obecně – jediný společný bod . . . 132
12.2 Rovnice asymptot hyperboly . . . 133
12.3 Nevlastní body regulárních kuželoseček . . . 135
12.3.1 Hledání nevlastních bodů . . . 135

13 Další prvky kuželoseček **139**
13.1 Osa paraboly . . . 139

III Přehledy **142**

14 Metrická klasifikace kuželoseček **143**
14.1 Regulární kuželosečky $h(K) = 3$, tj. $\Delta \neq 0$ . . . 143
14.2 Singulární kuželosečky $h(K) < 3$, tj. $\Delta = 0$ . . . 144
14.3 Výpočet jednotlivých prvků kuželoseček . . . 145

15 Afinní a projektivní klasifikace kuželoseček **146**
15.1 Afinní klasifikace . . . 146
15.2 Projektivní klasifikace . . . 147

16 Literatura **148**

Úvod

Co v tomto textu (ne)najdeme

Text, který právě čtete, je věnován kuželosečkám. Jeho pojetí je specifické. Nebudujeme celou teorii, neprovádíme například kompletní klasifikaci kuželoseček v eukleidovské, afinní a projektivní rovině. Při výběru témat, kterým se věnujeme, a při volbě celkové koncepce, se řídíme několika cíli.

- Chceme poskytnout dostatečně široký výběr zajímavostí ze světa kuželoseček při zachování elementárního charakteru celého textu. Učitel by měl takovými poznatky disponovat; dodávají mu přesvědčení o kráse matematiky i o její užitečnosti, které pak (byť třeba implicitně) může předávat svým žákům.
- Náš zájem je výrazně didaktický, reagujeme na některé koncepční nedostatky, které se vyskytují ve středoškolských učebnicích. Nejvýznamnější je problém tzv. „planimetrických definic“ jednotlivých regulárních kuželoseček, podmínky v nich obsažené nejsou ve většině středoškolských učebnic ničím motivovány, nijak není ukazována souvislost s řezy kuželové plochy. Dalším problémem je nalezení tečny kuželosečky: nebývá jasné, proč je tečna tak důležitá; celé téma se tak redukuje na řešení soustav rovnic bez skutečného geometrického cíle.
- Nepracujeme pouze analytickou metodou, užíváme i syntetické postupy. Uvádíme také několik konstrukcí elipsy, které podávají zajímavé interpretace parametrických rovnic elipsy; některé z nich jsou také základem mechanických pomůcek, které vykreslují elipsu (tzv. elipsograf). Tyto mechanické pomůcky lze snadno modelovat např. v GeoGebře.
- Chceme také naznačit souvislosti mezi jednotlivými regulárními kuželosečkami, které buď nebývají formulovány vůbec, nebo jen vágně. Například:
  - Ukazujeme, že parabola vznikne z elipsy, pokud délku hlavní poloosy „pošleme do nekonečna“.
  - Zkoumáme vlastnost řídicí kružnice elipsy, která přechází v řídicí přímku paraboly.
  - Na ohniskové vlastnosti kuželoseček (prozkoumané standardními elementárními prostředky) se pak pokoušíme pohlížet jednotně: paprsek vyslaný z jednoho ohniska elipsy se odráží do druhého ohniska elipsy, stejně je tomu tak i u paraboly, jen to druhé ohnisko leží „v nekonečnu“, a tak se paprsek odráží rovnoběžně s osou paraboly.

Poslední bod přímo vybízí k otázkám: *„Nešlo by to pojmout jednotněji?“* Tedy nezkoumat vlastnosti jednotlivých kuželoseček zvlášť, ale dokázat tyto vlastnosti zároveň pro všechny kuželosečky? Navíc tu přirozeně vzniká potřeba pracovat s body ležícími „v nekonečnu“. Velmi by se hodilo, kdybychom jim mohli přiřadit souřadnice (konečná čísla) a bylo by tak možno s nimi provádět výpočty.

Tento text je tedy vhodnou přípravou na obecnější teorii kuželoseček. Ta je tématem druhé části, kde je tento jednotný přístup ke kuželosečkám naznačen: každá kuželosečka je reprezentována maticí, odvodit rovnici tečny je otázka několika krátkých a jednoduchých řádků. Díky elementům projektivní geometrie lze pracovat s ohnisky, vrcholy a body kuželoseček, které leží „v nekonečnu“. Například asymptota hyperboly je pak opět jen tečnou v bodě hyperboly, který leží „v nekonečnu“, tedy v jejím nevlastním bodě, takže její rovnici není potřeba zvlášť odvozovat. Zároveň se objevuje významná aplikace lineární algebry, zejména teorie bilineárních a kvadratických forem, matic, vlastních čísel, determinantů.

Kuželosečky a školská matematika

Pozornost věnovaná kuželosečkám na středních školách (ostatně i na školách vysokých) byla v posledních sto padesáti letech velmi proměnlivá. Pohybovala se mezi dvěma extrémy:

- značným zájmem, bohatou hodinovou dotací, vyučováním hlubokých výsledků a zajímavých aplikací;

- téměř úplným nezájmem, rezignací na syntetické metody, redukcí tématu na odvození rovnic z tzv. „planimetrických definic“ padajících z nebe a na hledání průsečíků s přímkami pomocí řešení rovnic.

Téma pojaté druhým z uvedených způsobů však není příliš zajímavé. Není tedy divu, že jsou v současné době kuželosečky zařazeny jen v RVP pro gymnázia. Dnešní dobu tak můžeme řadit k obdobím, kdy je téma kuželoseček na ústupu.

Vzdělání, kterého se nám na univerzitě dostává, by však mělo být obecnějšího charakteru, měli bychom být připraveni na dobu, kdy bude kuželosečkám ve školské matematice věnována taková pozornost, která odpovídá jejich významu. Současné pojetí analytické geometrie, kdy je pozornost věnována jen velmi jednoduché práci se souřadnicemi, vektory a lineárními útvary, považujeme za nešťastné. Zcela totiž chybí něco zajímavého a aplikovatelného. Podporuje se tak dojem, že matematika je nezáživná, nudná, k ničemu. Není to však problém matematiky, ale její prezentace v učebnicích, kurikulu, případně při samotném vyučování.

V tomto textu jsme se proto pokusili naznačit několik zajímavostí, které mohou ukázat, že kuželosečky nejsou nezáživným a neužitečným tématem.

Při vytváření kurikula je důležitá *vyváženost*.

- Přílišná snaha o zjednodušení vede k redukci matematiky na příliš jednoduché poznatky. Žáci cítí, že se „nic nenaučili“, že jsou jim takové poznatky jen málo platné. Není co aplikovat, případné aplikace jsou nereálné, triviální, nezajímavé. Zkušenosti ukazují, že obliba matematiky pak výrazně klesá.

- Žák nesmí být novými poznatky zahlcen. Je-li téma probíráno příliš do hloubky a/nebo do šíře, stává se neúnosným. Žáci se pak dostávají do podobné situace, jako v předchozím bodě: ve výsledku toho mnoho neumějí, nedovedou dobře probírané poznatky aplikovat. Dostavuje se pocit frustrace a bezvýchodnosti. I v tomto případě obliba matematiky výrazně klesá.

Při používání nápadů z tohoto textu při výuce na střední škole je tedy potřeba postupovat velmi uvážlivě.

Whetting Your Appetite

O Archimédovi se traduje, že pronesl: *„Dejte mi pevný bod a pohnu Zemí.“* Naštěstí pevný bod neobdržel, a tak si naše Země dál krouží po kuželosečce – elipse...

Na následujícím obrázku je typický čtenář tohoto skripta – v očích odhodlání a výzva:

„Dejte mi kuželovou plochu a vyrobím Vám kuželosečku!“

Část I

Elementární poznatky o kuželosečkách

Kapitola 1

Základní poznatky o kuželosečkách

1.1 Kružnice

1. Definujte kružnici.

   Řešení: Množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu S této roviny danou konstantní[1] vzdálenost r, se nazývá *kružnice*.
   Bod S se nazývá *střed kružnice*, nezáporné reálné číslo r se nazývá *poloměr kružnice*.
   Poloměrem kružnice také rozumíme každou úsečku spojující střed kružnice s některým bodem této kružnice.

1.1.1 Rovnice kružnice

2. Odvoďte rovnici kružnice (bez použití souřadnic).

   Řešení: Vyjdeme přímo z definice. Vzdálenost obecného bodu X kružnice od jejího středu S je $|XS|$, poloměr označme r. Rovnice kružnice je tedy

$$|XS| = r\,.$$

3. Odvoďte rovnici kružnice (ve zvolené kartézské soustavě souřadnic).

   Řešení: Zvolme kartézskou soustavu souřadnic a označme souřadnice obecného bodu X ležícího na kružnici $X = [x, y]$, souřadnice středu kružnice $S = [s_1, s_2]$, poloměr kružnice r. Vzdálenost $|XS|$ je potom rovna

$$|XS| = \sqrt{(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2}\,.$$

   Rovnice kružnice $|XS| = r$ tak přejde na tvar

$$\sqrt{(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2} = r.$$

   Umocněním na druhou se zbavíme druhé odmocniny:

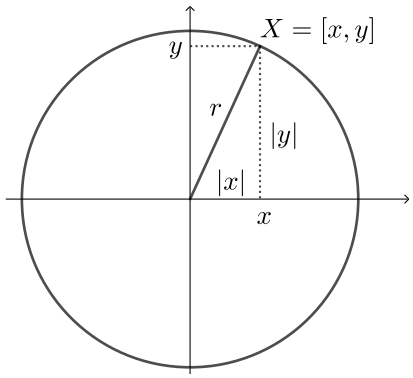
$$(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2$$

   a dostaneme tak *středovou rovnici kružnice*.

4. Nakreslete si obrázek: kružnice se středem v počátku a zvolený bod $X = [x, y]$ na ní ležící. Uvědomte si, že středovou rovnici kružnice (střed v počátku) lze odvodit pomocí Pýthagorovy věty aplikované na pravoúhlý trojúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[x, 0]$, $[0, y]$:

$$x^2 + y^2 = r^2\,.$$

[1] Vzdálenost r většinou připouštíme pouze kladnou, zde však připustíme i nulové r kvůli možnosti zahrnout degenerovaný případ kružnice s nulovým poloměrem (což je vlastně jediný bod – střed kružnice), na který můžeme narazit při některých transformacích.



5. Rovnici kružnice lze také odvodit pomocí Eukleidovy věty o výšce. S trochou nadsázky tedy můžeme na Eukleidovu větu o výšce pohlížet spíše jako na větu o kružnici (umožňuje totiž přímo charakterizovat y-ovou souřadnici bodu kružnice) než jako na větu o pravoúhlém trojúhelníku.

   Velmi zajímavá je také souvislost rovnice kružnice s mocností bodu ke kružnici.

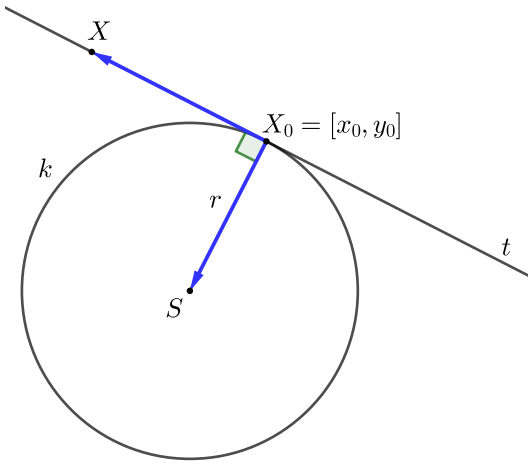
   Oba přístupy jsou zpracovány v kapitole 2.1 věnované kružnici.

1.1.2 Rovnice tečny kružnice

6. *Tečnou* kružnice k rozumíme přímku, která má s kružnicí k právě jeden společný bod.

7. Odvoďte rovnici tečny t kružnice k procházející bodem $X_0 \in k$ (bez použití souřadnic).

   Řešení: Tuto tečnu lze charakterizovat tím, že je kolmá na poloměr SX_0 kružnice a prochází zadaným bodem $X_0 \in k$ (který je pak jediným společným bodem tečny t a kružnice k).



   Označíme-li X libovolný bod na tečně t (prozatím $X \neq X_0$), dostaneme ihned, že vektory $X - X_0$ a $X_0 - S$ musí být na sebe kolmé, takže jejich skalární součin musí být roven nule:

$$(X - X_0) \cdot (X_0 - S) = 0.$$

   Přičteme-li a odečteme v první závorce S, dostaneme:

$$(X - S + S - X_0) \cdot (X_0 - S) = 0.$$

   Jelikož je skalární součin distributivní, máme

$$(X - S) \cdot (X_0 - S) + (S - X_0) \cdot (X_0 - S) = 0$$

a převedením druhého sčítance na pravou stranu obdržíme

$$(X - S) \cdot (X_0 - S) = (X_0 - S) \cdot (X_0 - S)\,.$$

Jelikož je výraz na pravé straně $(X_0 - S) \cdot (X_0 - S) = \|X_0 - S\|^2 = r^2$, přejde rovnice tečny t kružnice k procházející bodem $X_0 \in k$ na pěkný tvar

$$\boxed{t: \quad (X - S) \cdot (X_0 - S) = r^2\,.}$$

8. Zapište odvozenou rovnici tečny kružnice ve zvolené kartézské soustavě souřadnic.

   Řešení: Zvolme kartézskou soustavu souřadnic a označme souřadnice obecného bodu X ležícího na tečně $X = [x, y]$, souřadnice středu kružnice $S = [s_1, s_2]$, poloměr kružnice r, souřadnice bodu kružnice pak $X_0 = [x_0, y_0]$. Rovnici tečny $t:\ (X - S) \cdot (X_0 - S) = r^2$ pak můžeme psát ve tvaru

   $$(x - s_1, y - s_2) \cdot (x_0 - s_1, y_0 - s_2) = r^2\,.$$

   Pokud skalárně vynásobíme vektory na levé straně, dostaneme přímo rovnici tečny ve zvolené soustavě souřadnic:

   $$(x - s_1)\,(x_0 - s_1) + (y - s_2)\,(y_0 - s_2) = r^2\,.$$

1.2 Definice kuželoseček

V této kapitole stručně uvedeme definice jednotlivých reálných regulárních kuželoseček: elipsy, paraboly a hyperboly. Jedná se o kuželosečky, s nimiž se setkáváme nejčastěji.

Uvažujme v eukleidovském prostoru $\mathbb{E}_3$ rotační kuželovou plochu $\mathcal{C}$ a rovinu ϱ, která neprochází jejím vrcholem (tj. rovinu, která není *vrcholová*). Na kuželovou plochu můžeme pohlížet jako na soustavu přímek procházejících vrcholem (tzv. *površky* či *povrchové přímky*).

Snadno nahlédneme, že v $\mathbb{E}_3$ má rovina ϱ s kuželovou plochou $\mathcal{C}$ vždy neprázdný průnik, protíná tedy aspoň jednu její povrchovou přímku. Podle „počtu“ protínaných povrchových přímek tedy můžeme provést klasifikaci řezů kuželové plochy $\mathcal{C}$ rovinou ϱ, která není vrcholová.

- Rovina ϱ protíná všechny povrchové přímky kuželové plochy $\mathcal{C}$.

  Pokud rovina ϱ neprotíná všechny povrchové přímky, lze snadno rozlišit dva případy. Ani v jednom už není řezem uzavřená křivka.

- Rovina ϱ protíná povrchové přímky pouze na jedné straně (vzhledem k vrcholu) kuželové plochy $\mathcal{C}$. V tom případě je rovnoběžná právě s jednou povrchovou přímkou.

- Rovina ϱ protíná povrchové přímky na obou stranách (vzhledem k vrcholu) kuželové plochy $\mathcal{C}$, řezem je pak soustava dvou křivek. V tomto případě je ϱ rovnoběžná s právě dvěma povrchovými přímkami.

Pro klasifikaci i definici kuželoseček zvolíme z uvedených dvou kritérií to pohodlnější: počet rovnoběžných povrchových přímek s rovinou řezu. Ekvivalence podmínek uvedených u obou případů (počet rovnoběžných povrchových přímek, průnik s jednou či oběma částmi kuželové plochy) je zřejmá z následující úvahy: stačí si představit rovinu π rovnoběžnou s rovinou ϱ procházející vrcholem kuželové plochy; pouze v této rovině mohou ležet povrchové přímky (rovina prochází vrcholem) rovnoběžné s ϱ (rovina je rovnoběžná s ϱ). Z této představy je také zřejmé, že jiné možnosti nastat nemohou; ϱ musí být rovnoběžná aspoň s jednou povrchovou přímkou (jinak by protínala všechny povrchové přímky a řezem by byla elipsa) a více povrchových přímek rovnoběžných s ϱ než dvě nemůže existovat (musejí totiž ležet v rovině π,

všechny povrchové přímky mají společný bod – vrchol, jsou tedy různoběžné, takové povrchové přímky mohou v jediné rovině π ležet nejvýše dvě).

Nyní tedy můžeme na základě kompletní klasifikace vzájemných poloh kuželové plochy $\mathcal{C}$ a roviny ϱ neprocházející jejím vrcholem přistoupit k definici regulárních kuželoseček.

Definice: Protíná-li rovina ϱ (která není vrcholová) všechny povrchové přímky rotační kuželové plochy $\mathcal{C}$, nazýváme průnik $\mathcal{C} \cap \varrho$ *elipsou*.

Poznamenejme, že elipsa je uzavřená křivka.

Definice: Je-li rovina řezu ϱ (která není vrcholová) rovnoběžná právě s jednou povrchovou přímkou rotační kuželové plochy $\mathcal{C}$, nazýváme průnik $\mathcal{C} \cap \varrho$ *parabolou*.

Poznamenejme ještě, že tato jediná přímka udává směr *osy paraboly*, kterou můžeme definovat jako průnik roviny řezu ϱ s rovinou procházející osou kuželové plochy $\mathcal{C}$ a právě onou jedinou povrchovou přímkou rovnoběžnou s ϱ. Průnik paraboly s její osou se nazývá *vrchol* paraboly. Tento název je přirozený, uvědomíme-li si jeho polohu na parabole vyznačené přímo na kuželové ploše.

Definice: Je-li rovina řezu ϱ (která není vrcholová) rovnoběžná právě se dvěma povrchovými přímkami rotační kuželové plochy $\mathcal{C}$, nazýváme průnik $\mathcal{C} \cap \varrho$ *hyperbolou*.

Poznamenejme opět, že tyto dvě povrchové přímky udávají směry *asymptot hyperboly*.

1.3 Tečny regulárních kuželoseček

Tečna elipsy má s elipsou jediný společný bod, zároveň je jedinou přímkou s touto vlastností. Jinak je tomu v eukleidovské rovině s parabolou a hyperbolou.

- Parabola má jediný společný bod nejen s tečnou, ale i s každou přímkou rovnoběžnou s její osou.
- Hyperbola má jediný společný bod nejen s tečnou, ale i s každou přímkou rovnoběžnou s její asymptotou.

Pokud bychom tedy chtěli charakterizovat tečnu paraboly a hyperboly, museli bychom vyloučit uvedené případy.

Tečny kuželoseček se tedy na střední škole definují zpravidla takto:

- *tečna elipsy:* přímka, která má s elipsou jediný společný bod,
- *tečna hyperboly:* přímka, která má s hyperbolou jediný společný bod, zároveň však není rovnoběžná s žádnou z jejích asymptot,
- *tečna paraboly:* přímka, která má s parabolou jediný společný bod, zároveň však není rovnoběžná s její osou.

Rovnice tečen pak lze v každém z těchto případů odvodit z těchto definičních podmínek. Jedná se však o úkol, který je poměrně zdlouhavý.

Definice tečny v projektivním rozšíření $\mathbb{E}_2$

Všechny výjimky v definicích tečen by zmizely, pokud bychom v rovině připustili nevlastní body (pracovali bychom tedy v projektivním rozšíření eukleidovské roviny):

- parabola by měla právě jeden nevlastní bod a každá rovnoběžka s její osou by tak parabolu navíc protínala v tomto nevlastním bodě;

- hyperbola by měla dva nevlastní body a každá rovnoběžka s asymptotou by hyperbolu navíc protínala v jednom z nich.

Uvedené přímky by tedy měly s kuželosečkou dva společné body: jeden vlastní a jeden nevlastní; nebyly by tedy tečnou.

1.4 Elipsa

1. Ve středoškolských učebnicích se používají většinou tzv. *planimetrické definice* kuželoseček. Nazývají se tak proto, že pracují pouze s body roviny, v níž se definovaná kuželosečka nachází.

   Výhody těchto definic jsou zřejmé: není potřeba pracovat se stereometrickou situací, jednotlivé kuželosečky jsou charakterizovány jednoduchou podmínkou pro body v rovině (proto se také tyto definice nazývají *planimetrické*). Snadno pak také lze odvodit rovnice těchto kuželoseček.

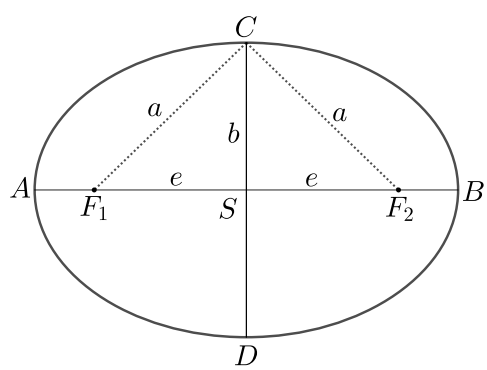
   Nevýhody těchto definic jsou však zásadní: není zřejmé, proč jsou křivky definované jako množiny bodů v rovině splňující uvedené charakteristické vlastnosti *kuželo-sečkami*, z celé teorie se zcela vytratil základní prvek – zkoumání řezů *kuželové plochy*.

   Jelikož je tento text věnován opakování základních poznatků ze střední školy, přidržíme se planimetrických definic kuželoseček. Případné zájemce odkážeme na tzv. Queteletovu-Dandelinovu větu, která o souvislosti planimetrické a stereometrické situace hovoří.

2. Zformulujte planimetrickou definici elipsy.

   Řešení: Mějme dánu kladnou konstantu c a dva pevně zadané body F_1, F_2 v rovině, přičemž $|F_1F_2| < c$. Potom *elipsou* rozumíme množinu všech bodů X v této rovině, které mají součet vzdáleností od bodů F_1 a F_2 roven této konstantě c, tj.

$$|F_1X| + |F_2X| = c\,.$$



3. Body F_1, F_2 se nazývají *ohniska* elipsy. Střed S úsečky F_1F_2 se nazývá *střed* elipsy. Vzdálenost $|SF_1|$ (která je rovna $|SF_2|$) se nazývá *excentricita* (někdy též *výstřednost*) elipsy a značí se e.

4. Přímka F_1F_2 se nazývá *hlavní osa* elipsy. Její průsečíky s elipsou (označené na obrázku A, B) se nazývají *hlavní vrcholy* elipsy.

   Vzdálenost $|SA|$ hlavního vrcholu elipsy od jejího středu (která je také rovna $|SB|$) se nazývá *hlavní poloosa* elipsy a značí se a.

5. Osa úsečky F_1F_2 se nazývá *vedlejší osa* elipsy. Její průsečíky s elipsou (označené na obrázku C, D) se nazývají *vedlejší vrcholy* elipsy.

Vzdálenost $|SC|$ vedlejšího vrcholu elipsy od jejího středu (která je také rovna $|SD|$) se nazývá *vedlejší poloosa* elipsy a značí se b.

6. Všimněme si, že hlavní i vedlejší osa je přímka, zatímco hlavní i vedlejší poloosa je kladné reálné číslo (neboť je to vzdálenost).

7. Z obrázku je ihned patrné, že konstanta c je rovna délce úsečky AB (ta je rovna $2a$); stačí porovnat případy, kdy bod X je hlavním vrcholem elipsy a uvědomit si, že elipsa je středově souměrná podle svého středu. Platí tedy:
$$c = 2a\,.$$
Proto se vztah z planimetrické definice elipsy často uvádí přímo ve tvaru
$$\boxed{|F_1X| + |F_2X| = 2a\,.}$$

8. Zajímavé je uvědomit si, jak by vypadala množina všech bodů X v rovině splňujících podmínku $|F_1X| + |F_2X| = 2a$ v případě, že $|F_1F_2| = 2a$ (úsečka F_1F_2) a pro $|F_1F_2| > 2a$ (prázdná množina).

9. Odvoďte vztah mezi hlavní poloosou, vedlejší poloosou a excentricitou elipsy.

   Řešení: Na pravoúhlý trojúhelník F_1SC (případně F_2SC) vyznačený v elipse na obrázku aplikujme Pýthagorovu větu, dostaneme:
$$\boxed{a^2 = b^2 + e^2\,.}$$

1.4.1 Rovnice elipsy

10. Odvoďte rovnici elipsy v kartézské soustavě souřadnic zvolené tak, že střed elipsy leží v počátku a obě ohniska leží na ose x.

    Řešení: Zvolme tedy kartézskou soustavu souřadnic tak, aby střed S elipsy ležel v počátku, tj. $S = [0, 0]$, obě ohniska na ose x, tj. $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$. Souřadnice obecného bodu elipsy nechť jsou $X = [x, y]$.

    Připomeňme, že elipsou (dle planimetrické definice) rozumíme množinu všech bodů X v rovině, pro něž platí, že součet jejich vzdáleností od dvou pevně zadaných bodů F_1, F_2 je konstantní, tj.:
$$|XF_1| + |XF_2| = 2a\,,$$
    přičemž $|F_1F_2| < 2a$ (neboli $e < a$). Předchozí rovnice přejde na tvar:
$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a\,.$$
    Umocněním na druhou dostaneme
$$(x+e)^2 + y^2 + (x-e)^2 + y^2 + 2 \cdot \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 4a^2\,,$$
$$2x^2 + 2e^2 + 2y^2 - 4a^2 = -2 \cdot \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2}\,.$$
    Vydělením dvěma a opětovným umocněním na druhou dostaneme
$$(x^2 + e^2 + y^2 - 2a^2)^2 = ((x+e)^2 + y^2) \cdot ((x-e)^2 + y^2)\,,$$
$$(x^2 + e^2 + y^2 - 2a^2)^2 = (x^2 + e^2 + y^2 + 2ex) \cdot (x^2 + e^2 + y^2 - 2ex)\,,$$
$$(x^2 + e^2 + y^2)^2 - 2 \cdot (x^2 + e^2 + y^2) \cdot (2a^2) + (2a^2)^2 = (x^2 + e^2 + y^2)^2 - (2ex)^2\,.$$

Po vydělení čtyřmi a převedení některých členů na druhou stranu

$$e^2x^2 - (x^2 + e^2 + y^2) \cdot a^2 = -a^4$$

a vynásobení obou stran minus jedničkou dostaneme:

$$(-e^2 + a^2)x^2 + y^2a^2 = a^4 - e^2a^2\,.$$

Nyní si stačí uvědomit, že $a^2 = e^2 + b^2$; dosazením obdržíme:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)\,,$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2\,.$$

Nyní stačí rovnici vydělit a^2b^2 a dostaneme kanonickou rovnici elipsy:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.}$$

11. Odvoďte parametrické vyjádření elipsy.

Řešení: Velmi jednoduchý postup vychází z tzv. „goniometrické jedničky“, tj.

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,.$$

Porovnáním s kanonickou rovnicí elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ihned dojdeme ke vztahům, které jsou základem parametrického vyjádření:

$$\cos\varphi = \frac{x}{a}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{b}\,.$$

Náhrady podílů $\frac{x}{a}$ a $\frac{y}{b}$ za kosinus a sinus jsou možné, neboť $-a \le x \le a$ a $-b \le y \le b$. Oba uvedené zlomky tedy nabývají hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ stejně jako $\cos\varphi$ a $\sin\varphi$.

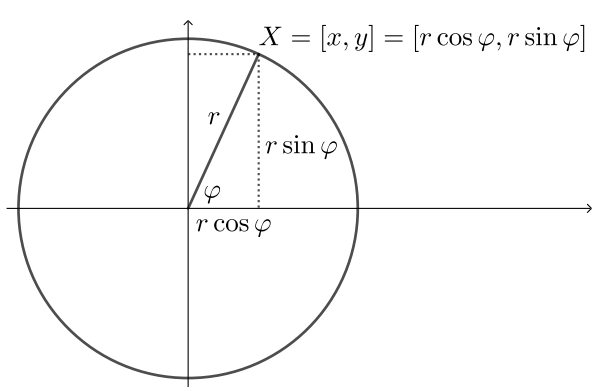
Po úpravě ihned dostáváme jedno z možných parametrických vyjádření elipsy:

$$x = a\cos\varphi\,, \qquad y = b\sin\varphi\,, \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi)\,.$$

Poznamenejme ještě, že speciálním případem je parametrizace kružnice o poloměru r (tj. $a = b = r$):

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi)\,.$$

Tyto rovnice jsou důsledkem definice goniometrických funkcí sinus a kosinus.



Formální ověření, že se jedná o body kružnice, lze provést prostým dosazením:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \,.$$

Analogicky by proběhl důkaz pro elipsu. Bod $X = [a \cos \varphi, b \sin \varphi]$ je bodem elipsy pro každé $\varphi \in \mathbb{R}$, neboť jeho souřadnice vyhovují rovnici elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \,.$$

1.4.2 Rovnice tečny elipsy

12. Přímka ležící v rovině elipsy, která má s touto elipsou:

    - právě jeden společný bod, se nazývá *tečna* elipsy,
    - právě dva různé společné body, se nazývá *sečna* elipsy.
    - Nemá-li přímka s elipsou žádné společné body, nazývá se *vnější přímka* elipsy.

13. Získání rovnice tečny elipsy jednoduchou úvahou.

    Tečnu t elipsy v jejím bodě $T = [x_0, y_0]$ lze ihned nalézt jednoduchou úvahou: tečna je přímka, takže je reprezentována lineární rovnicí, zároveň musí procházet bodem $T = [x_0, y_0]$, který je bodem elipsy. Stačí tedy v rovnici elipsy nahradit kvadratické členy lineárními:

    $$t: \quad \frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} = 1,$$

    a je rovnice tečny elipsy na světě. Dosadíme-li totiž za x a y souřadnice x_0 a y_0, vznikne rovnost

    $$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

    která potvrzuje, že bod $[x_0, y_0]$ leží nejen na elipse (to jsme předpokládali), ale i na přímce t. Ta je skutečně tečnou, je-li $[x_0, y_0]$ jediným společným bodem této přímky a elipsy.

    Ověřit to můžeme například sporem. Nechť je $[x_1, y_1]$ dalším průsečíkem této přímky a elipsy, který je různý od $[x_0, y_0]$. Potom tento bod leží na přímce, tj.:

    $$\frac{x_1\,x_0}{a^2} + \frac{y_1\,y_0}{b^2} = 1$$

    i na elipse:

    $$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

    Odečtením těchto dvou rovností dostaneme

    $$\frac{(x_1 - x_0)\,x_1}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)\,y_1}{b^2} = 0.$$

    Odečteme-li jiné dvě rovnosti ($[x_0, y_0]$ leží na elipse, $[x_1, y_1]$ leží na přímce), vyjde:

    $$\frac{(x_1 - x_0)\,x_0}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)\,y_0}{b^2} = 0.$$

    Oba body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$ (dle předpokladu různé) tedy leží nejen na přímce

    $$\frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} = 1,$$

    ale také na další přímce

    $$\frac{(x_1 - x_0)\,x}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)\,y}{b^2} = 0,$$

    což není možné. □

    Obdobně lze postupovat v případě hyperboly a paraboly.

1.5 Parabola

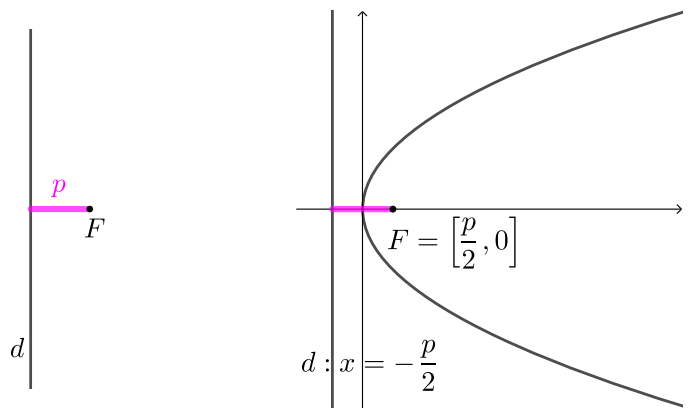
1. Zformulujte planimetrickou definici paraboly.

   Řešení: Mějme v rovině dánu přímku d a bod F, který na této přímce neleží (tj. $F \notin d$). Potom *parabolou* rozumíme množinu všech bodů X v této rovině, které mají stejnou vzdálenost od bodu F a od přímky d, tj.
   $$|XF| = |Xd|\,.$$

2. Bod F se nazývá *ohnisko* paraboly neboli *focus* (odtud obvyklé označení F).

   Přímka d se nazývá *řídicí přímka* paraboly neboli *directrix* (odtud obvyklé označení d).

   Geometrickou situaci (až na konkrétní umístění v rovině) vystihuje vzdálenost ohniska F od řídicí přímky d, kterou značíme p (tj. $p = |Fd|$) a nazývá se *parametr* paraboly. Jelikož $F \notin d$, je parametr p vždy kladné reálné číslo.



3. Parabola je křivka, která je osově souměrná, má právě jednu osu souměrnosti, která se nazývá *osa* paraboly.

   Dá se dokázat, že osa paraboly je přímka, která je kolmá na řídicí přímku paraboly a prochází jejím ohniskem.

4. Parabola má se svou osou právě jeden průsečík, který se nazývá *vrchol* paraboly. Obvykle jej značíme V.

   Vrchol má ze všech bodů paraboly nejmenší vzdálenost od řídicí přímky (a tedy i od ohniska), tj. pro vrchol paraboly V a pro každý její bod X, $X \neq V$, platí: $|Vd| < |Xd|$.

5. Parabola není středově souměrná, nemá tedy střed. Říkáme proto, že je *nestředovou kuželosečkou*.

1.5.1 Rovnice paraboly

6. Odvoďte rovnici paraboly v kartézské soustavě souřadnic zvolené tak, že vrchol paraboly leží v počátku a ohnisko leží na kladné poloose x.

   Řešení: Zvolme tedy kartézskou soustavu souřadnic tak, aby vrchol V paraboly ležel v počátku, tj. $V = [0, 0]$, ohnisko F na kladné poloose x, tj. $F = \left[\frac{p}{2}, 0\right]$. Abychom nemuseli v průběhu odvození pracovat se zlomky, označme $e = \frac{p}{2}$; souřadnice ohniska tedy budou $F = [e, 0]$. Souřadnice obecného bodu paraboly nechť jsou $X = [x, y]$. Řídicí přímka bude kolmá k ose x a bude procházet bodem $[-e, 0]$, $e > 0$; její rovnice tak bude $d\colon x + e = 0$. Potom:
   $$|XF| = |Xd| \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = x + e\,.$$

Umocněním na druhou dostaneme

$$(x-e)^2+y^2=(x+e)^2$$
$$x^2-2ex+e^2+y^2=x^2+2ex+e^2$$
$$y^2=4ex\,.$$

Vzhledem k označení $e=\frac{p}{2}$ máme $p=2e$ a rovnice paraboly přejde na tvar

$$\boxed{y^2=2px\,.}$$

1.5.2 Rovnice tečny paraboly

Najděme nyní rovnici tečny paraboly. Předně si musíme uvědomit, že v euklidovské rovině $\mathbb{E}_2$ není parabola uzavřenou křivkou. Mohou tedy existovat i jiné přímky než tečny, které mají s parabolou jediný společný bod. Jsou to přímky rovnoběžné s osou paraboly.

Tečnu paraboly můžeme tedy definovat jako *přímku, která není rovnoběžná s osou paraboly a má přitom s parabolou jediný společný bod.*

Najděme nyní rovnici tečny t paraboly v jejím bodě $T=[x_0,y_0]$, pro jednoduchost uvažujme parabolu o rovnici $y^2=2px$. Pro souřadnice bodu T ležícím na této parabole tedy platí: $y_0^2=2px_0$.

Předně je tato tečna přímkou procházející bodem $T=[x_0,y_0]$, má tedy rovnici ve tvaru

$$t\colon y-y_0=k\,(x-x_0)\,.$$

Jediným neznámým koeficientem je tu k, který určíme z podmínky existence jediného společného bodu přímky t a paraboly, tedy z existence jediného řešení soustavy

$$y^2=2px,\qquad y-y_0=k\,(x-x_0).$$

Lze ukázat, že z této podmínky plyne:

$$\boxed{k=\frac{p}{y_0}\,.}$$

Přímka t nesmí být rovnoběžná s osou paraboly, která splývá s osou x, tj. $k\neq 0$. Případ tečny ve vrcholu (tj. $y_0=0$, tečna je vertikální přímkou bez směrnice) je třeba ošetřit zvlášť.

Můžeme tedy psát rovnici tečny:

$$t\colon y-y_0=k\,(x-x_0)\,,\quad \text{kde}\quad k=\frac{p}{y_0}\,,$$

celkem tedy

$$t\colon y-y_0=\frac{p}{y_0}\,(x-x_0)\,.$$

Tuto rovnici ještě trochu upravíme:

$$yy_0-y_0^2=p\,(x-x_0),$$
$$yy_0-2px_0=p\,(x-x_0),$$
$$yy_0=px-px_0+2px_0,$$

a dostaneme rovnici tečny paraboly $y^2=2px$ v jejím bodě $T=[x_0,y_0]$:

$$\boxed{yy_0=p\,(x+x_0)\,.}$$

Tato rovnice zahrnuje i vertikální tečnu $t_V\colon x=0$ ve vrcholu $V=[0,0]$ paraboly $y^2=2px$, neboť pro $T=V=[0,0]$ skutečně dostáváme (připomeňme, že parametr $p\neq 0$):

$$y\cdot 0=p\,(x+0)\,,$$

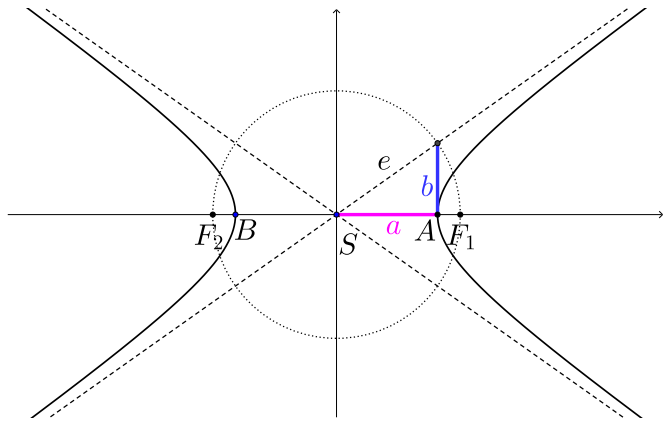
což je rovnice přímky $x=0$.

1.6 Hyperbola

1. Zformulujte planimetrickou definici hyperboly.

   Řešení: Mějme dánu kladnou konstantu c a dva pevně zadané body F_1, F_2 v rovině, přičemž $|F_1F_2| > c$. Potom *hyperbolou* rozumíme množinu všech bodů X v této rovině, které mají absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností od bodů F_1 a F_2 rovnu této konstantě c, tj.

$$\big|\,|F_1X| - |F_2X|\,\big| = c\,.$$



2. Body F_1 a F_2 se nazývají *ohniska* hyperboly. Střed S úsečky F_1F_2 se nazývá *střed* hyperboly. Vzdálenost $|SF_1|$ (která je rovna $|SF_2|$) se nazývá *excentricita* (někdy též *výstřednost*) hyperboly a značí se e.

3. Přímka F_1F_2 se nazývá *hlavní osa* hyperboly. Její průsečíky s hyperbolou (označené na obrázku A, B) se nazývají *vrcholy* hyperboly.

   Vzdálenost $|SA|$ vrcholu hyperboly od jejího středu (která je také rovna $|SB|$) se nazývá *hlavní poloosa* hyperboly a značí se a.

4. Osa úsečky F_1F_2 se nazývá *vedlejší osa* hyperboly.
   Hyperbola (narozdíl od elipsy, která má vedlejší vrcholy) nemá žádné průsečíky s vedlejší osou, proto se hovoří o bodech A a B jako o vrcholech hyperboly, nikoli jako o hlavních vrcholech hyperboly.

   Vzdálenost rovná číslu $\sqrt{e^2 - a^2}$ se nazývá *vedlejší poloosa* hyperboly a značí se b. Motivace k vyslovení této definice bude zřejmá

   - po zavedení asymptot hyperboly (viz též barevný pravoúhlý trojúhelník na obrázku výše: aplikací Pýthagorovy věty dostáváme $e^2 = a^2 + b^2$)
   - a po odvození rovnice hyperboly (díky označení $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ bude formálně stejná jako rovnice elipsy, jen se znaménkem minus: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$).

5. Z obrázku je ihned patrné, že konstanta c je rovna délce úsečky AB (ta je rovna $2a$); stačí porovnat případy, kdy bod X je vrcholem hyperboly a uvědomit si, že hyperbola je středově souměrná podle svého středu. Platí tedy:

$$c = 2a\,.$$

   Proto se vztah z planimetrické definice hyperboly často uvádí přímo ve tvaru

$$\boxed{\big|\,|F_1X| - |F_2X|\,\big| = 2a\,.}$$

6. Hyperbola není souvislou křivkou, ale rozpadá se na dvě části, které se nazývají *větve* hyperboly.

   - Jedna větev se skládá z bodů X roviny, pro něž platí $|F_1X| - |F_2X| = 2a$. Tato větev leží v polorovině určené hraniční přímkou, která je vedlejší osou hyperboly, a vnitřním bodem F_2.

- Druhá větev se skládá z bodů X roviny, pro něž platí $|F_2X| - |F_1X| = 2a$. Tato větev leží v polorovině určené hraniční přímkou, která je vedlejší osou hyperboly, a vnitřním bodem F_1.

7. Odvození rovnice hyperboly nebudeme provádět, postup je analogický odvození rovnice elipsy.

1.6.1 Rovnice asymptot hyperboly

8. Odvoďte rovnice asymptot hyperboly.

Řešení: Uvažujme hyperbolu, která má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Najdeme rovnici její asymptoty, přesněji najdeme rovnici přímky, která prochází středem této hyperboly (tedy počátkem) a při postupném otáčení kolem počátku najdeme takovou její směrnici, kdy přestane mít s hyperbolou právě dva průsečíky a nebude mít průsečík žádný. Rovnice přímky procházející počátkem je

$$y = kx\,.$$

Společné body této přímky a hyperboly najdeme tak, že dosadíme:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(kx)^2}{b^2} = 1\,.$$

Tuto kvadratickou rovnici ještě upravíme:

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{k^2}{b^2}\right) x^2 = 1\,.$$

Pokud je koeficient u x^2 kladný, má tato rovnice právě dva reálné kořeny. Bude-li koeficient nulový, přejde rovnice ve tvar $0 = 1$, takže nemá žádný reálný kořen. V případě záporného koeficientu rovnice také nebude mít žádný reálný kořen. Mezníkem je tedy případ, kdy koeficient u x^2 je nulový, tj.

$$\frac{1}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 0\,.$$

Odtud již snadno vyjádříme k^2:

$$k^2 = \frac{b^2}{a^2}\,.$$

Přímka $y = kx$ je tedy asymptotou uvažované hyperboly, je-li

$$k = \frac{b}{a}\,,$$

nebo

$$k = -\frac{b}{a}\,,.$$

Hyperbola má tedy právě dvě asymptoty, jejich rovnice jsou $y = \pm\frac{b}{a}x$, neboli

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

a

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0\,.$$

Tyto dvě různoběžky lze popsat jedinou rovnicí, stačí si uvědomit, že součin je roven nule právě tehdy, když je alespoň jeden z činitelů roven nule:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0\,,$$

neboli

$$\boxed{\mathrm{a}_{1,2}: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0\,.}$$

1.7 Poznámky k definicím: osa, poloosa, střed

1. Už u elipsy jsme zdůraznili, že hlavní i vedlejší osa je přímka, zatímco hlavní i vedlejší poloosa je kladné reálné číslo (neboť je to vzdálenost).

2. Osa kuželosečky je přímka, neboť za definicí osy stojí jedna základní idea, která je platná pro elipsu, hyperbolu i parabolu: je to **osa souměrnosti** dané kuželosečky.

3. Poloosa není příslušná úsečka, ale kladné reálné číslo, neboť:

   - u elipsy by nebyla jednoznačně definována (takové úsečky by byly dvě: AS a SB),
   - u hyperboly by neexistovala vedlejší poloosa (pokud by poloosou měla být úsečka s krajními body, kterými jsou střed kuželosečky a některý z vrcholů kuželosečky).

   Taková definice je praktická, neboť nejčastěji potřebujeme pracovat právě s kladnými reálnými čísly a a b, které se vyskytují v rovnicích elipsy a hyperboly.

4. Střed je sice u elipsy a hyperboly definován jako střed úsečky F_1F_2, za jeho definicí však opět stojí jedna základní idea: je to **střed souměrnosti** dané kuželosečky. Středové kuželosečky jsou tedy ty, které jsou středově souměrné.

   - Uvědomme si, že elipsa a hyperbola nejsou jedinými středovými kuželosečkami. Zahrneme-li do našich úvah i singulární kuželosečky, dostaneme další středové kuželosečky. Například dvojice různoběžek
   $$(x - y) = 0 \quad \text{a} \quad (x + y) = 0\,,$$
   které lze popsat jedinou rovnicí
   $$x^2 - y^2 = 0\,,$$
   tvoří středovou kuželosečku, středem je jejich průsečík.
   - Existují kuželosečky, které mají dokonce nekonečně mnoho středů: např. dvojnásobná přímka. Příkladem mohou být singulární kuželosečky s rovnicí
   $$x^2 = 0\,,$$
   nebo
   $$y^2 = 0\,,$$
   nebo třeba
   $$(x - y + 3)^2 = 0\,.$$

Kapitola 2

Kružnice

2.1 Různé charakterizace kružnice

I. Kružnice je standardně definována jako množina všech bodů X v rovině, které mají od daného bodu S (nazývá se střed kružnice) vzdálenost rovnou dané kladné konstantě r (nazývá se poloměr kružnice). Dostáváme tak základní charakterizaci kružnice:

$$\boxed{|XS| = r\,.}$$

Ve zbytku této kapitoly budeme bez újmy na obecnosti pro jednoduchost uvažovat pouze kružnici se středem v počátku.

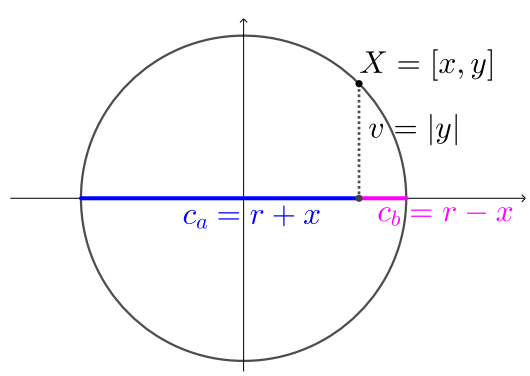
II. Zvolíme-li tedy kartézskou soustavu souřadnic tak, že $S = [0, 0]$ a označíme-li souřadnice bodu $X = [x, y]$, můžeme snadno odvodit rovnici kružnice v této kartézské soustavě souřadnic:

$$|XS| = r \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 = r^2\,.}$$

Všimněme si, že vyjádření vzdálenosti bodu od počátku je odvozeno na základě Pýthagorovy věty. Právě uvedené odvození je tedy založeno na Pýthagorově větě.

III. Eukleidova věta o výšce – „věta o kružnici“: Na kružnici však můžeme pohlížet i takto: pomocí Eukleidovy věty o výšce (z Thalétovy věty plyne, že trojúhelník nad průměrem kružnice je pravoúhlý) můžeme vyjádřit přímo vzdálenost v bodu X od osy x:

$$v^2 = c_a \cdot c_b \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 = (r + x) \cdot (r - x) \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{y^2 = r^2 - x^2\,.}$$



S trochou nadsázky tedy můžeme na Eukleidovu větu o výšce pohlížet spíše jako na větu o kružnici (umožňuje totiž přímo charakterizovat y-ovou souřadnici bodu kružnice) než jako na větu o pravoúhlém trojúhelníku.

2.2 Mocnost bodu ke kružnici a rovnice kružnice

- **Definice mocnosti:** Mocnost bodu M ke kružnici $k(S,r)$ (značíme $m(M,k)$) se často zavádí přímo jako číslo
$$m(M,k) = |MS|^2 - r^2\,.$$
Tento postup je sice rychlý, je však nutné, aby mu předcházela řádná motivace k zavedení tohoto pojmu. Náležitý postup naznačíme níže. Nyní se však podívejme na geometrickou interpretaci tohoto výrazu v rámci analytické geometrie.

- **Mocnost bodu ležícího na kružnici:** Leží-li bod M přímo na kružnici $k(S,r)$, je $|MS|$ rovna poloměru r a platí
$$m(M,k) = |MS|^2 - r^2 = r^2 - r^2 = 0\,.$$
Jelikož platí i opačná implikace (je-li $|MS|$ rovna poloměru r, pak $M \in k(S,r)$), můžeme mocnost bodu ke kružnici použít k charakterizaci bodů ležících na kružnici:
$$M \in k(S,r) \quad \Longleftrightarrow \quad m(M,k) = 0\,.$$
Pro zajímavost rozeberme i případ, kdy bod M neleží na kružnici $k(S,r)$.

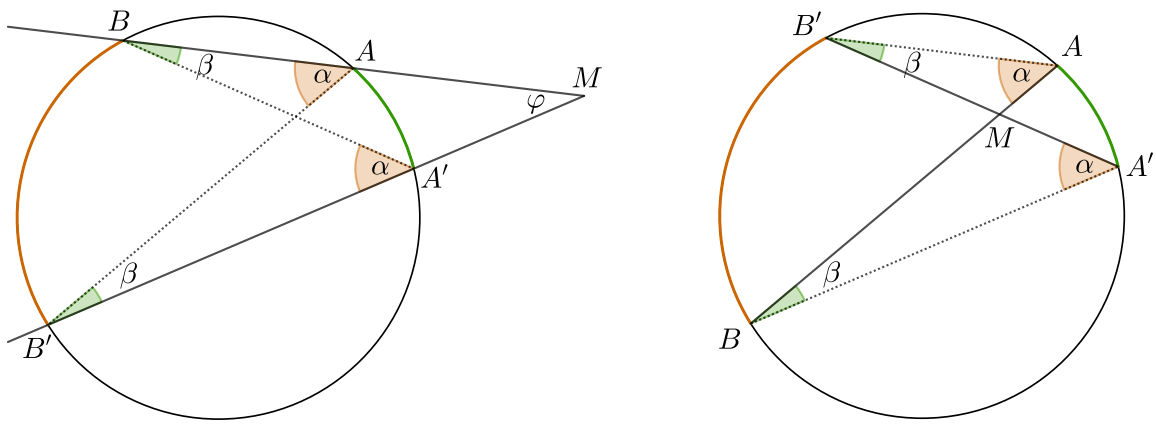
- **Mocnost bodu neležícího na kružnici:** Leží-li bod M ve vnější oblasti kružnice $k(S,r)$, je $|MS| > r$ a platí
$$m(M,k) = |MS|^2 - r^2 > 0\,.$$
Pokud naopak bod M leží ve vnitřní oblasti kružnice $k(S,r)$, je $|MS| < r$ a platí
$$m(M,k) = |MS|^2 - r^2 < 0\,.$$

- **Zápis pomocí souřadnic:** Pokusme se předchozí rovnici zapsat pomocí souřadnic. Zvolme pro jednoduchost kartézskou soustavu souřadnic tak, že střed S bude ležet v počátku, tj. $S = [0,0]$. Bod M nechť má souřadnice $M = [x,y]$. Potom $|MS|^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2$ a dostaneme
$$m(M,k) = |MS|^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2\,.$$
Rovnice $m(M,k) = 0$ je tedy ekvivalentní se standardní rovnicí kružnice $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ obvykle zapisované ve tvaru:
$$x^2 + y^2 = r^2\,.$$

- **Střed neležící v počátku:** V předchozím pozorování nebylo podstatné, že jsme kartézskou soustavu zvolili tak, aby střed S kružnice ležel v počátku. Pokud by $S = [s_1, s_2]$, dostali bychom
$$m(M,k) = |MS|^2 - r^2 = (x-s_1)^2 + (y-s_2)^2 - r^2$$
a rovnice $m(M,k) = 0$ by opět přešla v obvyklou rovnici kružnice:
$$(x-s_1)^2 + (y-s_2)^2 = r^2\,.$$

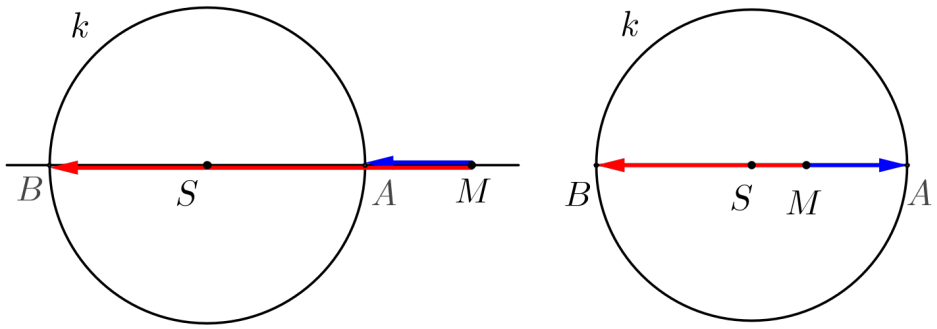
- **Závěr – interpretace výrazu v rovnici kružnice:** Pozorovali jsme, že výraz $x^2+y^2-r^2$ známý z rovnice kružnice má jasnou interpretaci: jedná se o mocnost bodu ke kružnici. Dostáváme tedy:
$$\boxed{M \in k(S,r) \quad \Longleftrightarrow \quad m(M,k) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0\,,}$$
případně $x^2+y^2-r^2 > 0$, leží-li bod o souřadnicích $[x,y]$ ve vnější oblasti kružnice, a $x^2+y^2-r^2 < 0$, leží-li $[x,y]$ ve vnitřní oblasti kružnice. Všechny tyto rovnosti i nerovnosti platí, protože
$$m(M,k) = |MS|^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2\,.$$
Analogicky pro kružnici se středem neležícím v počátku:
$$M \in k(S,r) \quad \Longleftrightarrow \quad m(M,k) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-s_1)^2 + (y-s_2)^2 - r^2 = 0\,.$$

- **Dodatek – od konstantního $|MA| \cdot |MB|$ k rovnici kružnice:** Pokud bychom neměli pojem mocnosti bodu ke kružnici zaveden výše uvedeným způsobem, ale pouze na základě toho, že *pro daný bod M (může být bodem vnější oblasti kružnice, bodem vnitřní oblasti kružnice, bodem kružnice) nezávisí hodnota součinu $|MA| \cdot |MB|$, kde A, B jsou průsečíky kružnice $k(S,r)$ s libovolnou její sečnou vedenou bodem M, na volbě této sečny,* mohli bychom i tak provést podobné odvození rovnice kružnice, jako výše. Jen je třeba mít hotov aspoň stručný rozbor všech případů:
  - Bod M leží na kružnici $k(S,r)$: součin $|MA| \cdot |MB| = 0$, neboť $M \in k(S,r)$ právě tehdy, když je M roven jednomu z bodů A, B.
  - Neleží-li M na kružnici $k(S,r)$, tak $|MA| \neq 0$ a $|MB| \neq 0$ (protože $M \neq A$ a $M \neq B$), tudíž i $|MA| \cdot |MB| \neq 0$.



Mocnost bodu M ke kružnici – pozorování.

Zvolme nyní sečnu tak, abychom mohli mocnost co nejjednodušeji vypočítat. Tomu odpovídá volba sečny procházející středem S kružnice $k(S,r)$; průsečíky této sečny s kružnicí $k(S,r)$ označme A, B a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|MA| \leq |MB|$, viz následující obrázek. Pak dostáváme: $|MA| = \big||MS| - r\big|$, $|MB| = |MS| + r$. Rozlišme nyní případy, kdy M je bodem vnitřní a vnější oblasti kružnice. Výraz $|MS| + r$ je v obou případech kladný. Avšak výraz $|MS| - r$ nabývá pro M ležící ve vnitřní oblasti kružnice záporné hodnoty; proto jsme museli užít absolutní hodnotu.



Lepším řešením problému se znaménkem pro M náležící vnitřní oblasti kružnice by bylo místo délky úsečky uvažovat délku orientované úsečky opatřenou znaménkem respektujícím její orientaci. Jelikož se pohybujeme pouze na jediné přímce AB, je situace jednoduchá. Zvolme na přímce AB libovolně orientaci (zkrátka právě jeden z vektorů $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ prohlásíme za kladně orientovaný, druhý z nich tedy bude orientován záporně).

Hezčí bude prohlásit za kladně orientovaný vektor $\overrightarrow{AB}$, neboť je souhlasný[1] s vektorem $\overrightarrow{MB}$ a hodnota výrazu $|MS| + r$ je vždy kladná. Délka orientované úsečky MB (body v tomto pořadí) pak bude tedy kladná, i když připojíme znaménko respektující orientaci (kladné).

K délce orientované úsečky MA (body v tomto pořadí) však připojíme záporné znaménko, neboť vektor $\overrightarrow{MA}$ není souhlasný s vektorem $\overrightarrow{AB}$, tato délka opatřená znaménkem tedy bude rovna přímo $|MS| - r$, neboť je tento výraz záporný.

Celkově pak platí formálně jednoduché vztahy (označíme-li délku orientované úsečky XY opatřenou znaménkem respektujícím její orientaci symbolem $|XY|_z$): $|MA|_z = |MS| - r$, $|MB|_z = |MS| + r$ a dostáváme

$$\boxed{m(M,k) = |MA|_z \cdot |MB|_z = (|MS| - r) \cdot (|MS| + r) = |MS|^2 - r^2\,.}$$

Ke stejnému výsledku bychom dospěli i v případě, že bychom zvolili opačnou orientaci, tj. za kladný bychom prohlásili vektor $\overrightarrow{BA}$. S ním souhlasný je $\overrightarrow{MA}$, naopak vektory $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{MB}$ nejsou souhlasné. Proto $|MA|_z = -(|MS| - r) > 0$, $\;|MB|_z = -(|MS| + r) < 0$ a dostáváme opět

$$m(M,k) = |MA|_z \cdot |MB|_z = [-(|MS| - r)] \cdot [-(|MS| + r)] = |MS|^2 - r^2\,.$$

Jelikož je $|MS|^2 = x^2 + y^2$ (Pýthagorova věta), dostáváme interpretaci výrazu známého z rovnice kružnice

$$m(M,k) = |MS|^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2\,,$$

a tím i výše odvozená tvrzení:

$$M \in k(S,r) \quad \Longleftrightarrow \quad m(M,k) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0\,.$$

2.2.1 Zavedení mocnosti bodu ke kružnici ve školské matematice

Výše uvedené poznámky jsou spíše komentářem k souvislosti mocnosti bodu ke kružnici a rovnice kružnice. Samotný výklad mocnosti bodu ke kružnici by mohl být veden následujícím způsobem.

I. Planimetrie: od základního pozorování k obecné definici

- **Základní pozorování:** $|MA| \cdot |MB|$ nezávisí pro daný bod M a danou kružnici na volbě sečny.
- **Náznak argumentace:** Tvrzení je založeno na podobnosti trojúhelníků, viz obrázek výše věnovaný pozorování k mocnosti bodu ke kružnici.

  Úhly při vrcholech B a B' jsou shodné, neboť přísluší stejnému oblouku (zeleně). Je-li M bodem vnější oblasti kružnice, je úhel φ při vrcholu M společný oběma trojúhelníkům, v případě, že M je bodem vnitřní oblasti kružnice, jsou úhly $\angle B'MA$ a $\angle BMA'$ při vrcholu M vrcholové, jsou tedy shodné. Dle věty *uu* tedy platí:

  $$\triangle MB'A \sim \triangle MBA'\,.$$

  Odtud plyne

  $$\frac{|MA|}{|MB'|} = \frac{|MA'|}{|MB|} \quad \Longrightarrow \quad |MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|\,.$$

- **Pokus o definici mocnosti:** Nyní začíná snaha o definici mocnosti bodu ke kružnici: součin $|MA| \cdot |MB|$ je pro dané M konstantní, může se tedy zdát, že je dobrý nápad definovat mocnost bodu M vzhledem ke kružnici $k(S,r)$ jako hodnotu součinu $|MA| \cdot |MB|$.

[1] Dva nenulové kolineární vektory budeme nazývat souhlasné, je-li jeden kladným násobkem druhého. Je zřejmé, že např. vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$ nejsou souhlasné. Je-li M bodem vnitřní oblasti kružnice, tak opět vektory $\overrightarrow{MA}$ a $\overrightarrow{MB}$ nejsou souhlasné; délky orientovaných úseček MA a MB tedy opatříme různými znaménky.

- **Výpočet mocnosti:** Hodnotu součinu $|MA| \cdot |MB|$ lze relativně snadno vypočítat v případě, kdy sečna prochází středem S kružnice $k(S,r)$:

$$|MA| \cdot |MB| = \big||MS| + r\big| \cdot \big||MS| - r\big| = \big||MS|^2 - r^2\big|$$

  Vidíme, že hodnota tohoto součinu závisí pouze na vzdálenosti bodu M od středu S kružnice $k(S,r)$ a na jejím poloměru r. Vyjadřuje tedy polohu bodu M vzhledem ke kružnici $k(S,r)$. Na soustředných kružnicích (tj. pro pevné $|MS|$) je konstantní.

- **Pozorování hodnot** $|MS|^2 - r^2$ v závislosti na poloze bodu M vzhledem ke kružnici $k(S,r)$:
  - leží-li bod M na kružnici, je $|MA| \cdot |MB| = \big||MS|^2 - r^2\big| = 0$, neboť $M \in k(S,r)$ právě tehdy, když je M roven jednomu z bodů A, B.
  - Neleží-li M na kružnici $k(S,r)$, tak $|MA| > 0$ a $|MB| > 0$ (protože $M \neq A$ a $M \neq B$), tudíž i $|MA| \cdot |MB| = \big||MS|^2 - r^2\big| > 0$.

  Všimněme si, že hodnota součinu nabývá svého minima (nula) právě pro $M \in k(S,r)$.

- **Problémy s definicí:**
  - Bohužel neplatí, že by existovala bijekce mezi vzdáleností $|MS|$ a hodnotou součinu $|MA| \cdot |MB| = \big||MS|^2 - r^2\big|$, problémem je absolutní hodnota. Pokud bychom uvažovali přímo $|MS|^2 - r^2$, už bychom bijekci dostali.
  - Absolutní hodnota ve výrazu $\big||MS|^2 - r^2\big|$ je navíc formální komplikací, která je sice drobná, ale vlastně zbytečná.

  Zdá se tedy, že výraz bez absolutní hodnoty $|MS|^2 - r^2$ by charakterizoval polohu bodu M vzhledem k dané kružnici $k(S,r)$ lépe, než $|MA| \cdot |MB| = \big||MS|^2 - r^2\big|$.

  Součin $|MA| \cdot |MB|$ lze přitom zachovat: stačí, když budeme místo délky úsečky uvažovat *orientovanou délku úsečky*; pak bude platit:

$$|MA| \cdot |MB| = |MS|^2 - r^2\,.$$

  Pro samotnou definici použijeme přímo vztahu $|MS|^2 - r^2$, neboť je jednoduchý a lze jej relativně dobře vypočítat. Navíc nezávisí na tvrzení o konstantnosti součinu $|MA| \cdot |MB|$ (bez platnosti tohoto tvrzení by však tento pojem neměl valného smyslu).

- **Definice:** mocností bodu M vzhledem ke kružnici $k(S,r)$, značíme ji $m(M,k)$, rozumíme reálné číslo

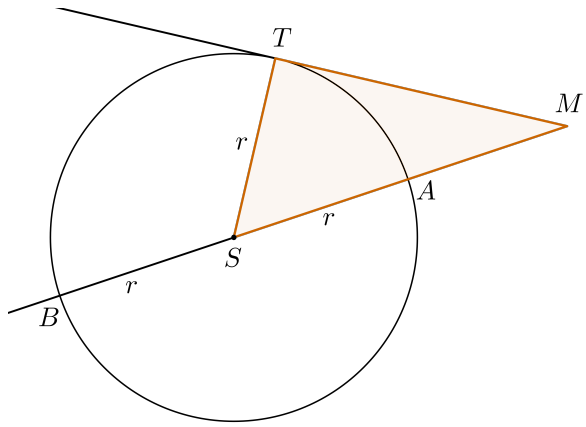
$$m(M,k) = |MS|^2 - r^2\,.$$

- **Prošetření případu tečny:** Je-li M bodem vnější oblasti kružnice $k(S,r)$, tj. $|MS| > r$, můžeme kromě sečen uvažovat i tečnu. Ukažme, že pak $|MA| \cdot |MB| = |MT|^2$. Názorně si to můžeme představit tak, že body A a B splynou s bodem dotyku T.

  Skutečně, z Pýthagorovy věty plyne:

$$|MT|^2 = |MS|^2 - r^2\,,$$

  což je samozřejmě také rovno $\big(|MS| - r\big) \cdot \big(|MS| + r\big) = |MA| \cdot |MB|$.

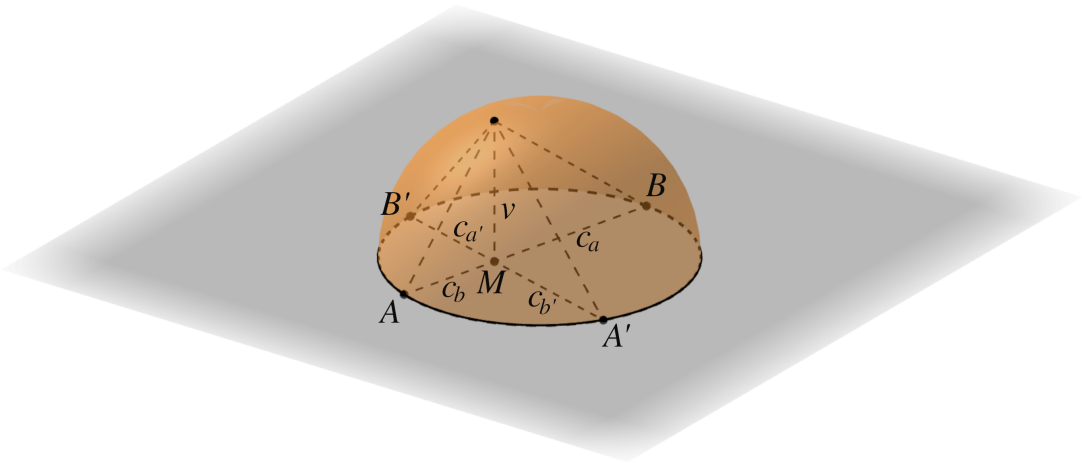


II. Analytická geometrie: interpretace rovnice kružnice

Didaktický postup shrneme jen v několika stručných bodech.

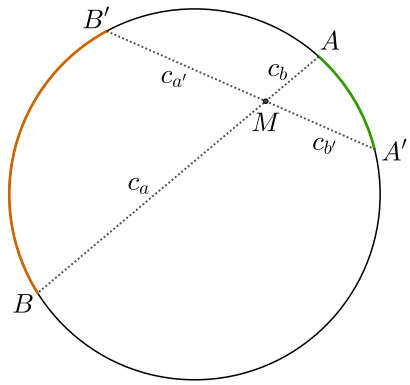
- standardní odvození rovnice kružnice pomocí Pýthagorovy věty
- návrat k učivu v rámci analytické geometrie (cyklický postup)
- otázka po geometrické interpretaci levé strany $x^2 + y^2 - r^2$ rovnice kružnice
- $m(X, k) = |XS|^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2$, výraz v rovnici kružnice je tedy přímo mocností bodu $X = [x, y]$ vzhledem k této kružnici $k(S, r)$
- $|XS|^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2$, získáváme další argument pro obecnou definici $m(M, k)$ pomocí výrazu $|XS|^2 - r^2$ bez absolutní hodnoty

Poznámka: Leží-li bod M ve vnitřní oblasti kružnice, můžeme součiny $|MA| \cdot |MB|$ interpretovat takto: nad kružnicí $k(S, r)$ si představme polosféru, v bodě M vztyčme výšku v (sahající až k polosféře) kolmou na rovinu kružnice.



Nyní veďme řez polosférou obsahující výšku v a body A, B (tudíž obsahující i bod M). Tento řez bude tvořen půlkružnicí (z polosféry) a její průměr bude právě AB. Tento průměr bude rozdělen bodem M a v něm bude vztyčena výška. Dle Eukleidovy věty o výšce tak dostaneme:

$$v^2 = c_a \cdot c_b = |MA| \cdot |MB| \,.$$



Teď si stačí uvědomit, že řez jsme mohli bodem M (a výškou v) vést libovolným směrem, stále by však byl dle Eukleidovy věty o výšce součin roven druhé mocnině stále téže výšky v:

$$|MA| \cdot |MB| = c_a \cdot c_b = v^2 = c_{a'} \cdot c_{b'} = |MA'| \cdot |MB'|\,.$$

Odtud plyne elegantně konstantnost součinů

$$|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|\,.$$

2.3 Apollóniova kružnice

Věnujme se nyní úloze *najít všechny body X v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou pevně zadaných bodů A, B.* Je tedy třeba najít všechny body X, $X \neq A$ a $X \neq B$, vyhovující pro dané $c > 0$ rovnici

$$\frac{|XA|}{|XB|} = c, \qquad c > 0.$$

Řešení provedeme analytickou metodou. Zvolme tedy pro jednoduchost bez újmy na obecnosti kartézskou soustavu souřadnic tak, že $A = [-1, 0]$, $B = [0, 0]$ a označme souřadnice bodu $X = [x, y]$. Potom

$$\frac{|XA|}{|XB|} = c \quad \Longleftrightarrow \quad |XA| = c \cdot |XB| \quad \Longleftrightarrow \quad |XA|^2 = c^2 \cdot |XB|^2\,,$$

což snadno přepíšeme pomocí souřadnic:

$$(x+1)^2 + y^2 = c^2 \cdot (x^2 + y^2)\,.$$

Tuto rovnici nyní upravme:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = c^2 \cdot (x^2 + y^2)$$
$$(1 - c^2)x^2 + 2x + 1 + (1 - c^2)y^2 = 0$$

Je-li $c = 1$, přejde tato rovnice na tvar

$$2x + 1 = 0\,,$$

což je rovnice přímky $x = \frac{-1}{2}$. Tato přímka je osou úsečky AB.

Je-li $c \neq 1$, můžeme celou rovnici vydělit $1 - c^2$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{1}{1 - c^2} + \frac{1}{1 - c^2} + y^2 = 0\,,$$

provést doplnění na čtverec

$$\left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{1-c^2} + \left(\frac{1}{1-c^2}\right)^2\right) + \frac{1}{1-c^2} + y^2 = \left(\frac{1}{1-c^2}\right)^2$$

a mírně upravit

$$\left(x + \frac{1}{1-c^2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{(1-c^2)^2} - \frac{1}{1-c^2}\,.$$

Konstanta na pravé straně je rovna

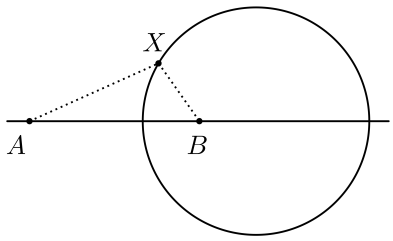
$$\frac{1}{(1-c^2)^2} - \frac{1}{1-c^2} = \frac{1-(1-c^2)}{(1-c^2)^2} = \frac{c^2}{(1-c^2)^2}\,.$$

Dostali jsme tak rovnici

$$\boxed{\left(x + \frac{1}{1-c^2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{(1-c^2)^2}\,.}$$

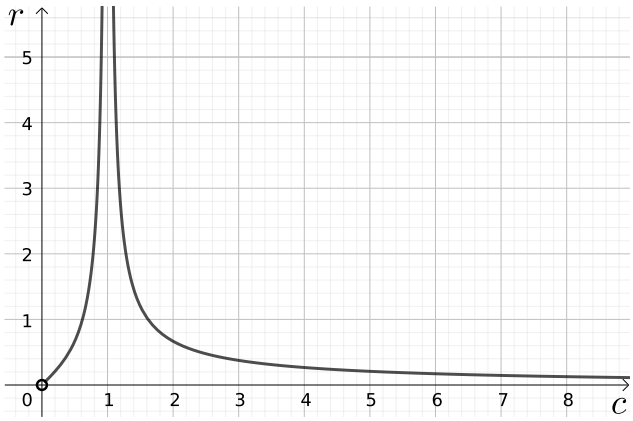
Tato rovnice je rovnicí kružnice se středem $S = \left[-\frac{1}{1-c^2}, 0\right]$ a poloměrem $\frac{c}{|1-c^2|}$.

Situace pro $c = 2$ je naznačena na následujícím obrázku.



Zjistili jsme tedy, že hledaná množina bodů je kružnicí; nazývá se *Apollóniova kružnice* po Apollóniovi z Pergé (kolem roku 200 př. Kr.).

Na následujícím obrázku je znázorněna závislost poloměru Apollóniovy kružnice na kladném c, tedy závislost $r = \frac{c}{|1-c^2|}$.



Kapitola 3

Kuželosečky obecně

Jednotlivé reálné regulární kuželosečky (elipsu, parabolu, hyperbolu) jsme definovali v úvodní kapitole. Tyto definice byly založeny na vzájemné poloze povrchových přímek kuželové plochy a roviny ϱ řezu, v níž leží kuželosečka (rovina ϱ protíná všechny površky – elipsa, rovina ϱ je rovnoběžná s jedinou površkou – parabola, rovina ϱ je rovnoběžná s právě dvěma površkami – hyperbola).

Definici všech tří typů reálných regulárních kuželoseček lze založit i na jiných principech. Jednou z možností je např. využití nevlastních bodů, pokud pracujeme v projektivně rozšířené afinní (či eukleidovské) rovině. Reálnou regulární kuželosečkou pak rozumíme obraz kružnice ve středové kolineaci.[1] Jednotlivé typy kuželoseček pak lze klasifikovat podle počtu jejich nevlastních bodů („bodů v nekonečnu“):

- žádný nevlastní bod: elipsa,
- jeden nevlastní bod: parabola,
- dva nevlastní body: hyperbola.

Tato klasifikace vlastně kopíruje klasifikaci předchozí: nevlastní body odpovídají rovnoběžným povrchovým přímkám, neboť mají s rovinou řezu ϱ průsečík v nevlastním bodě.

Reálné regulární kuželosečky lze také definovat pomocí jednoho ohniska a řídicí přímky; o této jednotné definici pojednáme níže.

Nyní se však budeme věnovat tzv. planimetrickým definicím kuželoseček.

3.1 Planimetrické definice kuželoseček a řezy kuželové plochy

Ve středoškolských učebnicích se vyskytují většinou tzv. *planimetrické definice* kuželoseček. Nazývají se tak proto, že pracují pouze s body roviny, v níž se definovaná kuželosečka nachází.

Definice: Mějme dánu kladnou konstantu c a dva pevně zadané body F_1, F_2 v rovině, přičemž $|F_1F_2| < c$. Potom *elipsou* rozumíme množinu všech bodů X v této rovině, které mají součet vzdáleností od bodů F_1 a F_2 roven konstantě c, tj.

$$|F_1X| + |F_2X| = c\,.$$

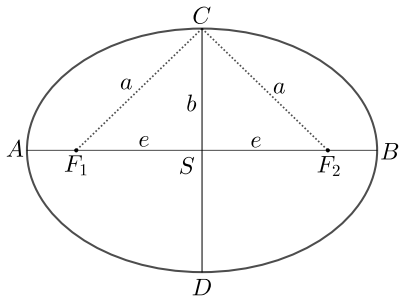
Z následujícího obrázku je ihned patrné, že konstanta c je rovna $|AB|$; stačí porovnat případy, kdy bod X je hlavním a vedlejším vrcholem elipsy. Označíme-li hlavní poloosu a, je délka $|AB|$ rovna $2a$ a platí:

$$c = 2a\,.$$

[1] Rovina, v níž tato kružnice leží, neprochází středem této kolineace, jinak by se už nejednalo o regulární kuželosečku.

Proto se vztah z planimetrické definice elipsy často uvádí rovnou ve tvaru

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a\,.$$



Dodejme ještě, že body F_1, F_2 se nazývají *ohniska* elipsy. Střed úsečky F_1F_2 se nazývá *střed elipsy*, značíme jej zpravidla S. Vzdálenost $|SF_1|$ (která je rovna $|SF_2|$) se nazývá *excentricita elipsy* a značí se e.

Zajímavé je uvědomit si, jak by vypadala množina všech bodů X v rovině splňujících podmínku $|F_1X| + |F_2X| = 2a$ v případě, že $|F_1F_2| = 2a$ (úsečka F_1F_2) a pro $|F_1F_2| > 2a$ (prázdná množina).

Definice: Mějme dánu kladnou konstantu c a dva pevně zadané body F_1, F_2 v rovině, přičemž $|F_1F_2| > c$. Potom *hyperbolou* rozumíme množinu všech bodů X v této rovině, které mají absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností od bodů F_1, F_2 roven konstantě c, tj.

$$\big|\,|F_1X| - |F_2X|\,\big| = c\,.$$

Definice: Mějme v rovině dánu přímku d (tzv. *řídicí přímka* neboli *directrix*) a bod F, který na této přímce neleží ($F \notin d$). Potom *parabolou* rozumíme množinu všech bodů X v této rovině, které mají stejnou vzdálenost od přímky d a od bodu F, tj.

$$|FX| = |Xd|\,.$$

Výhody těchto definic jsou zřejmé: není potřeba pracovat se stereometrickou situací, jednotlivé kuželosečky jsou charakterizovány jednoduchou podmínkou pro body v rovině (proto se také tyto definice nazývají *planimetrické*). Snadno pak také lze odvodit rovnice těchto kuželoseček.

Nevýhody těchto definic jsou však zásadní: není zřejmé, proč jsou křivky definované jako množiny bodů v rovině splňující uvedené charakteristické vlastnosti *kuželo-sečkami*, z celé teorie se zcela vytratil základní prvek – zkoumání řezů *kuželové plochy*.

Tento problém se týká i didaktického pojetí látky. Na žáky nepůsobí dobře, když se na jedné straně učebnice hovoří o kuželosečkách jako řezech kuželové plochy, na další straně se však bez jakéhokoli upozornění formulují definice kuželoseček, které s kuželovou plochou zdánlivě vůbec nesouvisejí.

Pokud se na úvod povídání o kuželosečkách svítí na stěnu svítilnou vytvářející při styku kuželu světla a rovné stěny kuželosečky, působí to na žáky názorně. Následující netriviální skok ke kuželosečkám jako jistým množinám bodů v rovině definovaným pomocí vzdálenosti však působí nekonzistentně a rušivě.

Pomoc je však překvapivě snadná. Zdánlivě složitě vypadající stereometrická situace je naštěstí poměrně přehledná a snadná. Žákům tedy lze poměrně jednoduše vyplnit vzniklou nepříjemnou mezeru a podmínky z planimetrických definic odvodit. Není přitom potřeba provádět kompletní důkazy, postačuje subdůkaz zvýrazňující základní myšlenku.

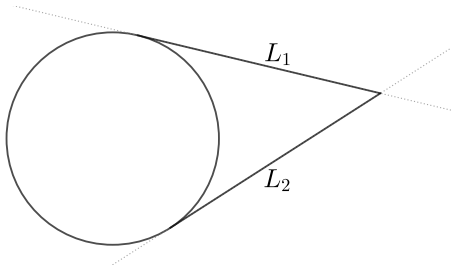
3.1.1 Quételetova–Dandelinova věta pro elipsu

Naznačený problém souvislosti planimetrických definic kuželoseček a kuželoseček jako řezů rotační kuželové plochy řeší Quételetova–Dandelinova věta. Znění i srozumitelný důkaz této věty pro elipsu, parabolu i hyperbolu je zde:

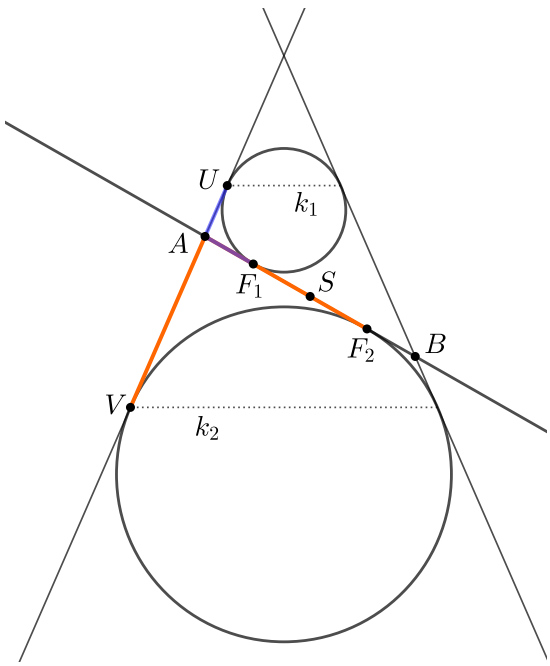
https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/vera.setmanukova.dp/?page=qdvK&pqdv=1.

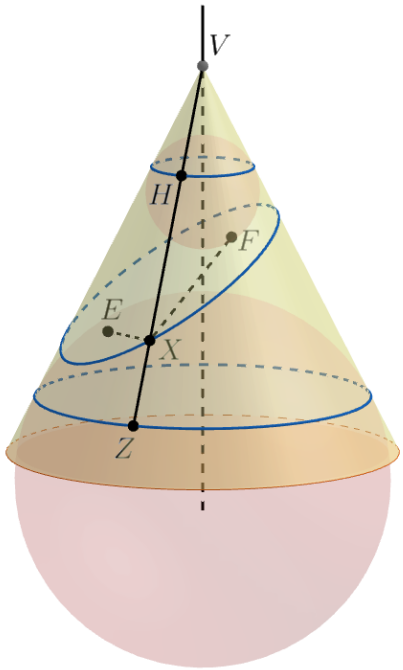
Doporučujeme čtenáři, aby se se zněním všech tří vět i s jejich důkazy seznámil. Zde uvedeme jen stručné didaktické poznámky k elipse. Je nutno upozornit, že budeme pracovat výhradně s rotační kuželovou plochou.

- QD věta má ohromnou výhodu v tom, že názorně ukazuje, kde na rovině ϱ řezu rotační kuželové plochy $\mathcal{C}$ jsou ohniska.
- Poloha těchto ohnisek je určena přímo fascinujícím způsobem: do „komůrky“ vytvořené kuželovou plochou a rovinou ϱ vepíšeme kouli. Podobně i „pod“ tuto rovinu řezu vepíšeme do $\mathcal{C}$ kouli, která se roviny řezu ϱ dotýká v jediném bodě. Každá z těchto koulí se tedy dotýká roviny ϱ v jediném bodě. Ukážeme, že tyto body jsou právě ohniska elipsy, tj. body, od nichž má bod elipsy konstantní součet vzdáleností.
- Důkaz QD věty stojí na jednoduchém planimetrickém pozorování: vyznačené délky L_1 a L_2 na tečnách jsou si rovny.



- Podstata důkazu je dobře patrná např. v bodě A: jelikož je $|AF_1| = |AU|$ a $|AF_2| = |AV|$, dostáváme $|AF_1| + |AF_2| = |AU| + |AV| = |UV|$. Podobně bychom získali $|XF_1| + |XF_2| = |U_XV_X|$. Jelikož jsou kružnice, v nichž se vepsané sféry dotýkají kuželové plochy $\mathcal{C}$, umístěny rovnoběžně, je $|U_XV_X|$ konstantní.





Na druhém obrázku je dobře vidět jádro důkazu Quételetovy–Dandelinovy věty:

$$|XE| = |XZ|, \;\; |XF| = |XH| \quad \Longrightarrow \quad |XE| + |XF| = |XZ| + |XH| = |HZ| = \text{konst.}$$

- Dokažme ještě, že $|AF_1| = |F_2B|$. Stačí předchozí formule napsat pro body A i B:

$$\begin{aligned} |UV| &= |AF_1| + |AF_2| = |AF_1| + (|AF_1| + |F_1F_2|) = 2 \cdot |AF_1| + |F_1F_2|\,, \\ |UV| &= |BF_1| + |BF_2| = (|BF_2| + |F_1F_2|) + |BF_2| = 2 \cdot |BF_2| + |F_1F_2|\,. \end{aligned}$$

  Odečtením obou rovností (stačí uvažovat začátek a konec) dostaneme:

$$0 = 2 \cdot |AF_1| - 2 \cdot |F_2B|\,,$$

  odkud již plyne

$$\boxed{|AF_1| = |F_2B|\,.}$$

- Z rovnosti $|AF_1| = |F_2B|$ ihned plyne, že konstanta $|UV|$ je rovna právě délce $|AB|$, tj. $2a$:

$$|UV| = |AF_1| + |AF_2| = |F_2B| + |AF_2| = |AB| = 2a\,.$$

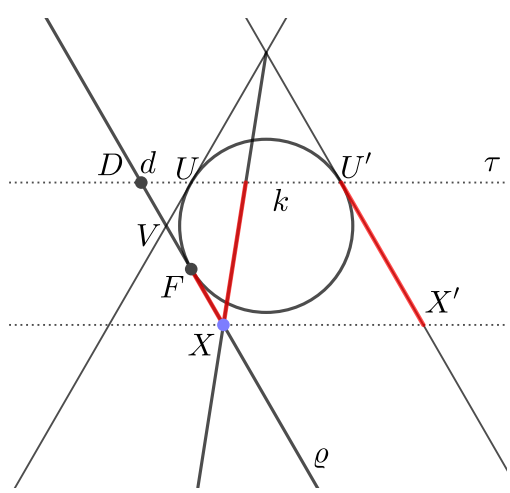
  Základní vztah z planimetrické definice elipsy tedy můžeme psát ve tvaru

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a\,.$$

3.1.2 Quételetova–Dandelinova věta pro parabolu

Modifikace pro parabolu je snadná. Jelikož je rovina řezu kuželové plochy rovnoběžná s právě jednou povrchovou přímkou, dostáváme:

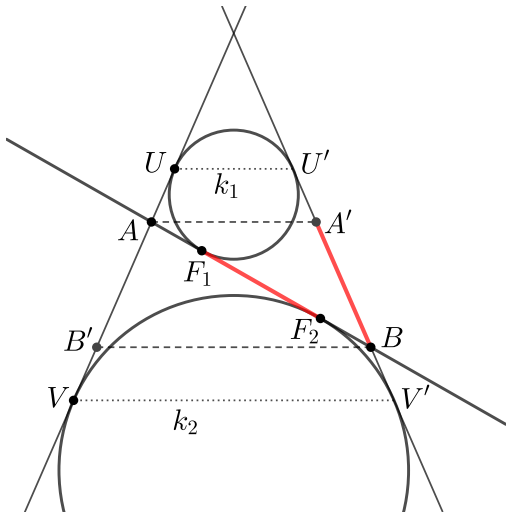
$$|XF| = |Xk| = |X'U'| = |XD| = |Xd|\,.$$



3.2 Vzdálenost ohnisek elipsy znázorněná na kuželové ploše

Na následujícím obrázku můžeme pozorovat:

- $|BF_1| = |BU'|$ (vzdálenosti na tečnách jsou si rovny),
- $|BF_2| = |BV'|$ (vzdálenosti na tečnách jsou si rovny),
- $|U'V'| = |AB| = 2a$ (dokázáno v rámci Quételetovy-Dandelinovy věty),
- $|BV'| = |A'U'|$ (jako dodatek k QD větě dokázáno, že $|AF_1| = |F_2B|$, přímo z důkazu QD věty plyne: $|AF_1| = |AU|$, což je rovno $|A'U'|$; podobně $|F_2B| = |BV'|$).



Nyní můžeme dopočítat vzdálenost ohnisek:

$$|F_1F_2| = |BF_1| - |BF_2| = |BU'| - |BV'| = |BU'| - |A'U'| = |A'B|.$$

Dostáváme tak vyjádření vzdálenosti ohnisek elipsy:

$$\boxed{|F_1F_2| = |A'B|.}$$

3.3 Parabola jako „limitní případ“ elipsy

Na parabolu můžeme pohlížet jako na elipsu, jejíž jedno z ohnisek (v obrázku $F_2 = [f_2, 0]$) „pošleme do nekonečna“. Ilustrovat to můžeme pomocí následujícího výpočtu. Klíčové formule barevně zvýrazňujeme.

Rovnice elipsy, jejíž jeden hlavní vrchol leží v počátku (kvůli snadnému porovnání s rovnicí paraboly, volíme tedy $S = [a, 0]$), má tvar

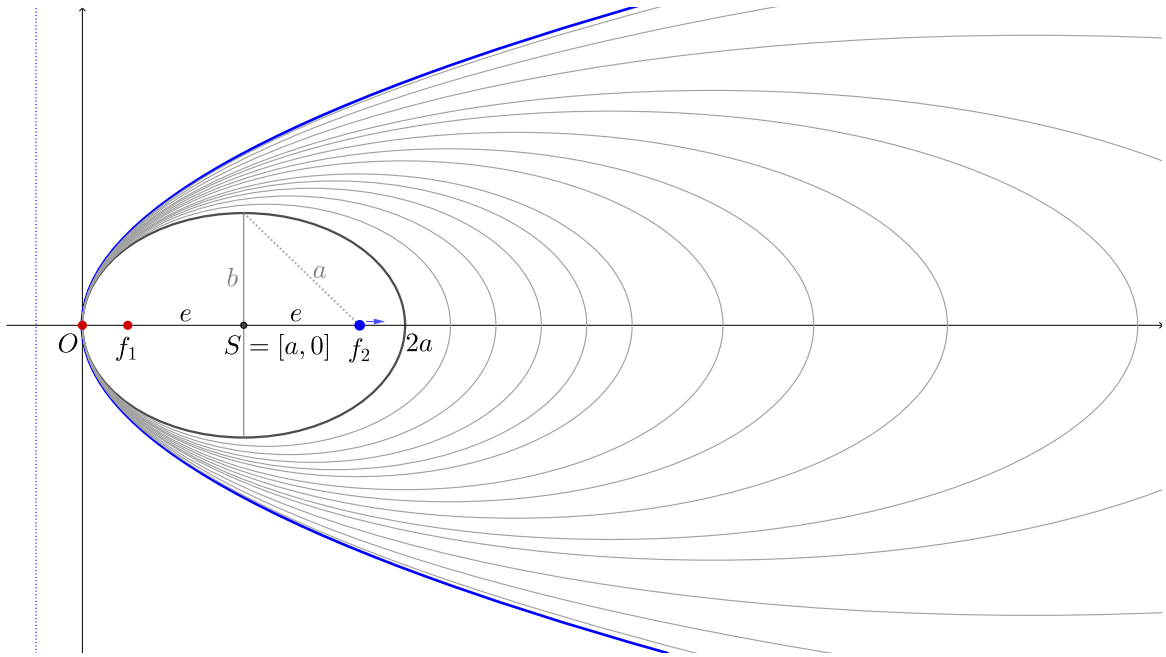
$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

což postupně upravíme:

$$\frac{x^2 - 2ax}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2ax}{a^2} - \frac{x^2}{a^2},$$

$$y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2.$$



Hlavní vrchol elipsy, který leží v počátku (červeně), a ohnisko s x-ovou souřadnicí f_1 (červeně) fixujme, druhé ohnisko elipsy s x-ovou souřadnicí f_2 (modře) „pošleme do nekonečna“, tj. provedeme limitní přechod $f_2 \to +\infty$. V právě upravené rovnici elipsy se vyskytuje a a b^2, a tak je vyjádříme pomocí f_1 a f_2.

Pro x-ové souřadnice obou ohnisek platí: $f_1 = a - e$ a $f_2 = a + e$. Jejich aritmetický průměr je roven

$$\frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{(a - e) + (a + e)}{2} = a\,.$$

Dále využijeme vztahu $a^2 = b^2 + e^2$ mezi poloosami a, b a excentricitou e (Pýthagorova věta, viz též obrázek) a dostaneme:

$$b^2 = a^2 - e^2 = (a - e) \cdot (a + e) = f_1 \cdot f_2\,.$$

Dosazením do rovnice elipsy obdržíme

$$y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2 = 2\,\frac{f_1 \cdot f_2}{\frac{f_1+f_2}{2}}\,x - \frac{f_1 \cdot f_2}{\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)^2}\,x^2 = 4\,\frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2}\,x - 4\,\frac{f_1 \cdot f_2}{(f_1 + f_2)^2}\,x^2\,.$$

Nyní stačí provést limitní přechod, kdy v obrázku modře označené ohnisko elipsy s x-ovou souřadnicí f_2 „pošleme do nekonečna“, což realizujeme, pokud $f_2 \to +\infty$:

$$y^2 = 4\,\frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2}\,x - 4\,\frac{f_1 \cdot f_2}{(f_1 + f_2)^2}\,x^2 \qquad \Big/ f_2 \to +\infty$$

Přitom první ohnisko (se souřadnicí f_1) je fixní, f_1 je tedy konstantní. Limitním přechodem $f_2 \to +\infty$ dostaneme:

$$y^2 = 4f_1\,x\,-\,0\,x^2,$$

neboli

$$y^2 = 2 \cdot 2f_1\,x,$$

což je přesně rovnice paraboly s parametrem $p = 2f_1$ (parametr paraboly vyjadřuje vzdálenost ohniska od řídicí přímky, f_1 je pouze vzdálenost ohniska od vrcholu paraboly, proto $p = 2f_1$). Skutečně tak limitním přechodem $f_2 \to +\infty$ dostáváme z rovnice elipsy rovnici paraboly

$$\boxed{y^2 = 2p\,x\,.}$$

3.4 Přímka jako limitní případ kružnice

Uvažujme kružnici procházející pevně zvoleným bodem, pro jednoduchost počátkem O. Střed S této kružnice nechť má souřadnice $S = [a, b]$. Poloměr je tedy $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Cílem nyní bude provést limitní přechod

$$r \to +\infty$$

ve směru vektoru $S - O = (a, b)$. Jak to provedeme? Střed S budeme posouvat dále od počátku O ve směru vektoru (a, b); dostaneme tak $S_\alpha = O + \alpha(a, b) = [\alpha a, \alpha b]$, kde $\alpha > 1$.

$$S_\alpha = [\alpha a, \alpha b], \qquad \alpha \to +\infty$$

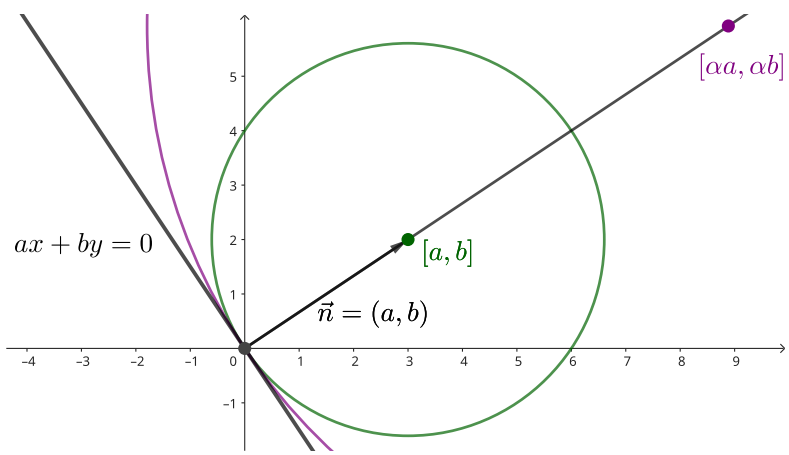
Rovnice kružnice je tedy (viz obrázek):

$$(x - \alpha a)^2 + (y - \alpha b)^2 = r_\alpha^2\,,$$

kde $r_\alpha = \sqrt{(\alpha a)^2 + (\alpha b)^2}$, neboli

$$x^2 - 2\alpha a x + (\alpha a)^2 \quad + \quad y^2 - 2\alpha b y + (\alpha b)^2 = (\alpha a)^2 + (\alpha b)^2\,,$$

$$x^2 + y^2 - 2\alpha a x - 2\alpha b y = 0\,.$$



Celou rovnici kružnice vydělíme α:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha a x - 2\alpha b y = 0 \qquad : \alpha$$

a provedeme limitní přechod

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha} - 2ax - 2by = 0 \qquad \alpha \to +\infty$$

Dostaneme tak rovnici

$$0 + 0 - 2ax - 2by = 0\,,$$

která je rovnicí přímky

$$\boxed{ax + by = 0}$$

procházející počátkem, jejím normálovým vektorem je $\vec{n} = (a, b)$.

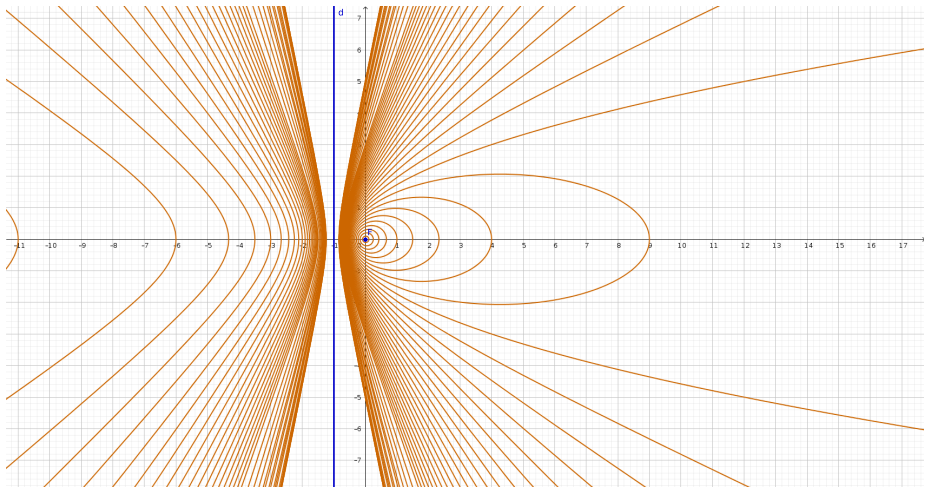
3.5 Jednotná rovnice kuželoseček

Pro jednodušší orientaci předešleme, že jednotná rovnice kuželoseček bude ve tvaru

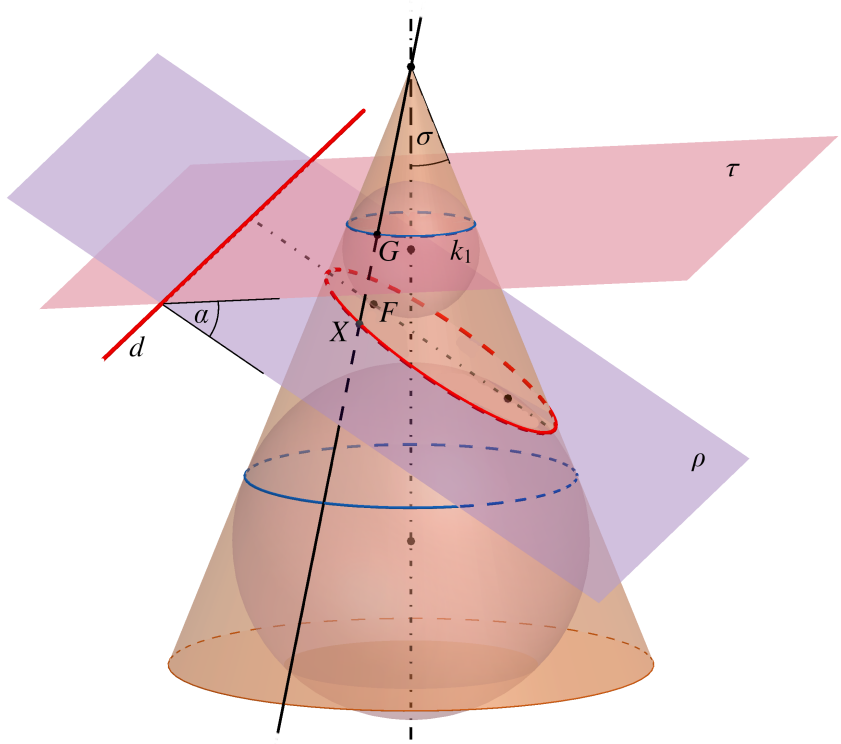
$$\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon\,, \quad \varepsilon > 0\,,$$

přičemž bod F je libovolný pevně zvolený bod (nazývá se *ohnisko*, latinsky *focus*) a d je libovolná pevně zvolená přímka (tzv. *řídicí přímka*, latinsky *directrix*), která bodem F neprochází.

Platí tedy, že množina všech bodů X ležících v rovině obsahující F i d, pro něž platí, že poměr vzdáleností od ohniska a od řídicí přímky je konstantní, je jednou ze tří kuželoseček (elipsa pro $\varepsilon < 1$, parabola pro $\varepsilon = 1$ a hyperbola pro $\varepsilon > 1$).



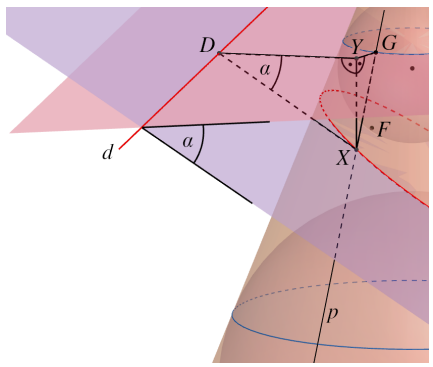
Proveďme nyní příslušnou analýzu geometrické situace. Podobně jako v předchozí kapitole budeme uvažovat pouze rotační kuželovou plochu. Označme α odchylku roviny ϱ řezu (obsahuje kuželosečku) a roviny τ obsahující kružnici k_1. Označme dále σ odchylku povrchové přímky (kterékoli) a osy o rotační kuželové plochy $\mathcal{C}$. Patu kolmice vedené bodem X k rovině τ označme Y. Jelikož vyloučíme kružnicové řezy (tj. $\alpha = 0$), budeme uvažovat pouze $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Je zřejmé, že $\sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.



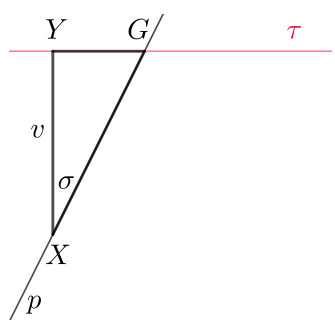
Konstantnost poměru $\frac{|XF|}{|Xd|}$ pro všechny body X průniku $\mathcal{C} \cap \varrho$ plyne z několika jednoduchých pozorování. Základní ideou je, že vypočteme $|XF|$ a $|Xd|$ a ověříme, že je jejich poměr pro daný bod F a danou přímku d konstantní.

Pozorování:

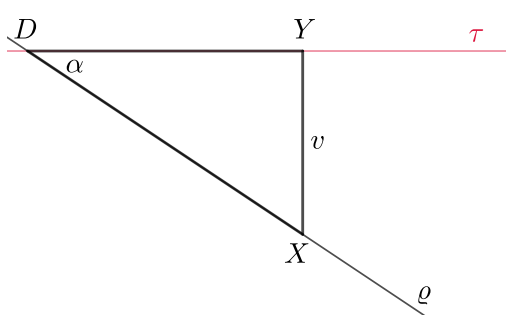
- Nechť površka p kuželové plochy vedená bodem X protíná kružnici k_1 v bodě G. Potom přímky XF a $p = XG$ jsou tečnami vepsané kulové plochy, proto je vzdálenost k jednomu i druhému bodu dotyku stejná, tj. platí:
$$|XF| = |XG|\,.$$



- $\cos\sigma$ je konstantou danou rotační kuželovou plochou $\mathcal{C}$:
$$\cos\sigma = \frac{v}{|XG|} \qquad \Longrightarrow \qquad |XG| = \frac{v}{\cos\sigma}\,, \quad \text{tj. } |XF| = \frac{v}{\cos\sigma}$$



- $\sin\alpha$ je konstantou danou sklonem α roviny řezu:



- Do poměru $\frac{|XF|}{|Xd|}$ nyní dosadíme vztahy z obou předchozích bodů:
$$\frac{|XF|}{|Xd|} = \frac{\frac{v}{\cos\sigma}}{\frac{v}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\sigma}\,.$$

Dostáváme tak:

$$\boxed{\frac{|XF|}{|Xd|} = \frac{\sin\alpha}{\cos\sigma}\,,}$$

přičemž kladnou konstantu ($\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i $\sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, proto je $\sin\alpha > 0$ i $\cos\sigma > 0$) na pravé straně označme

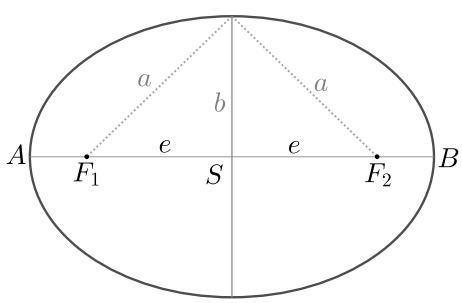
$$\varepsilon = \frac{\sin\alpha}{\cos\sigma}\,.$$

V závislosti na hodnotě kladné konstanty ε dostáváme postupně všechny tři základní typy kuželoseček.

- $\varepsilon = 1$, **parabola:** Rovina řezu je rovnoběžná s právě jednou povrchovou přímkou právě tehdy, když $\alpha = 90° - \sigma$ pro $\alpha \in (0°, 90°)$. V tom případě je $\varepsilon = \frac{\sin(90°-\sigma)}{\cos\sigma} = \frac{\cos\sigma}{\cos\sigma} = 1$. Dostáváme tak charakterizaci paraboly:
$$\frac{|XF|}{|Xd|} = 1\,, \quad \text{tj.} \quad \boxed{|XF| = |Xd|}\,.$$
- $\varepsilon < 1$, **elipsa:** Rovina řezu protíná všechny povrchové přímky právě tehdy, když $\alpha < 90° - \sigma$ pro $\alpha \in (0°, 90°)$. V tom případě je $\varepsilon = \frac{\sin\alpha}{\cos\sigma} < \frac{\sin(90°-\sigma)}{\cos\sigma} = \frac{\cos\sigma}{\cos\sigma} = 1$. Dostáváme tak charakterizaci elipsy:
$$\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon\,, \quad \text{kde} \quad \varepsilon < 1\,.$$
- $\varepsilon > 1$, **hyperbola:** Rovina řezu protíná povrchové přímky na obou stranách (vzhledem k vrcholu) kuželové plochy právě tehdy, když $\alpha > 90° - \sigma$ pro $\alpha \in (0°, 90°)$. V tom případě je $\varepsilon = \frac{\sin\alpha}{\cos\sigma} > \frac{\sin(90°-\sigma)}{\cos\sigma} = \frac{\cos\sigma}{\cos\sigma} = 1$. Dostáváme tak charakterizaci hyperboly:
$$\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon\,, \quad \text{kde} \quad \varepsilon > 1\,.$$

3.5.1 Interpretace ε v případě elipsy

Nejsnáze uvidíme geometrickou interpretaci ε v případech, kdy $X = A$ (tj. X je hlavním vrcholem elipsy, který leží nejblíže řídicí přímky d) a $X = C$ (tj. X je jedním z vedlejších vrcholů elipsy). Volíme $F = F_1$.



Z obecné rovnice kuželosečky plyne:

$$\frac{|AF|}{|Ad|} = \varepsilon = \frac{|CF|}{|Cd|}\,.$$

Vyjádřeme nyní délky $|AF|$, $|Ad|$, $|CF|$, $|Cd|$ pomocí a, e a ε. Předně ihned máme:

$$|AF| = \varepsilon|Ad|\,.$$

Také snadno vidíme (viz obrázek a přeponu v pravoúhlém trojúhelníku $\triangle FSC$), že

$$|AF| = a - e \quad \text{a} \quad |CF| = a\,.$$

Dále odvodíme:

$$|AF| = \varepsilon |Ad| \quad \Longrightarrow \quad |Ad| = \frac{|AF|}{\varepsilon} = \frac{a-e}{\varepsilon}\,,$$

Délku $|Cd|$ lze najít takto:

$$|Cd| = |Sd| = |SA| + |Ad| = a + \frac{a-e}{\varepsilon}\,.$$

Dosaďme tedy za $|CF|$ i $|Cd|$ do obecné rovnice kuželosečky, dostaneme:

$$\varepsilon = \frac{|CF|}{|Cd|} = \frac{a}{a + \frac{a-e}{\varepsilon}} = \frac{1}{1 + \frac{1-\frac{e}{a}}{\varepsilon}}\,.$$

Porovnejme výrazy úplně vlevo a vpravo, dostaneme rovnici, z níž vyjádříme ε:

$$\frac{1}{1 + \frac{1-\frac{e}{a}}{\varepsilon}} = \varepsilon\,,$$

$$1 = \varepsilon + \left(1 - \frac{e}{a}\right), \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}\,.}$$

3.5.2 Řídicí přímka elipsy a kuželová plocha

Nyní, když víme, že elipsu můžeme charakterizovat rovnicí

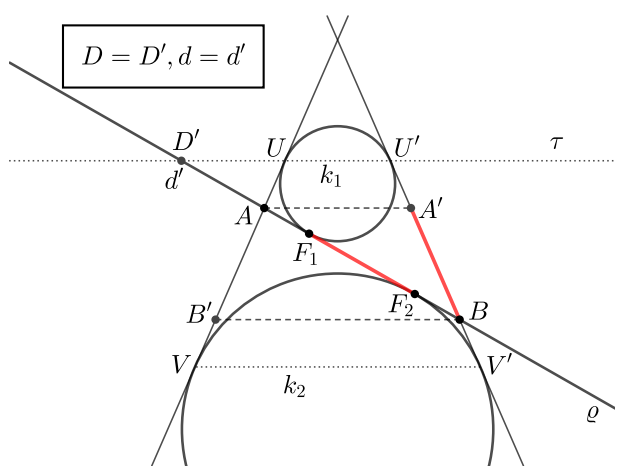
$$\frac{|XF_1|}{|Xd|} = \varepsilon\,, \quad 0 < \varepsilon < 1\,,$$

můžeme snadno ukázat, že řídicí přímka d elipsy (na obrázku níže je kolmá k nákresně, tudíž se zobrazila do jediného bodu D) je průsečnicí roviny ϱ řezu (v níž leží elipsa) a roviny τ obsahující kružnici k_1, tj.:

$$\boxed{d = \varrho \cap \tau.}$$

Označme prozatím průsečnici rovin ϱ a τ písmenem d' a průsečík přímek AB a UU' písmenem D'. Označení d, resp. D zůstane vyhrazeno řídicí přímce, resp. jejímu obrazu v osovém řezu. Ukážeme nyní, že $D = D'$ (neboli $d = d'$).

Řídicí přímka d (na obrázku ji vidíme jako pouhý bod D) musí ležet v rovině řezu ϱ, navíc musí být kolmá na hlavní osu elipsy AB, obě tyto podmínky průsečnice d' rovin ϱ a τ splňuje. Vidíme tedy, že d' je rovnoběžná s d. Otázkou tak zůstává, v jaké vzdálenosti od bodu B se bude řídicí přímka d (neboli bod D na polopřímce BA) nacházet. Ukážeme, že $|BD| = |BD'|$, odkud již bude plynout $D = D'$ a $d = d'$.



Pro každý bod elipsy X musí platit, že $\frac{|XF_1|}{|Xd|} = \varepsilon$, tudíž i pro její hlavní vrchol B platí $\frac{|BF_1|}{|Bd|} = \varepsilon$. Následující soustava rovností ukazuje, že průsečnice d', resp. bod D', splňuje rovnici $\frac{|BF_1|}{|Bd'|} = \varepsilon$, proto $\frac{|BF_1|}{|Bd|} = \frac{|BF_1|}{|Bd'|}$, odkud pak již ihned máme $|BD'| = |BD|$, takže $D = D'$ a $d = d'$.

$$\frac{|BF_1|}{|Bd'|} \overset{(1)}{=} \frac{|BU'|}{|BD'|} \overset{(2)}{=} \frac{|BA'|}{|BA|} \overset{(3)}{=} \frac{|F_1F_2|}{|AB|} = \frac{2e}{2a} = \frac{e}{a} = \varepsilon\,.$$

Jednotlivé rovnosti ještě okomentujme.

(1) $|BF_1| = |BU'|$, neboť se jedná o délky spojnic bodu B s body dotyku F_1 a U' na téže kružnici.

(2) $\dfrac{|BU'|}{|BD'|} = \dfrac{|BA'|}{|BA|}$, neboť trojúhelníky $\triangle BU'D'$ a $\triangle BA'A$ jsou podobné.

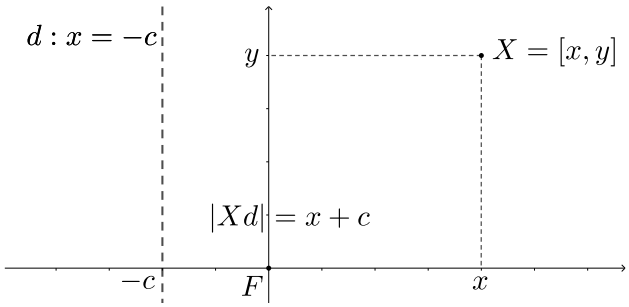
(3) Již dříve jsme dokázali, že $|BA'| = |F_1F_2|$, čímž dostáváme rovnost (3).

3.6 Rovnice kuželoseček v kartézských a v polárních souřadnicích

Vyjděme z jednotné rovnice kuželoseček (elipsy, paraboly a hyperboly):

$$\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon\,, \quad \varepsilon > 0\,.$$

Jak bude tato rovnice vypadat v konkrétní kartézské soustavě souřadnic? Tuto kartézskou souřadnicovou soustavu zvolme tak, aby bylo vše co nejjednodušší: bod F nechť leží přímo v počátku, řídicí přímka d nechť je kolmá na osu x; její rovnice pak bude $d:\ x = -c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}^+$. V takto zvolené kartézské soustavě souřadnic nechť $X = [x, y]$.



Potom lze rovnici

$$|XF| = \varepsilon \cdot |Xd|$$

přepsat ve tvaru

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \varepsilon \cdot (x + c)\,,$$

případně

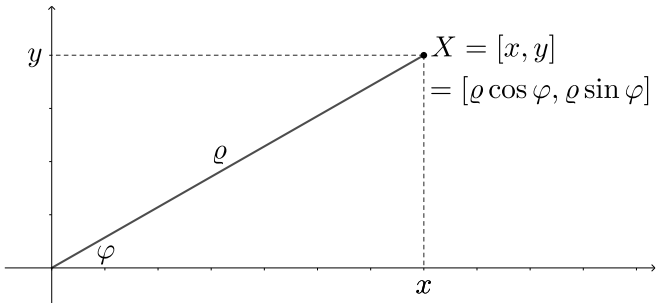
$$\boxed{x^2 + y^2 = \varepsilon^2 \cdot (x + c)^2\,.}$$

Jelikož ohnisko leží v počátku, nazývá se tato rovnice *ohniskovou rovnicí kuželosečky.*

Přejděme nyní k polární soustavě souřadnic: pól nechť leží v počátku a polární poloosa nechť splývá s kladnou poloosou x. Potom můžeme rovnici $\sqrt{x^2 + y^2} = \varepsilon \cdot (x + c)$ psát ve tvaru:

$$\varrho = \varepsilon \cdot (\varrho \cos\varphi + c)\,.$$

Tento přepis získáme dosazením základních vztahů mezi oběma souřadnicovými soustavami: z Pýthagorovy věty ihned plyne $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ a z příslušného pravoúhlého trojúhelníku $x = \varrho \cdot \cos\varphi,\ y = \varrho \cdot \sin\varphi$.



Nyní stačí z rovnice $\varrho = \varepsilon \cdot (\varrho\cos\varphi + c)$ vyjádřit ϱ:

$$\varrho \cdot (1 - \varepsilon\cos\varphi) = \varepsilon c\,.$$

Označíme-li výraz na pravé straně $p = \varepsilon c$ (písmeno p jsme zvolili proto, že se jedná o tzv. *parametr kuželosečky*), dostaneme

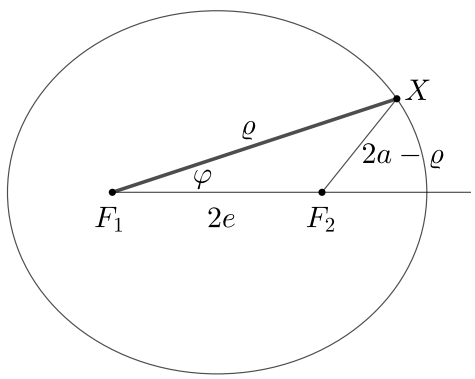
$$\boxed{\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}\,.}$$

3.7 Rovnice elipsy v polárních souřadnicích

Rovnici elipsy v polárních souřadnicích lze snadno odvodit i přímo z planimetrické definice elipsy:

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a\,.$$

Odvození je založeno na kosinové větě aplikované na trojúhelník $\triangle F_1F_2X$.



Zvolme polární soustavu souřadnic tak, že pól umístíme přímo do ohniska F_1 a polární poloosa bude splývat s polopřímkou $\overrightarrow{F_1F_2}$. Je-li X bodem elipsy, je

$$\varrho = |F_1X|\,, \qquad |F_1F_2| = 2e\,, \qquad \angle F_2F_1X = \varphi\,.$$

Délku zbývající strany F_2X vyjádříme přímo z planimetrické definice elipsy: $|F_2X| = 2a - \varrho$.

V trojúhelníku $\triangle F_1F_2X$ známe délky všech stran a velikost jednoho vnitřního úhlu φ. Chceme získat vztah mezi φ a ϱ, použijeme tedy kosinovou větu.

$$\boxed{(2a - \varrho)^2 = \varrho^2 + (2e)^2 - 2 \cdot \varrho \cdot 2e \cdot \cos\varphi}$$

$$4a^2 - 4a\varrho + \varrho^2 = \varrho^2 + 4e^2 - 4\varrho e\cos\varphi$$

Odečtěme ϱ, vydělme celou rovnost čtyřmi a převeďme všechny členy obsahující ϱ na pravou stranu:

$$a^2 - e^2 = a\varrho - \varrho e\cos\varphi\,.$$

Jelikož je $a^2 - e^2 = b^2$, dostáváme

$$b^2 = \varrho \cdot (a - e\cos\varphi)\,,$$

$$\varrho = \frac{b^2}{a - e\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{e}{a}\cos\varphi}\,.$$

Označme $p = \frac{b^2}{a}$ (tzv. *parametr elipsy*), a $\varepsilon = \frac{e}{a}$ (tzv. *numerická excentricita*). Všimněme si, že v každé elipse je $e < a$, proto je nutně $\varepsilon < 1$. Nyní dostáváme rovnici elipsy v polárních souřadnicích:

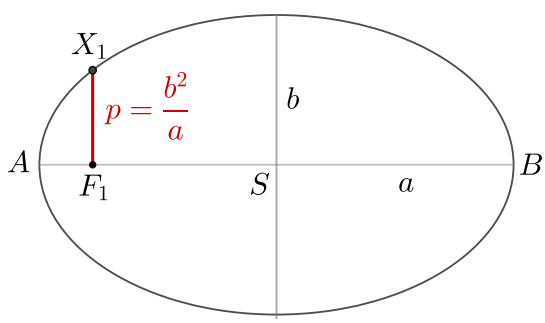
$$\boxed{\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}\,, \qquad 0 < \varepsilon < 1.}$$

3.8 Parametr kuželosečky a její ohnisko

3.8.1 Parametr elipsy a její ohnisko

Při zkoumání vlastností elipsy se na mnoha místech setkáváme s parametrem elipsy, tj. s konstantou $p = \frac{b^2}{a}$. Tento parametr je délkou úsečky X_1F_1, kde F_1 je jedním z ohnisek elipsy a X_1 bodem elipsy takovým, že úsečka X_1F_1 je kolmá na hlavní osu elipsy.

$$\boxed{|X_1F_1| = p = \frac{b^2}{a}\,.}$$



Fakt, že délka úsečky X_1F_1 je rovna přímo parametru elipsy $p = \frac{b^2}{a}$, snadno ověříme přímým výpočtem y-ové souřadnice bodu elipsy pro $x = \pm e$ (znaménko díky souměrnosti elipsy nehraje roli), neboť z předchozího obrázku je zřejmé, že $|y(-e)| = |X_1F_1|$. Ukážeme tedy, že $|y(\pm e)| = \frac{b^2}{a}$.

Z rovnice elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ vyjádříme y^2:

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = b^2\,\frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

a dosadíme $x = \pm e$; využijeme také toho, že $a^2 - e^2 = b^2$:

$$y^2(\pm e) = b^2\,\frac{a^2 - e^2}{a^2} = b^2\,\frac{b^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2}\,.$$

Odtud již ihned máme

$$|y(\pm e)| = \frac{b^2}{a}\,,$$

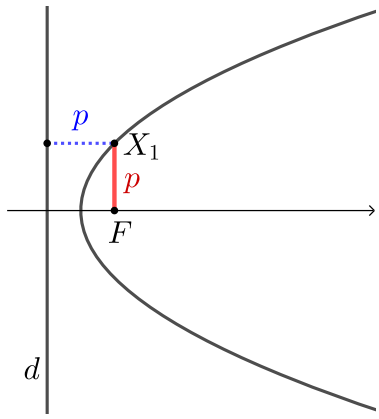
takže

$$|X_1F_1| = |y(\pm e)| = \frac{b^2}{a} = p\,.$$

3.8.2 Parametr paraboly a její ohnisko

Pro parabolu platí analogický výsledek:

$$\boxed{|X_1F| = p\,.}$$



Odvodíme jej snadno, stačí si uvědomit:

(1) Parametr paraboly je definován jako vzdálenost ohniska F od řídicí přímky d, tj.

$$p \overset{\text{def.}}{=} |Fd|.$$

(2) Pro každý bod X paraboly platí: $|XF| = |Xd|$, tudíž i pro bod X_1 platí:

$$|X_1F| = |X_1d|\,.$$

(3) Celkem tedy

$$|X_1F| = |X_1d| = |Fd| = p\,.$$

3.8.3 Latus rectum

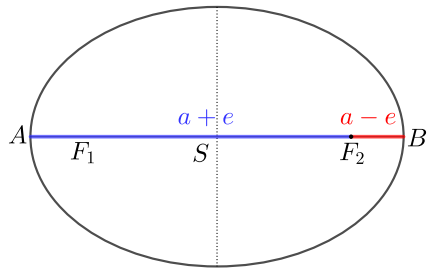
Poznamenejme, že historicky se délka červeně vyznačené úsečky i samotná úsečka (u elipsy i paraboly, podobně by to fungovalo i u hyperboly) nazývala *semilatus rectum*. Jedná se vlastně o polovinu celé tětivy, proto předpona *semi*. Semilatus rectum je tedy jiný název pro parametr kuželosečky.

Celá tětiva (procházející ohniskem a kolmá na osu procházející ohniskem) se pak nazývala *latus rectum*. Latinské *látus* znamená *široký*, *réctus* znamená *rovný, přímý*.

kuželosečka	**semilatus rectum**	**latus rectum**
parabola $y^2 = 2px$	p	$2p$
elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{b^2}{a}$	$\dfrac{2b^2}{a}$
hyperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{b^2}{a}$	$\dfrac{2b^2}{a}$

3.9 Průměry vzdáleností hlavních vrcholů od ohniska

Pozorujme u elipsy jednotlivé průměry vzdáleností hlavních vrcholů od ohniska: aritmetický, geometrický a harmonický. Zvolíme-li si pevně jedno ohnisko elipsy, pak vzdálenost jednoho hlavního vrcholu od tohoto ohniska je $a + e$, druhého pak $a - e$.



Vypočtěme jednotlivé průměry těchto dvou čísel:

$$A(a+e,\, a-e) = \frac{a+e\ +\ a-e}{2} = a\,,$$

$$G(a+e,\, a-e) = \sqrt{(a+e)\cdot(a-e)} = \sqrt{a^2-e^2} = b\,,$$

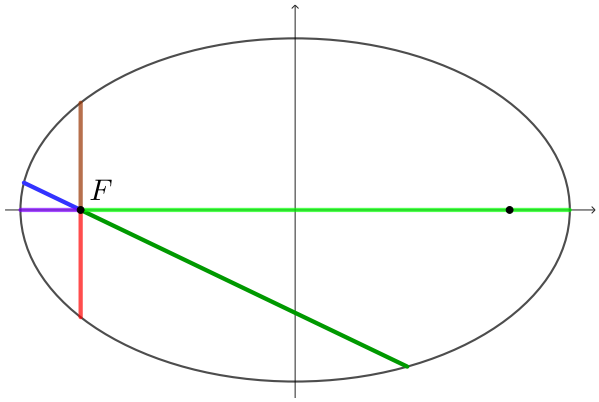
$$H(a+e,\, a-e) = \frac{2\,(a+e)\cdot(a-e)}{a+e\ +\ a-e} = \frac{a^2-e^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p\,.$$

Vidíme, že výsledky jsou velmi elegantní: aritmetický průměr je roven délce hlavní poloosy, geometrický průměr délce vedlejší poloosy, harmonický průměr vyšel roven parametru elipsy.

Všimněme si, že u harmonického průměru bychom dostali stejný výsledek, kdybychom tětivu vedli ohniskem kolmo k hlavní ose: opět bychom dostali parametr p:

$$H(p,\, p) = \frac{2\,p\cdot p}{p+p} = p\,.$$

Vzniká tak otázka, zda bychom dostali p i v případě, že by tětiva byla vedena ohniskem v libovolném směru. Odpověď je kladná. Ověření lze provést přímočarým výpočtem.



3.10 Vzdálenost bodu elipsy od ohniska

Pro vzdálenosti $L_1(X) = |F_1X|$ a $L_2(X) = |F_2X|$ bodu $X = [x, y]$ elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

od jejích ohnisek F_1 a F_2 platí pěkné vztahy:

$$L_1(X) = |F_1X| = a + \varepsilon x\,,$$
$$L_2(X) = |F_2X| = a - \varepsilon x\,.$$

Je tak dobře vidět, čím se liší $|F_1X|$ a $|F_2X|$ od délky hlavní poloosy a; vystupuje zde numerická excentricita $\varepsilon = \frac{e}{a}$ a orientovaná vzdálenost bodu X od vedlejší poloosy elipsy. Snadno také vidíme, že

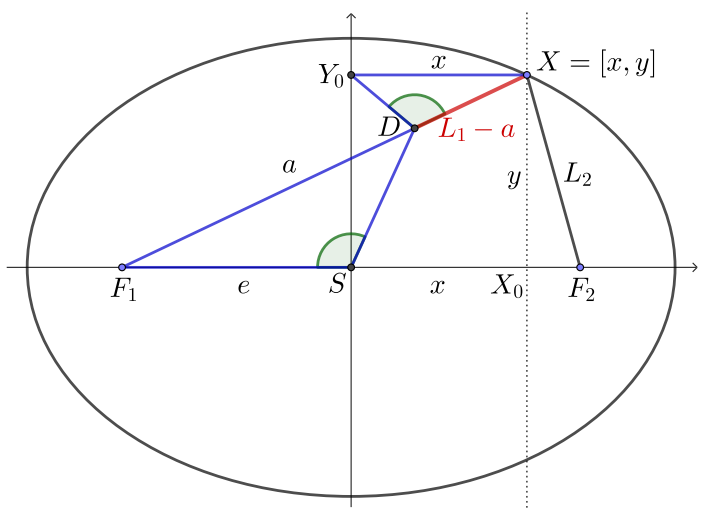
$$|F_1X| + |F_2X| = (a + \varepsilon x) + (a - \varepsilon x) = 2a\,.$$

Je-li $X = C$ jedním z vedlejších vrcholů elipsy, máme přesně

$$L_1(X) = |F_1X| = a\,, \qquad L_2(X) = |F_2X| = a\,.$$

Pokud však bod X není jedním z vedlejších vrcholů elipsy, je jedna vzdálenost větší než a o nějaké δ, druhá je nutně menší než a o totéž δ (aby součet $L_1(X) + L_2(X) = 2a$):

$$L_1(X) = |F_1X| = a + \delta\,, \qquad L_2(X) = |F_2X| = a - \delta\,.$$



Odvození vztahů pro vzdálenosti $L_1(X)$ a $L_2(X)$ bodu X od ohnisek F_1 a F_2 elipsy můžeme založit na aplikaci Pýthagorovy věty na pravoúhlý trojúhelník $\triangle F_1X_0X$, resp. $\triangle F_2X_0X$. Dostaneme tak:

$$L_1(X) = \sqrt{(e + x)^2 + y^2}\,,$$
$$L_2(X) = \sqrt{(e - x)^2 + y^2}\,.$$

Užijeme-li vztahů $L_1(X) = a + \delta$ a $L_2(X) = a - \delta$ a umocníme-li obě rovnosti na druhou, dostaneme:

$$(a + \delta)^2 = (e + x)^2 + y^2\,,$$
$$(a - \delta)^2 = (e - x)^2 + y^2\,,$$

neboli po úpravě

$$a^2 + 2a\delta + \delta^2 = e^2 + 2ex + x^2 \quad + \quad y^2\,,$$
$$a^2 - 2a\delta + \delta^2 = e^2 - 2ex + x^2 \quad + \quad y^2\,,$$

Po odečtení druhé rovnosti od první zůstane

$$4a\delta = 4ex\,,$$

odkud již ihned máme

$$\delta = \frac{e}{a}\,x = \varepsilon x\,,$$

užijeme-li označení $\varepsilon = \frac{e}{a}$ pro numerickou excentricitu. Dosazením $\delta = \varepsilon x$ do rovností $L_1(X) = a + \delta$ a $L_2(X) = a - \delta$ dostaneme odvozované vztahy:

$$L_1(X) = |F_1X| = a + \varepsilon x\,,$$
$$L_2(X) = |F_2X| = a - \varepsilon x\,.$$

Všimněme si, že z právě odvozených vztahů pro délku červeně vyznačené úsečky $|DX| = \delta = \frac{e}{a}\,x$ plyne podobnost trojúhelníků $\triangle F_1SD \sim \triangle XDY_0$, neboť

$$\frac{\delta}{x} = \frac{e}{a}\,.$$

Z podobnosti trojúhelníků také vidíme, že zeleně vyznačené úhly jsou shodné: $\angle F_1SD \simeq \angle XDY_0$.

3.11 Kuželosečky jako množiny bodů v Gaussově rovině

V Gaussově rovině můžeme pomocí komplexních čísel pohodlně popisovat různé množiny bodů daných vlastností. Obrazem komplexního čísla $z = x + iy$ je bod, souřadnice v kartézské soustavě souřadnic jsou $[x, y]$. Vycházíme přímo z planimetrických definic kuželoseček.

kružnice:	$\lvert z - z_0\rvert = r$
elipsa:	$\lvert z - f_1\rvert + \lvert z - f_2\rvert = 2a$
hyperbola:	$\big\lvert\lvert z - f_1\rvert - \lvert z - f_2\rvert\big\rvert = 2a$
parabola:	$\lvert z - \frac{p}{2}\rvert = \mathfrak{Re}(z) + \frac{p}{2}$

Obecně předpokládáme, že $a > 0$; u elipsy dále požadujeme $|f_1 - f_2| < 2a$, u hyperboly pak $|f_1 - f_2| > 2a$. U paraboly předpokládáme speciální polohu: ohnisko je obrazem komplexního čísla $\frac{p}{2} + 0\mathrm{i}$ a řídicí přímka je kolmá na reálnou osu a prochází bodem, který je obrazem čísla $-\frac{p}{2} + 0\mathrm{i}$.

Mezi rovnicemi v Gaussově rovině a rovnicemi v kartézské soustavě souřadnic lze snadno přecházet:

- kartézské souřadnice $\rightarrow$ zápis pomocí komplexních čísel:

$$z = x + iy$$
$$\bar{z} = x - iy$$

- zápis pomocí komplexních čísel $\rightarrow$ kartézské souřadnice:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Ukažme si odvození rovnice paraboly v komplexní souřadnici. Vyjdeme ze standardní rovnice

$$y^2 = 2px$$

a dosadíme za x a y:

$$\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 = 2p \cdot \frac{z + \bar{z}}{2}$$
$$(z - \bar{z})^2 = -4p \cdot (z + \bar{z})$$

3.12 Rovnice kuželosečky pomocí determinantů

3.12.1 Rovnice přímky pomocí determinantů

přímka procházející 2 body: $X_1 = [x_1, y_1], \quad X_2 = [x_2, y_2]$

$$ax + by + c = 0$$

$X_1 = [x_1, y_1], \quad X_2 = [x_2, y_2]$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$$

3.12.2 Rovnice kružnice pomocí determinantů

kružnice procházející 3 body

$$x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$$
$$x_2^2 + y_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0$$
$$x_3^2 + y_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \\ x_3^2 + y_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3.12.3 Rovnice kuželosečky pomocí determinantů

obecná kuželosečka procházející 5 body

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

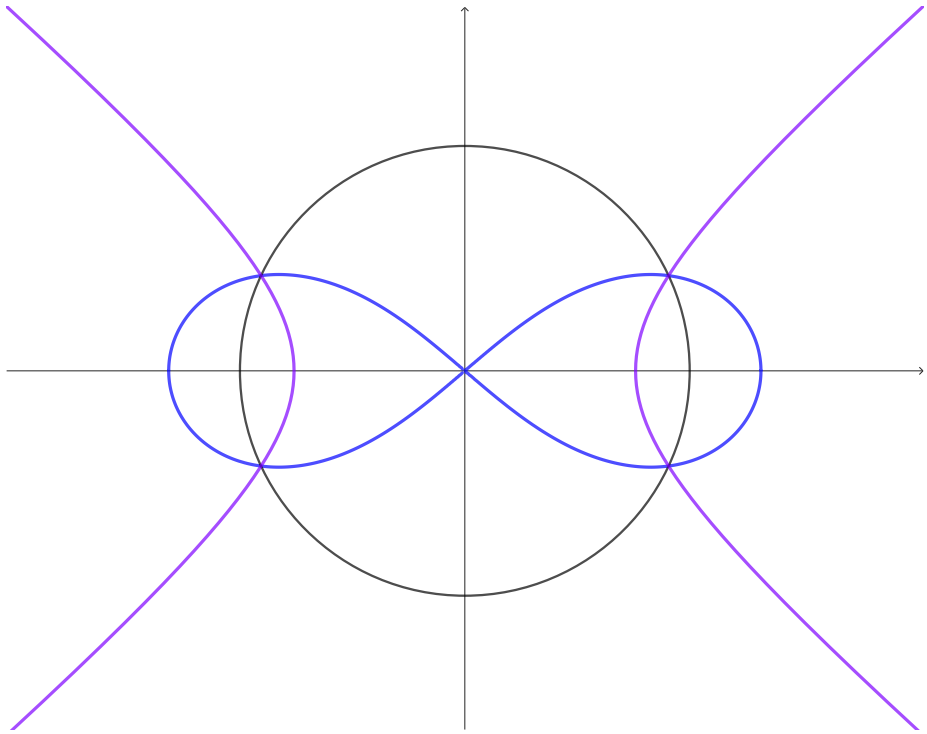
$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3.13 Obrazy kuželoseček v kruhové inverzi

Pozorujme obrazy kuželoseček v kruhové inverzi. Střed řídicí kružnice inverze budeme volit ve středu kuželosečky.

3.13.1 Hyperbola

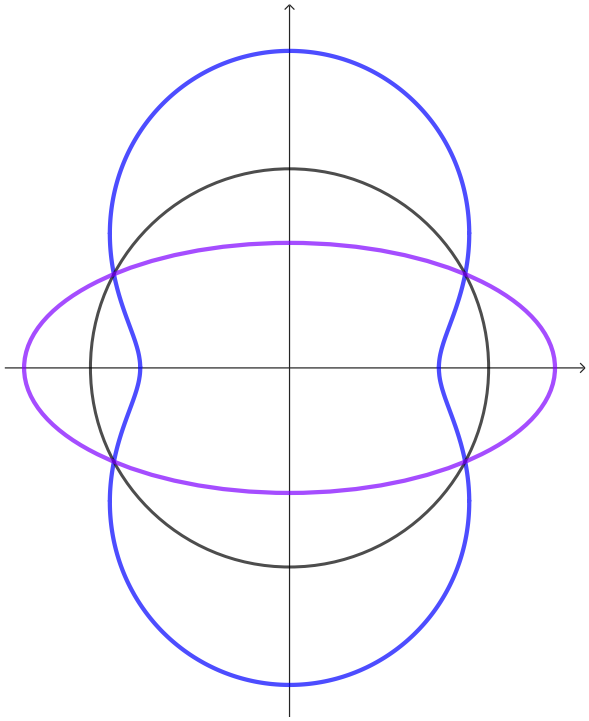
Obrazem hyperboly je v níže uvedeném případě lemniskáta.



Lemniskáta jako obraz zadané hyperboly v kruhové inverzi

3.13.2 Elipsa

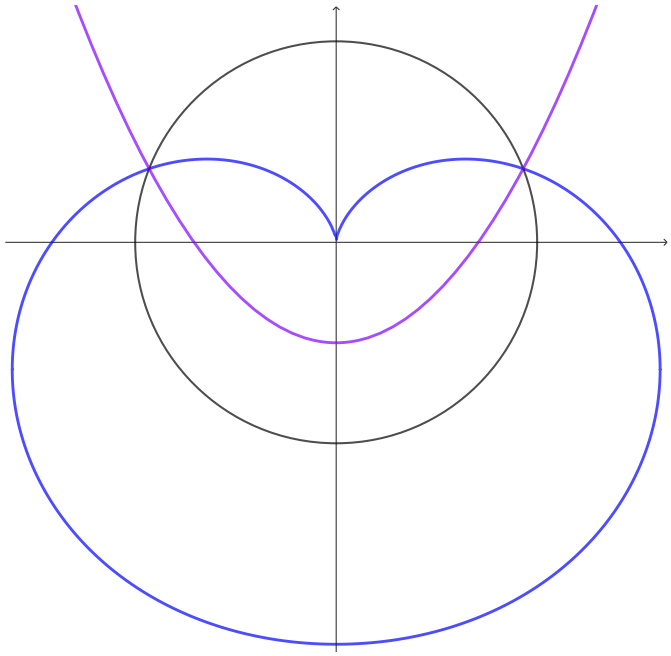
Obrazem elipsy je v níže uvedeném případě Cassiniho ovál.



Cassiniho ovál jako obraz zadané elipsy v kruhové inverzi

3.13.3 Parabola

Obrazem paraboly je v níže uvedeném případě následující křivka.



obraz zadané paraboly v kruhové inverzi

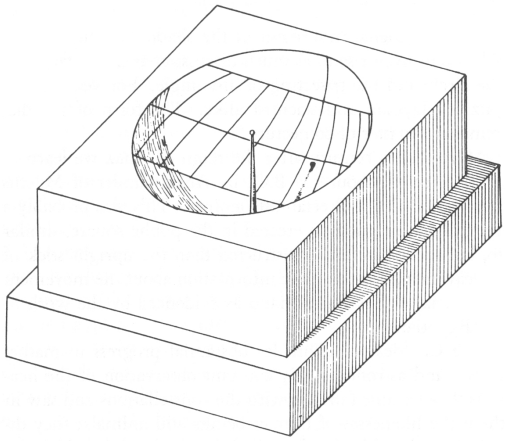
Kapitola 4

Z historie kuželoseček

4.1 Kuželosečky a sluneční hodiny

V této kapitole si ukážeme jeden z příkladů, jak se poznatky o kuželosečkách projevily v praxi – při konstrukci slunečních hodin. Je možné, že právě zkoumání slunečních hodin mohlo vést k hlubšímu zkoumání kuželoseček.

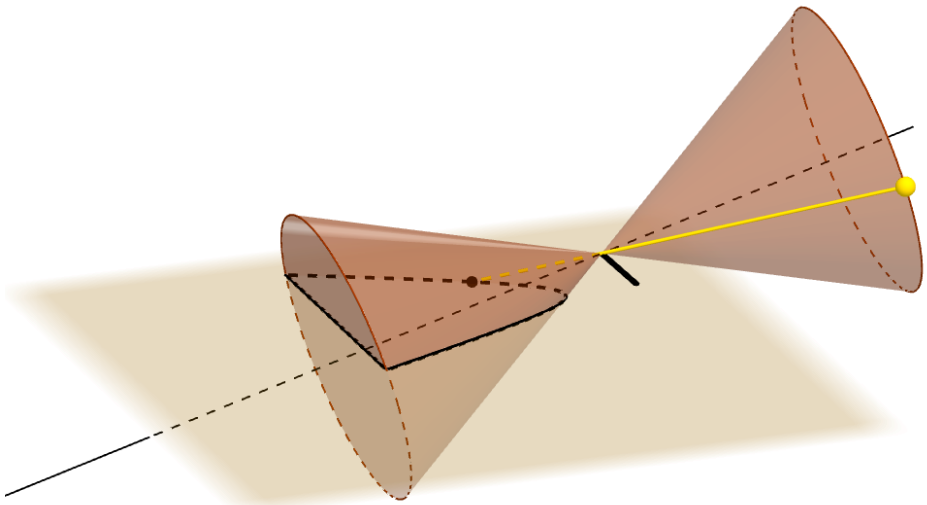
Zpočátku se pro měření času používal svislý obelisk, tzv. *gnómón*. Čas se odečítal z délky jeho stínu, což bylo zatíženo značnými nepřesnostmi, neboť se délka stínu v průběhu roku mění. Gnómony byly užívány například v Egyptě či Mezopotámii. Odtud se jejich používání rozšířilo do Řecka. Právě tam se v průběhu 7. stol. př. Kr. objevil nový, mnohem přesnější typ – horizontální duté polokulové sluneční hodiny zvané *skafé* (viz obr.), které měly rovnoměrnou stupnici nanesenou na vnitřní plochu polosféry a hrot ukazatele ve středu této sféry. Jejich výhodou byla nezávislost na dni v roce, čímž bylo dosaženo mnohem větší přesnosti, neboť se čas neodečítal z délky stínu, ale z jeho směru. Vycházelo se tak vlastně ze zemské rotace. Výroba takovýchto polokulových slunečních hodin však byla poměrně náročná.



Na konstrukci byly mnohem jednodušší sluneční hodiny rovinné. První takové se objevily v Egyptě ve 4. stol. př. Kr. Zohledňovaly různé deklinace Slunce během roku, ale byly zatím vytvářeny pouze experimentálně. Aby bylo možno zkonstruovat *datové čáry*, tj. křivky, po nichž se pohybuje konec stínu ukazatele v průběhu daného dne v roce, bylo užitečné znát jejich základní matematické vlastnosti.

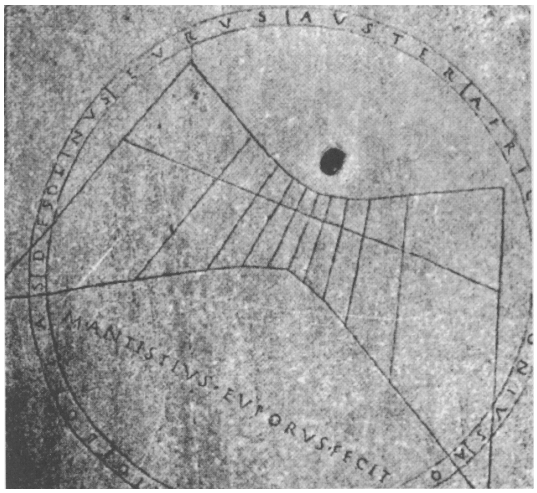
Není nijak obtížné odvodit, že datovými čarami jsou právě kuželosečky. Představíme-li si totiž denní dráhu Slunce po obloze jako kružnici (část jí je pod obzorem) a špičku ukazatele slunečních hodin jako bod, je ihned zřejmé, že spojením všech bodů této kružnice s tímto jedním bodem vznikne kuželová plocha. Jejím průnikem s rovinou číselníku je tedy nutně kuželosečka. V našich zeměpisných šířkách se jedná vesměs o hyperboly.[1]

[1] Na pólu se jedná o kružnice, neboť dráha Slunce v průběhu dne se pozorovateli jeví jako kružnice umístěná rovnoběžně se zemí. Tato kružnice v průběhu roku stoupá či klesá pod obzor (polární den a noc). Směrem k rovníku se pak tato řídicí



Jelikož se výška Slunce na obloze v průběhu roku mění, je možno postupně pozorovat soustavu hyperbol (s výjimkou jarní a podzimní rovnodennosti, kdy hyperboly přecházejí v přímku). S jejich pomocí lze odečítat datum. Vyznačení datových čar (alespoň pro slunovraty a rovnodennosti) na číselníku slunečních hodin také usnadňuje přesné narýsování čar hodinových.

Rovinné sluneční hodiny opatřené datovými čarami se v antice skutečně objevily. Přirozeně až poté, co se rozšířila alespoň základní znalost kuželoseček. Vzhledem k jejich relativně snadné výrobě pak starší typ – skafé – postupem času ustoupil slunečním hodinám rovinným.



4.2 Počátky zkoumání kuželoseček

Objev kuželoseček je v antické tradici připisován Menaichmovi (1. polovina 4. stol. př. Kr.), a to v souvislosti s řešením problému nalezení dvou středních úměrných, tj. nalezení dvou neznámých délek x a y takových, aby pro zadané délky a, b platilo

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}\,.$$

kružnice kuželové plochy naklání čím dál tím více, takže datové čáry přecházejí postupně v elipsy, paraboly a v širokém pásu mezi polárními kruhy v hyperboly.

Právě na tuto úlohu převedl Hippokratés z Chiu (2. pol. 5. stol. př. Kr.) jeden ze tří slavných problémů antické matematiky[2] – *zdvojení krychle*[3]. Zvolíme-li totiž $a = 2b$, dostaneme po úpravě z předchozího vztahu

$$y^3 = 2b^3.$$

Je tedy nalezena délka y hrany krychle, která má oproti zadané krychli s délkou hrany b dvojnásobný objem. Menaichmos vyřešil problém nalezení dvou středních úměrných pomocí kuželoseček; algebraicky zapsáno:

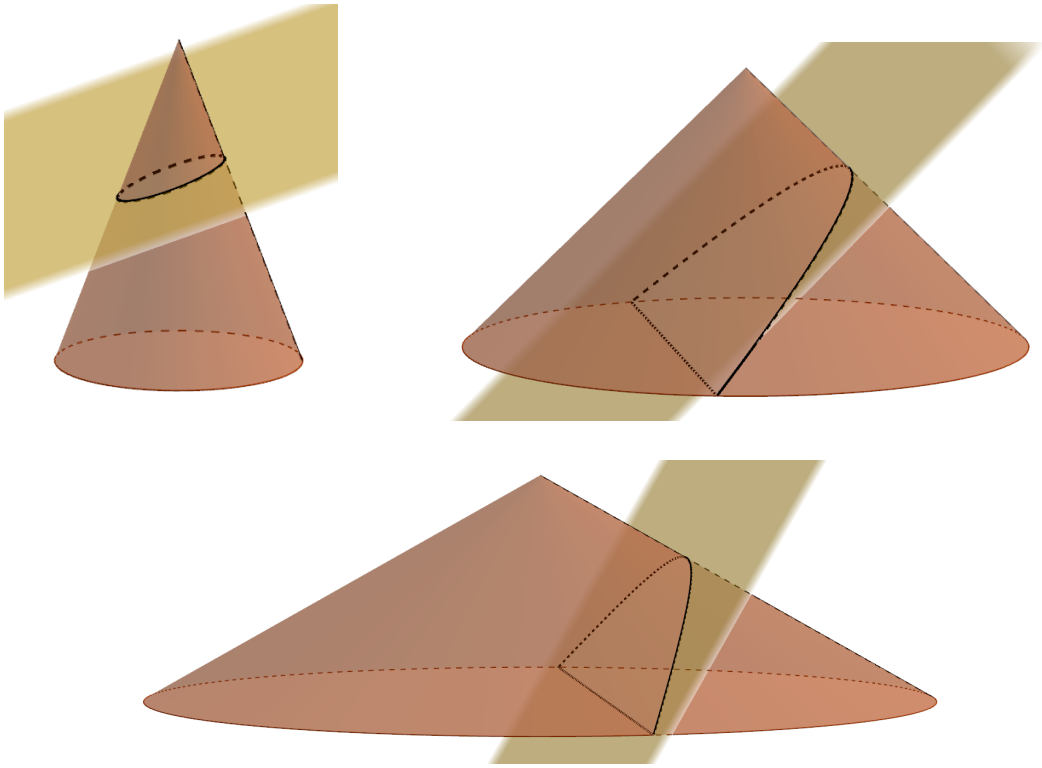
$$xy = ab, \qquad y^2 = bx,$$

nebo

$$x^2 = ay, \qquad y^2 = bx.$$

Z dochovaného zlomku obsahujícího toto řešení[4] však vyplývá, že Menaichmos pracoval s kuželosečkami na poměrně vysoké úrovni. Zdá se tedy být pravděpodobné, že byly studovány už před ním.

Kuželosečky byly zpočátku studovány jako křivky vznikající řezem pláště kuželu rovinou vedenou kolmo na některou povrchovou přímku. Jednotlivé kuželosečky pak byly získány volbou úhlu při vrcholu kuželu. Elipsa tak byla nazývána *řezem ostroúhlého kuželu*, parabola *řezem pravoúhlého kuželu* a hyperbola *řezem tupoúhlého kuželu*. Tuto terminologii používá ve svých spisech například Archimédés ze Syrákús. Podrobněji je historie kuželoseček zpracována například v [2].



[2] Jednalo se o *kvadraturu kruhu* – zkonstruovat stranu čtverce, který má stejný obsah jako kruh daného poloměru (nelze provést eukleidovsky, číslo π je totiž transcendentní), *trisekci úhlu* – k zadanému úhlu zkonstruovat jeho třetinu, a *zdvojení krychle* – k dané úsečce, která je hranou krychle, zkonstruovat úsečku, která je hranou krychle dvojnásobného objemu ($\sqrt[3]{2}$ nelze zkonstruovat eukleidovsky). V 19. století bylo algebraickými prostředky dokázáno, že tyto konstrukce nejsou proveditelné eukleidovsky, tj. pouze pomocí pravítka a kružítka.

[3] Vypráví se, že krétský král Mínós ukládající do hrobu svého syna Glauka byl nespokojen, že je hrobka malá, a tak ji nechal zdvojnásobit, tj. „zvětšit v tomto poměru ve všech směrech“ (rozumí se tím však zdvojnásobit její objem). Později prý lidem z ostrova Délos věštba uložila zdvojnásobit jejich oltář, což je opět úkol vedoucí na problém zdvojení krychle. Geometrům se stále nedařilo takový poměr najít.

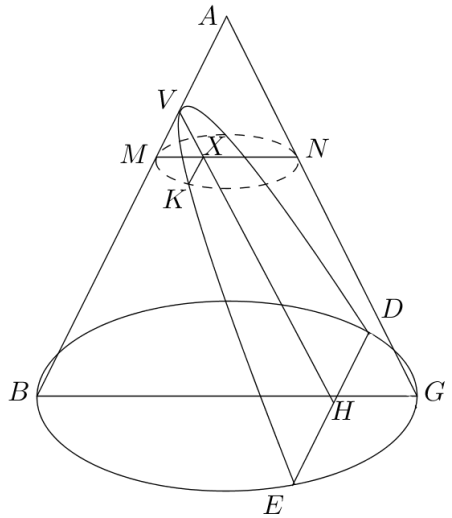
[4] Viz Eutokiův komentář k Archimédovu spisu *O kouli a válci*, odst. 78.13–80.24, publikovaný v J. L. Heiberg (ed.), *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii, vol. III.,* Teubner, Leipzig, 1915.

4.3 Názvy kuželoseček

Současné názvy regulárních kuželoseček (parabola, hyperbola, elipsa) zavedl Apollónios z Pergé kolem roku 200 př. Kr. ve svém díle *Kónika* (viz např. [8]),[5] které se stalo na téměř 2 000 let základním spisem o kuželosečkách. Toto dílo se nezachovalo celé, z původních osmi kapitol se jich dochovalo pouze prvních sedm, přičemž poslední tři z nich jen v arabském překladu. Apollónios studoval obecně řezy kosé kuželové plochy. Jeho dílo je poměrně náročné, proto se omezíme na zjednodušené odvození charakteristické vlastnosti paraboly chápané jako řez kuželové plochy rovinou rovnoběžnou s právě jednou površkou, přičemž budeme využívat moderní symboliku a omezíme se na rotační kuželovou plochu. O elipse a hyperbole pak pojednáme zjednodušeně s využitím analytické geometrie.

Uvažujme pro jednoduchost kolmou kuželovou plochu a veďme rovinu rovnoběžnou s povrchovou přímkou AG. Ukážeme, že řezem je parabola. Nechť řídicí kružnice této kuželové plochy prochází body $BDGE$ a nechť kružnice KMN leží v rovině rovnoběžné s rovinou řídicí kružnice. Její průměr je MN, bod K na ní leží a KX je rovnoběžná s DE a kolmá na MN. Podobně i DE je kolmá na BG. Jelikož je trojúhelník KMN pravoúhlý (Thalétova kružnice), plyne z Eukleidovy věty o výšce

$$|KX|^2 = |MX| \cdot |XN| \,.$$



Parabola jako řez pláště kuželu[6]

Jelikož je rovina řezu rovnoběžná s povrchovou přímkou AG, tak $|XN| = |HG|$. Navíc z podobnosti trojúhelníků $\triangle VMX$ a $\triangle VBH$ dostáváme

$$\frac{|MX|}{|BH|} = \frac{|VX|}{|VH|} \,.$$

Proto

$$|KX|^2 = |MX| \cdot |XN| = \frac{|VX| \cdot |BH|}{|VH|} \cdot |HG| = |VX| \cdot \frac{|BH| \cdot |HG|}{|VH|} \,.$$

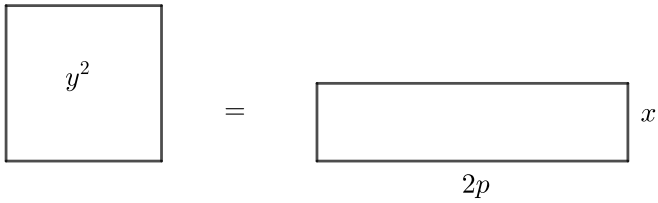
Z předchozího vztahu také vyplývá, že poměr $\frac{|BH|}{|VH|} = \frac{|MX|}{|VX|}$ nezávisí na volbě kruhového řezu rovnoběžného s řídicí kružnicí, je proto konstantní. Podobně se také zachovává délka úsečky HG. Výraz $\frac{|BH| \cdot |HG|}{|VH|}$ je tedy konstantou, kterou označíme $2p$. Označíme-li dále $|KX| = y$ a $|VX| = x$, dostaneme známou rovnici paraboly

$$y^2 = 2p\,x \,.$$

[5] Názvy parabola, hyperbola a elipsa se poprvé vyskytují postupně ve větách 11, 12 a 13 první knihy *Kónik*.

[6] Tento obrázek vznikl na základě překladu Apollóniových *Kónik* [8]. Nejedná se tedy o přesný rys v některém z užívaných zobrazení, ale o schematizující náčrtek. Podobné náčrtky nacházíme i ve starých rukopisech a vydáních textů starověkých matematiků.

Tuto rovnici můžeme interpretovat jako úlohu nalézt k zadané úsečce délky $2p$ úsečku délky x takovou, aby měl obdélník s těmito stranami stejný obsah, jako předepsaný čtverec se stranou délky y. Tato úloha se týká tzv. *přikládání ploch* (řecky paraballó, srov. též Eukleidovy *Základy*, I, 44). Odtud pochází název parabola (řecky parabolé).



Tato interpretace propozice I, 44 je popsána v Proklově komentáři k první knize Eukleidových *Základů*.

Prop. XLIIII, probl. XII. | *Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.*

Ἔστι μὲν ἀρχαῖα, φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα, ἥτε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις. ἀπὸ δὲ τούτων καὶ οἱ νεώτεροι τὰ ὀνόματα λαβόντες μετήγαγον αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰς κωνικὰς λεγομένας γραμμάς, καὶ τούτων τὴν μὲν παραβολήν, τὴν δὲ ὑπερβολὴν καλέσαντες, τὴν δὲ ἔλλειψιν, ἐκείνων τῶν παλαιῶν καὶ θείων ἀνδρῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφῇ χωρίων πρὸς εὐθεῖαν ὡρισμένην τὰ ὑπὸ τούτων σημαινόμενα τῶν ὀνομάτων ὁρώντων. ὅταν γὰρ

Obdobným způsobem bychom se mohli zabývat i elipsou a hyperbolou. Odvození je však v těchto případech náročnější.[7] Výsledný vztah by bylo nicméně možno v obou případech přepsat pomocí podobné rovnice jako u paraboly, rozdíl by byl jen v jednom přidaném členu. Snadno ji lze odvodit pomocí analytické geometrie. Rovnice elipsy, resp. hyperboly, jejíž jeden vrchol prochází počátkem, je totiž

$$\frac{(x \mp a)^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

neboli po úpravě

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}\, x \mp \frac{b^2}{a^2}\, x^2.$$

Označíme-li $p = \frac{b^2}{a}$, přejde tato vrcholová rovnice na tvar

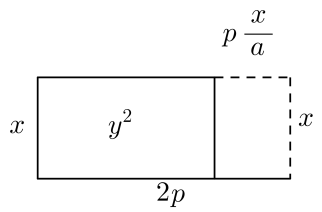
$$\boxed{y^2 = 2p\, x \mp \frac{p}{a}\, x^2.}$$

Zde můžeme vidět v porovnání s parabolou navíc červeně označený člen, který má u sebe znaménko:

- minus v případě elipsy, oproti parabole tedy něco na pravé straně „chybí“, řecky elleipó, odtud název elleipsis (ἔλλειψις),
- plus v případě hyperboly, oproti parabole tedy něco na pravé straně „přebývá“, řecky hyperballó, odtud název hyperbolé (ὑπερβολή).

[7] Viz např. [8], kapitola I, věty 12 a 13.

Oba případy Apollónios popisoval geometricky. První případ (minus) interpretoval jako úlohu přiložit k zadané úsečce délky $2p$ úsečku délky x takovou, aby výsledný obdélník obsahoval menší obdélník (plnou čarou) se stranou x, který by měl stejný obsah, jako předepsaný čtverec se stranou délky y, a zároveň byl menší o obdélník (čárkovaně) podobný zadanému obdélníku se stranami a, p. Velkému obdélníku tedy „chybí“ (elleipó) čárkovaný obdélník a odtud má elipsa svůj název.



Elipsa – přikládání ploch

V případě znaménka plus obdélník o obsahu y^2 přesahuje (řecky hyperballó) obdélník se stranami $2p$, x. Tento případ odpovídá hyperbole.

Stručně jsme tak nastínili původ názvů jednotlivých regulárních kuželoseček. Používali jsme přitom analytickou geometrii a moderní matematický aparát. Historicky přesnější odvození a znění příslušných vět, které je však o něco náročnější, lze nalézt například v [8], případně [7].

Kapitola 5

Elipsa

V této kapitole se budeme věnovat odvození kanonické rovnice elipsy, konstrukcím elipsy, vlastnostem tečny elipsy a jejich důsledkům, případně některým dalším zajímavostem, které se k elipse váží.

5.1 Planimetrická definice elipsy a rovnice elipsy

Připomeňme klasické školské odvození rovnice elipsy ze vztahu z planimetrické definice elipsy. Planimetrická definice elipsy je založena na Queteletově–Dandelinově větě, které jsme se věnovali v předchozí kapitole. Elipsou (dle planimetrické definice) rozumíme množinu všech bodů X v rovině, pro něž platí, že součet jejich vzdáleností od dvou pevně zadaných bodů F_1, F_2 je konstantní, tj.:

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a\,,$$

přičemž $|F_1F_2| < 2a$ (neboli $e < a$).

Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$, $X = [x, y]$, pak:

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a\,.$$

Umocněním na druhou dostaneme

$$(x+e)^2 + y^2 + (x-e)^2 + y^2 + 2 \cdot \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 4a^2\,,$$
$$2x^2 + 2e^2 + 2y^2 - 4a^2 = -2 \cdot \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2}\,.$$

Vydělením dvěma a opětovným umocněním na druhou dostaneme

$$(x^2 + e^2 + y^2 - 2a^2)^2 = ((x+e)^2 + y^2) \cdot ((x-e)^2 + y^2)\,,$$
$$(x^2 + e^2 + y^2 - 2a^2)^2 = (x^2 + e^2 + y^2 + 2ex) \cdot (x^2 + e^2 + y^2 - 2ex)\,,$$
$$(x^2 + e^2 + y^2)^2 - 2 \cdot (x^2 + e^2 + y^2) \cdot (2a^2) + (2a^2)^2 = (x^2 + e^2 + y^2)^2 - (2ex)^2\,.$$

Po vydělení čtyřmi a převedení některých členů na druhou stranu

$$e^2x^2 - (x^2 + e^2 + y^2) \cdot a^2 = -a^4$$

a vynásobení obou stran minus jedničkou dostaneme:

$$(-e^2 + a^2)x^2 + y^2a^2 = a^4 - e^2a^2\,.$$

Nyní si stačí uvědomit, že $a^2 = e^2 + b^2$; dosazením obdržíme:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)\,,$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2\,.$$

Nyní stačí rovnici vydělit a^2b^2 a dostaneme kanonickou rovnici elipsy:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.}$$

5.2 Eukleidova věta o výšce pro elipsu

Vyjádřeme postupně y^2 z rovnice elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

dostaneme:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}\,,$$

neboli

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)\,.$$

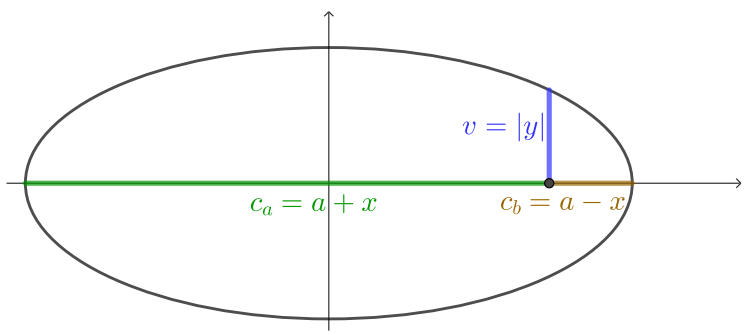
Vydělíme-li tuto rovnici $a^2 - x^2$:

$$\frac{y^2}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{a^2}\,,$$

neboli

$$\boxed{\frac{y^2}{(a-x)\cdot(a+x)} = \frac{b^2}{a^2}\,,}$$

pozorujeme, že poměr $\frac{[y(x)]^2}{(a-x)\cdot(a+x)}$ je pro všechna $x \in (-a, a)$ konstantní (konst $= \frac{b^2}{a^2}$). Touto vlastností lze elipsu charakterizovat, což odvodil již ve svých *Kónikách* Apollónios z Pergé (200 př. Kr.). Geometrická interpretace ($v^2 = \text{konst} \cdot c_a \cdot c_b$) je patrná z následujícího obrázku. Je zřejmé, že se jedná o přímé zobecnění Eukleidovy věty o výšce, která ve starověkém Řecku sloužila mimo jiné k charakterizaci kružnice.

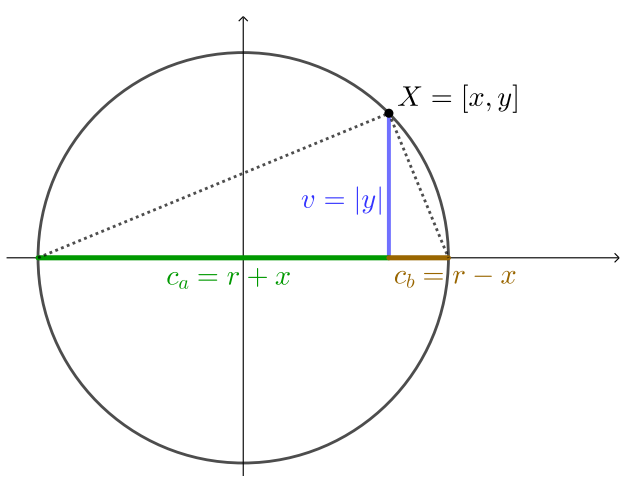


5.2.1 Speciální případ pro kružnici

Pro kružnici je $a = b = r$, takže je konstanta $\frac{b^2}{a^2}$ rovna 1, platí tedy

$$\frac{y^2}{(r-x)\cdot(r+x)} = 1\,, \qquad \text{neboli} \qquad y^2 = (r-x)\cdot(r+x)\,,$$

což můžeme interpretovat jako Eukleidovu větu o výšce ($v^2 = c_a \cdot c_b$).



5.3 Souměrnost elipsy

Uvažujme elipsu ze začátku kapitoly, jejíž rovnici jsme tam odvodili:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

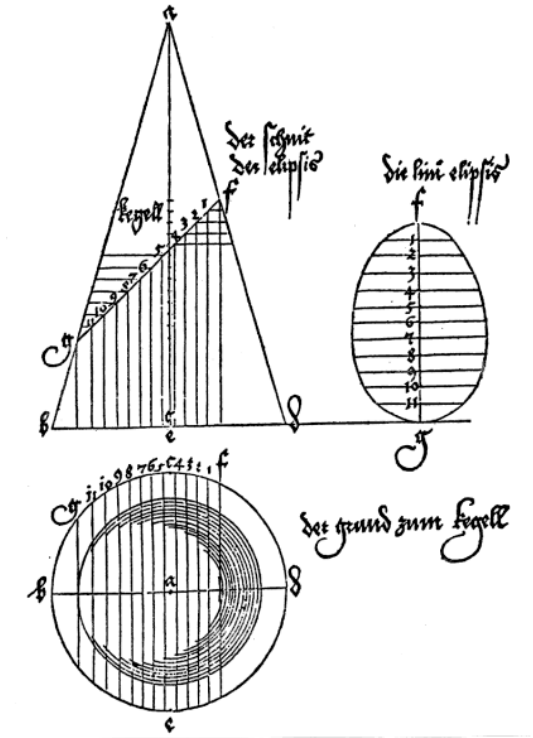
Její střed leží v počátku, hlavní osa elipsy splývá s osou x a vedlejší osa elipsy (kolmá na hlavní osu elipsy a procházející středem elipsy) splývá s osou y.

Z právě odvozené kanonické rovnice elipsy ihned plyne, že elipsa je křivkou souměrnou:

- středově podle středu elipsy: s každým bodem elipsy $X = [x, y]$ totiž náleží elipse i bod $X' = [-x, -y]$ středově souměrný podle počátku, v němž střed uvažované elipsy leží;
- osově podle hlavní osy elipsy (tj. podle osy x): s každým bodem elipsy $X = [x, y]$ totiž náleží elipse i bod $X' = [x, -y]$ osově souměrný podle hlavní osy elipsy;
- osově podle vedlejší osy elipsy (tj. podle osy y): s každým bodem elipsy $X = [x, y]$ totiž náleží elipse i bod $X' = [-x, y]$ osově souměrný podle vedlejší osy elipsy.

Pozorujeme-li však eliptický řez přímo na kuželové ploše, může nám připadat zvláštní, že by elipsa měla být středově souměrnou křivkou, případně křivkou osově souměrnou podle přímky obsahujících vedlejší osu elipsy. Hlavní vrchol elipsy, který leží blíže vrcholu kuželové plochy, budí dojem, že by měl být „špičatější“ než hlavní vrchol elipsy ležící dál od vrcholu kuželové plochy.

Stejný dojem měl například i slavný umělec Albrecht Dürer (1471–1528). V roce 1525 vydal v Norimberku dílo *Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt, in Linien Ebnen unnd gantzen corporen, ...*, v němž popsal a provedl konstrukci elipsy přímo na základě práce s řezem kuželové plochy, viz obrázek č. 34 v jeho knize (cca str. 35), který zde uvádíme (převzato z Wikipedie).

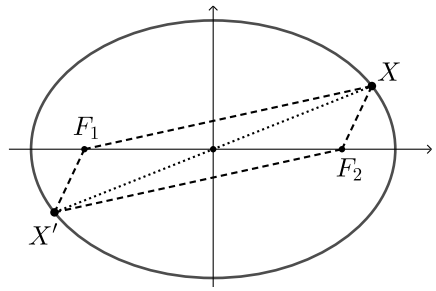


Vpravo je dobře patrný mírně vejčitý útvar, který měl být elipsou. Je třeba poznamenat, že konstrukce elipsy, kterou A. Dürer zvolil, je citlivá na přesnost, není tedy snadné ji provést dostatečně přesně.

Souměrnost elipsy je zřejmá i přímo z její planimetrické definice

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a\,.$$

Stačí pozorovat následující obrázek. Zvolme na elipse libovolný bod X a narýsujme bod X' s ním středově souměrný podle středu úsečky F_1F_2 (tj. podle středu elipsy). Ukažme, že X' je také bodem elipsy.



Ze středové souměrnosti je zřejmé, že trojúhelníky $\triangle F_1XF_2$ a $\triangle F_2X'F_1$ jsou shodné. Proto je

$$|F_1X| = |F_2X'| \quad \text{a} \quad |F_2X| = |F_1X'|\,,$$

odkud plyne:

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a \qquad \Longrightarrow \qquad |F_2X'| + |F_1X'| = 2a\,.$$

Je-li tedy bod X bodem elipsy, pak X' také leží na elipse. Elipsa je tedy středově souměrná dle svého středu.

5.4 Parametrické vyjádření elipsy

Odvoďme nyní parametrické rovnice elipsy. Velmi jednoduchý postup vychází z tzv. „goniometrické jedničky“, tj.

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,.$$

Porovnáním s kanonickou rovnicí elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ihned dojdeme ke vztahům, které jsou základem parametrického vyjádření:

$$\cos\varphi = \frac{x}{a}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{b}\,.$$

Geometrickou interpretaci obou těchto vztahů názorně uvidíme u proužkové a trojúhelníkové konstrukce elipsy. Náhrady podílů $\frac{x}{a}$ a $\frac{y}{b}$ za kosinus a sinus jsou možné, neboť $-a \le x \le a$ a $-b \le y \le b$. Oba uvedené zlomky tedy nabývají hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ stejně jako $\cos\varphi$ a $\sin\varphi$.

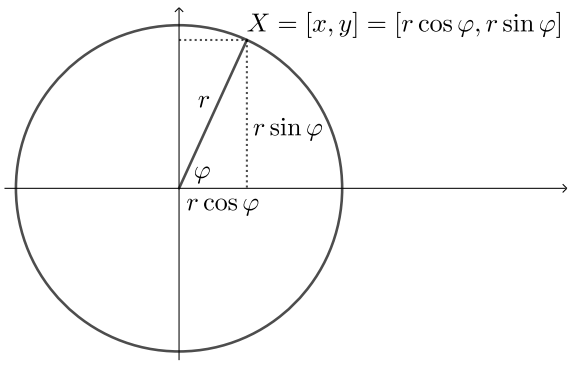
Po úpravě ihned dostáváme jedno z možných parametrických vyjádření elipsy:

$$x = a\cos\varphi\,, \qquad y = b\sin\varphi\,, \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi)\,.$$

Poznamenejme ještě, že speciálním případem je parametrizace kružnice o poloměru r (tj. $a = b = r$):

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi)\,.$$

Tyto rovnice jsou důsledkem definice goniometrických funkcí sinus a kosinus.



Formální ověření, že se jedná o body kružnice, lze provést prostým dosazením:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \,.$$

Analogicky by proběhl důkaz pro elipsu. Bod $X = [a \cos \varphi, b \sin \varphi]$ je bodem elipsy pro každé $\varphi \in \mathbb{R}$, neboť jeho souřadnice vyhovují rovnici elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \,.$$

5.5 Elipsa jako afinní obraz kružnice

Tato kapitolka je spíše drobnou poznámkou. Někdy se uvádí, že elipsa je vlastně více či méně „spláclá“ kružnice. Pokusme se o exaktnější formulaci tohoto vyjádření a ukažme, proč tomu tak je.

Uvažujme elipsu s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b, bez újmy na obecnosti předpokládejme, že tato elipsa má střed v počátku. Její parametrické vyjádření je tedy

$$x_e = a \cos \varphi \,, \qquad y_e = b \sin \varphi \,, \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi) \,.$$

Pokud jej porovnáme s parametrickým vyjádřením kružnice o poloměru a:

$$x_k = a \cos \varphi \,, \qquad y_k = a \sin \varphi \,, \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi) \,,$$

dostaneme ihned srovnání obou křivek. Pro dané $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ dostáváme jedno společné x, neboť v případě kružnice i elipsy je $x = a \cos \varphi$. Pro toto $x \in \langle -a, a \rangle$ je poměr vzdáleností bodů $[x, y_e]$ a $[x, y_k]$ od osy x (tj. od hlavní osy elipsy) konstantní:

$$\frac{|y_e|}{|y_k|} = \frac{b|\sin \varphi|}{a|\sin \varphi|} = \frac{b}{a} \,.$$

Lze tedy říci, že svislé úsečky u_e a u_k, tj. úsečka u_e s krajními body $[x, 0]$, $[x, y_e]$ pro elipsu a úsečka u_k s krajními body $[x, 0]$, $[x, y_k]$ pro kružnici, jsou pro dané x podobné s koeficientem podobnosti $\frac{b}{a}$, tj.

$$|u_e| = \frac{b}{a} \cdot |u_k| \,.$$

Zformulujme nyní toto pozorování pomocí osové afinity. Elipsa je obrazem kružnice v osové afinitě, přičemž osou této afinity je hlavní osa elipsy (což je přímka F_1F_2), směr této afinity je kolmý k hlavní ose elipsy (někdy se taková osová afinita nazývá *pravoúhlou afinitou*) a její charakteristikou je poměr poloos elipsy $\frac{b}{a}$.

Nyní lze snadno napsat analytické vyjádření této osové afinity převádějící body kružnice na body elipsy:

$$x' = x, \quad y' = \frac{b}{a} \cdot y \,.$$

Při odvozování jsme mohli vyjít z kanonických rovnic. Porovnejme tedy rovnici kružnice o poloměru a a rovnici elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b (střed obou kuželoseček je v počátku):

$$\left(\frac{x_k}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_k}{a}\right)^2 = 1 \,, \qquad \left(\frac{x_e}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_e}{b}\right)^2 = 1 \,.$$

Ihned vidíme, že člen $\left(\frac{x}{a}\right)^2$ se vyskytuje v obou rovnicích, tj. $x_e = x_k$, čemuž odpovídá $x' = x$ v analytickém vyjádření osové afinity zobrazující body kružnice na body elipsy.

Ve členech $\left(\frac{y_k}{a}\right)^2$ a $\left(\frac{y_e}{b}\right)^2$ jsou však rozdílné koeficienty: $\frac{1}{a}$ u y_k (kružnice), resp. $\frac{1}{b}$ u y_e (elipsa). Zvolíme-li tedy jedno společné x, tj. $x = x_e = x_k$, jsou si v rovnicích rovny první členy $\left(\frac{x}{a}\right)^2$. Jelikož má být součet obou členů v obou případech roven 1, musí si být rovny i druhé členy v rovnicích:

$$\frac{|y_e|}{b} = \frac{|y_k|}{a} \,, \qquad \text{tj.} \qquad |y_e| = \frac{b}{a} \cdot |y_k| \,.$$

Je tedy zřejmé, že u elipsy došlo ve srovnání s kružnicí ve směru vedlejší osy k „přeškálování“, tedy vynásobení koeficientem $\frac{b}{a}$.

5.6 Obsah vnitřní oblasti elipsy

Obsah vnitřní oblasti elipsy lze poměrně snadno vypočítat pomocí integrálů. Jednodušší postup nabízí užití Cavalieriho principu. Pro porovnání provedeme odvození oběma postupy.

Zadána je elipsa s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b, obsah ani délka nezávisí na umístění daného útvaru, a tak můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že má elipsa střed v počátku.

Cavalieriho princip

Odvoďme tedy vzorec pro obsah vnitřní oblasti zadané elipsy

$$x_e = a\cos\varphi\,, \qquad y_e = b\sin\varphi\,, \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi)\,.$$

pomocí Cavalieriho principu. Srovnávat budeme s kruhem o poloměru a, jeho parametrické vyjádření je například:

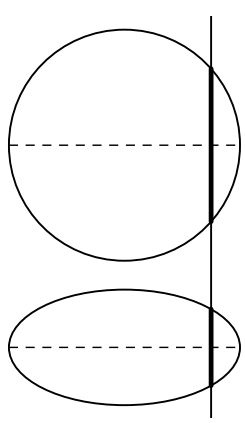
$$x_k = a\cos\varphi\,, \qquad y_k = a\sin\varphi\,, \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi)\,.$$

Budeme k tomu potřebovat (vždy pro dané φ) poměr délek $L_e(\varphi)$ vertikálních řezů vnitřní oblasti elipsy (tj. $L_e(\varphi) = 2\,|y_e|$) a délek $L_k(\varphi)$ řezů kruhu o poloměru a (tj. $L_k(\varphi) = 2\,|y_k|$), který jsme odvodili v předchozí kapitole na základě parametrických rovnic:

$$\frac{L_e(\varphi)}{L_k(\varphi)} = \frac{2\,|y_e|}{2\,|y_k|} = \frac{2\,b\,|\sin\varphi|}{2\,a\,|\sin\varphi|} = \frac{b}{a}\,.$$

Vidíme, že tento poměr je konstantní. Podle Cavalieriho principu pak budou ve stejném poměru obsah vnitřní oblasti elipsy S_e a obsah kruhu S_k, tj.

$$\frac{S_e}{S_k} = \frac{b}{a}\,.$$



Jelikož je obsah kruhu S_k o poloměru a roven $S_k = \pi a^2$, dostáváme vzorec pro obsah vnitřní oblasti elipsy:

$$S_e = \frac{b}{a} \cdot S_k = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab\,.$$

Odvodili jsme tak vztah pro obsah vnitřní oblasti zadané elipsy:

$$\boxed{S_e = \pi ab\,.}$$

Hezká je analogie se vzorcem pro obsah kruhu: místo $\pi \cdot r \cdot r$ máme $\pi \cdot a \cdot b$.

Při odvozování poměru $\frac{2\,|y_e|}{2\,|y_k|} = \frac{b}{a}$ lze použít standardní rovnici elipsy. Příslušný výpočet je shrnut v následující tabulce.

kruh	elipsa
$x^2 + y_k^2 = a^2$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y_e^2}{b^2} = 1$
$y_k = \sqrt{a^2 - x^2}$	$y_e = b \cdot \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} = \dfrac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$
délka řezu: $2 \cdot y_k$	délka řezu: $2 \cdot y_e$
$S_k = \pi a^2$	$S_e = ?$

Závěr je stejný, jako v předchozím případě. Jelikož je $\frac{2 \cdot y_e}{2 \cdot y_k} = \frac{b}{a}$, dostáváme dle Cavalieriho principu

$$S_e = \frac{b}{a} \cdot S_k = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab\,.$$

Integrální počet

Obsah vnitřní oblasti elipsy lze poměrně snadno vypočítat pomocí integrálů. Vyjádření $y_e(x)$ z rovnice elipsy jsme provedli už u výpočtu pomocí Cavalieriho principu, můžeme tedy ihned psát příslušný integrál:

$$S_e = 4 \cdot \int_0^a y_e(x)\,\mathrm{d}x = 4 \cdot \int_0^a \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Zavedeme substituci $x = a \cdot \sin\varphi$, neboť potom $a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \cdot \sin^2\varphi = a^2 \cdot (1 - \sin^2\varphi) = a^2 \cos^2\varphi$. Potom:

$$S_e = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{a} \cdot a\cos\varphi \cdot (a \cdot \cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Ze vztahu $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ vyjádříme $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. Primitivní funkcí k této funkci je

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + c\,,$$

dosazením mezí tedy dostaneme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi}{4}\,,$$

uvážíme-li, že funkce $\sin 2x$ nabývá v bodě 0 i v $\frac{\pi}{2}$ nulové hodnoty. Celkově tedy dostáváme

$$S_e = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 4ab \cdot \frac{\pi}{4} = \pi ab\,.$$

5.7 Délka elipsy

Hledání délky elipsy je nepoměrně náročnější než hledání obsahu vnitřní oblasti elipsy, které jsme provedli výše. Délku elipsy se pro porovnání pokusme vypočítat pomocí integrálů.

Je zadána elipsa s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b. Její rovnice je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

případně její parametrické vyjádření

$$x = a\cos\varphi\,, \qquad y = b\sin\varphi\,, \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi)\,.$$

Délku této elipsy vypočteme na základě vzorce pro délku křivky $X = [x(t), y(t)]$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, zadané parametricky:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Na tomto vzorci odvozovaném v rámci integrálního počtu zřetelně vidíme, že je založen na Pýthagorově větě. Nyní stačí dosadit parametrické rovnice elipsy:

$$x = a\cos\varphi\,, \qquad y = b\sin\varphi\,, \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi)\,,$$

přičemž potřebné derivace jsou $x' = -a\sin\varphi$, $y' = b\cos\varphi$; uvážíme-li ještě souměrnost elipsy, můžeme počítat pouze délku jedné čtvrtiny ($\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$). Dostaneme tak

$$L = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Výraz pod odmocninou můžeme vyjádřit pomocí kosinu:

$$a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi = a^2(1-\cos^2\varphi) + b^2\cos^2\varphi = a^2 - (a^2-b^2)\cos^2\varphi\,.$$

Jelikož je $a^2 - b^2 = e^2$ a označíme-li numerickou excentricitu $\varepsilon = \frac{e}{a}$, dostaneme

$$a^2 - (a^2-b^2)\cos^2\varphi = a^2 - e^2\cos^2\varphi = a^2(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)\,.$$

Délku elipsy tak můžeme vyjádřit vztahem

$$L = 4a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Tento integrál bohužel patří mezi vyšší transcendentní funkce, příslušnou primitivní funkci totiž nelze vyjádřit pomocí konečného počtu operací s elementárními funkcemi a jejich skládání.

Tento integrál můžeme ještě upravit pomocí substituce $\varphi = \frac{\pi}{2} - t$, dostaneme tak $\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$. Záměna mezí a změna znaménka díky $\mathrm{d}\varphi = -\,\mathrm{d}t$ se vzájemně ruší, dostáváme tak

$$\boxed{L = 4a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,.}$$

Dostáváme tak *úplný eliptický integrál druhého druhu* (úplný – meze od 0 do $\frac{\pi}{2}$), značíme jej $E(\varepsilon)$. Můžeme tedy psát:

$$L = 4a \cdot E(\varepsilon)\,.$$

Aproximace délky elipsy

Obvod elipsy lze s dobrou přesností aproximovat.

- Pro $a < 3b$ je dobrou aproximací (chyba je pak méně než pětiprocentní):

$$L \approx 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

  Všimněme si, že se jedná o 2π-násobek kvadratického průměru a, b.

- Pokud bychom použili aritmetický průměr, dostali bychom poměrně špatnou aproximaci:

$$L \approx 2\pi \cdot \frac{a+b}{2}\,.$$

  Oba předchozí vztahy jsou jistou analogií vztahu pro obvod kruhu: $o = 2\pi r$.

- Slavná je aproximace Ramanujanova:

$$L \approx \pi \cdot \left(3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right)\,.$$

Přesné vyjádření obvodu elipsy lze provést pomocí nekonečných číselných řad. Jednou z možností je

$$L = \pi(a+b)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\binom{\frac{1}{2}}{n}^2 \cdot \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2n}\right]\,.$$

Prvních několik členů vypadá takto:

$$L = \pi(a+b)\left(1 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \frac{1}{8^2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \frac{1}{16^2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \left(\frac{5}{128}\right)^2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^8 + \cdots\right)$$

5.8 Elipsa jako řez válcovou plochou

Situaci známe z běžného života: elipsu můžeme pozorovat na hladině vody v nakloněné sklenici válcového tvaru. Nebo na řezu válcového salámu, krájíme-li jej „šikmo“, tj. ne kolmo k ose válce (to bychom dostali kruhový řez).

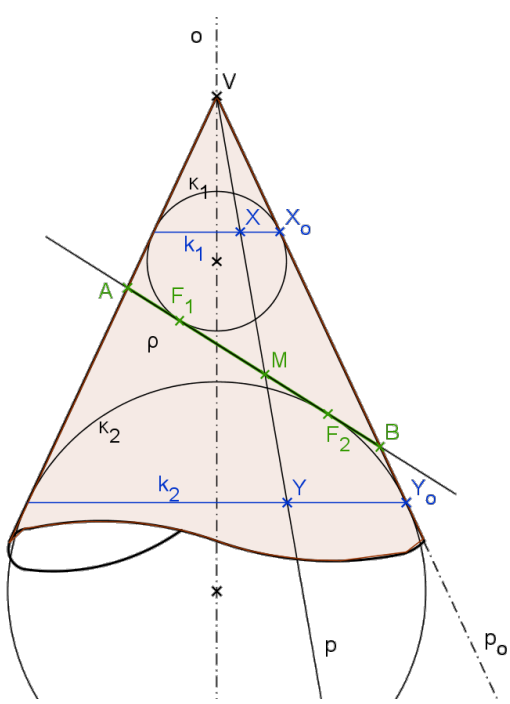
Důkaz je velmi jednoduchý a v podstatě kopíruje důkaz Quételetovy–Dandelinovy věty. Pro porovnání uveďme příslušné obrázky pro případ řezu kuželové i válcové plochy. Zdrojem jsou stránky

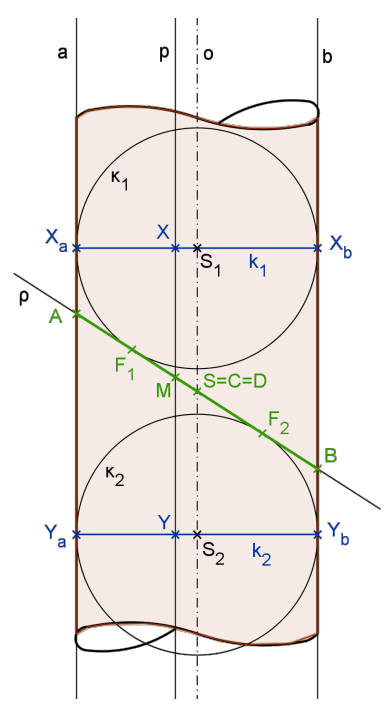
https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/vera.setmanukova.dp/?page=qdvK&pqdv=1

a

https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/vera.setmanukova.dp/?page=qdvV&pqdv=1.

Opět odtud doporučuji čerpat znění i důkaz „věty o salámu“, tj. varianty Quételetovy–Dandelinovy věty pro řezy válcové plochy rovinou.





Znění věty je z druhého obrázku zřejmé: řezem válcové plochy rovinou (není-li vedena kolmo či rovnoběžně s osou válcové plochy) je elipsa. Jejími ohnisky jsou právě body dotyku vepsaných koulí.

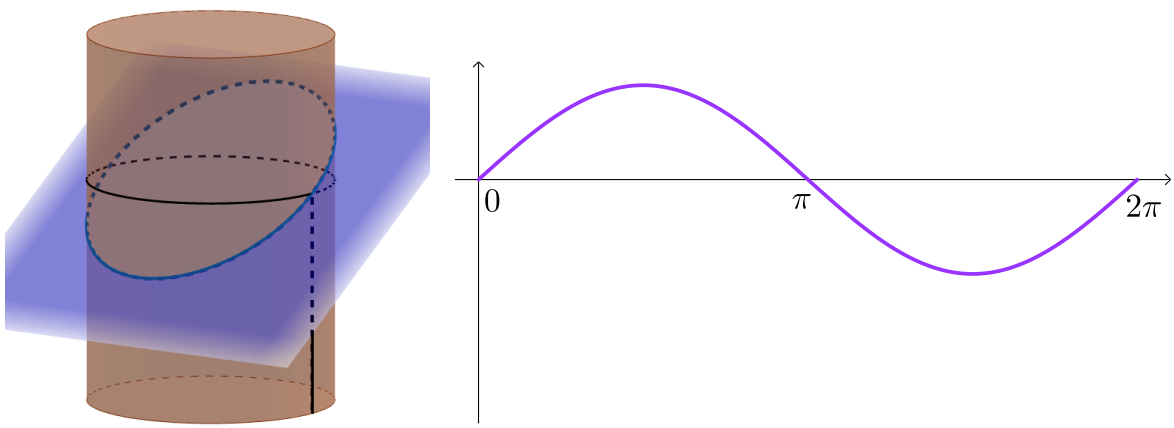
Jádro důkazu je snadné: uvažujme libovolnou povrchovou přímku p, ta protíná rovinu řezu ϱ v bodě M. Body dotyku vepsaných koulí označme F_1 a F_2. Potom $|MF_1| = |MX|$ a $|MF_2| = |MY|$. Sečtením dostaneme

$$|MF_1| + |MF_2| = |MX| + |MY| = |XY| = \text{konst.}$$

Konstantnost $|XY|$ opět plyne z rovnoběžného umístění obou kružnic dotyku k_1 a k_2.

5.9 Rozvinutí válcové plochy do roviny

V předchozí kapitole jsme zjistili, že řezem válcové plochy je elipsa. Pokud bychom takto seříznutou válcovou plochu rozvinuli do roviny, vznikla by otázka, jakou rovinnou křivku by body původní elipsy vytvořily.



Uvažujme tedy rotační válcovou plochu. Zvolme nyní kartézskou soustavu souřadnic tak, že jednotka bude rovna poloměru řídicí kružnice, osa této válcové plochy bude splývat s osou z. Pracovat budeme s řídicí kružnicí válcové plochy, která leží v rovině xy.

Po rozvinutí válcové plochy do roviny („rozřízneme“ ji podle naznačené svislé čáry) by se zvolená řídicí kružnice zobrazila do osy x v rovině rozvinuté válcové plochy a body elipsy by v této rovině vytvořily naznačenou křivku. Odvoďme nyní její rovnici.

Parametrizujme řídicí kružnici, vzhledem ke zvolené jednotce kartézské soustavy souřadnic je její poloměr $r = 1$:

$$k(S,1): \qquad x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi).$$

Popsat válcovou plochu $v(k)$ určenou řídicí kružnicí $k(S,1)$ je nyní snadné:

$$v(k): \qquad x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad z = t, \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zaměřme se nyní na rovinu ϱ řezu, která vytváří elipsu (modře). Bez újmy na obecnosti zvolme její umístění tak, že její průsečnicí s rovinou xy bude osa x. Označme α odchylku roviny ϱ a roviny xy. Je zřejmé, že eliptický řez vznikne pouze v případě, že $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Označíme-li $k = \operatorname{tg}\alpha$ (je to vlastně směrnice přímky, která je průnikem ϱ a roviny yz), dostaneme rovnici roviny řezu:

$$\varrho: \quad z = k \cdot y\,.$$

Nyní již snadno popíšeme body elipsy v závislosti na φ, čímž dostaneme rovnici hledané křivky. Body elipsy e náleží průniku roviny ϱ řezu a válcové plochy $v(k)$:

$$e = \varrho \cap v(k)\,.$$

Stačí tedy dosadit za y z rovnice válcové plochy $v(k)$ do rovnice roviny ϱ:

$$z = k \cdot \sin\varphi\,, \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi)\,.$$

Vidíme, že hledanou křivkou je sinusoida. Změníme-li označení původních proměnných z prostoru na standardní značení v rovině (jedná se o rovinu rozvinuté válcové plochy, místo φ píšeme x, místo z pak y), dostaneme rovnici křivky tvořené body elipsy v rovině válcové plochy rozvinuté do roviny v přehledném tvaru:

$$\boxed{y = k \cdot \sin x\,, \qquad x \in \langle 0, 2\pi)\,.}$$

5.10 Zahradnická konstrukce elipsy

Snad nejznámější konstrukcí elipsy je tzv. *zahradnická konstrukce*. Je založena na planimetrické definici elipsy

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a\,.$$

Ke konstrukci je potřeba provázek délky $2a$, jehož konce jsou upevněny v ohniscích F_1 a F_2; jejich vzdálenost samozřejmě musí být menší než délka provázku: $|F_1F_2| < 2a$.

Tužkou (kolíkem, rydlem, ...) pohybujeme po rovině (papíře, trávníku, ...) tak, aby byl provázek stále napjatý. Křivkou, kterou tak postupně vykreslíme, je elipsa.

5.11 Proužková součtová konstrukce elipsy

Úloha o klouzajícím žebříku: Představme si následující situaci: při malování pokoje stojíme na žebříku (přibližně v jeho třetině), ten nám na kluzké podlaze náhle „ujede“, sklouzne tedy po podlaze, přičemž bude stále opřen o stěnu. Otázkou je, po jaké křivce se budou při sklouznutí žebříku pohybovat naše chodidla stále stojící na žebříku.

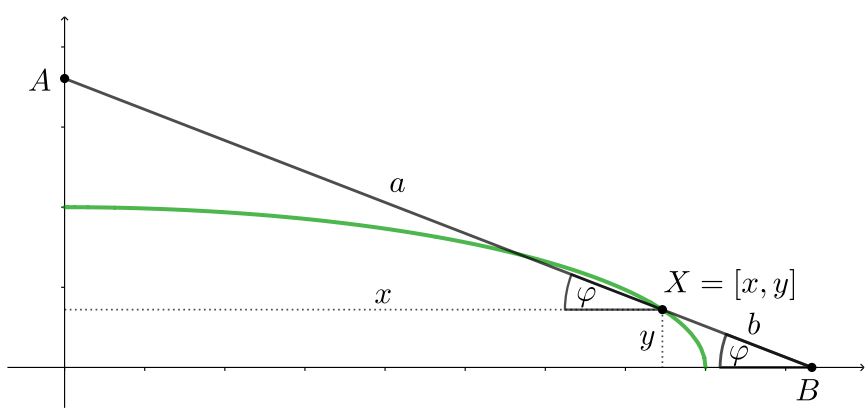
Uvažujme žebřík jako úsečku AB, její délka nechť je $|AB| = a + b$. Číslo b reprezentuje jednu část žebříku (od podlahy k příčce, na níž stojíme), číslo a pak zbylou část žebříku. Mezník – příčku na níž stojíme, vyznačme na úsečce AB jako bod X. Velikost úhlu svíraného žebříkem a podlahou označme φ.

Ilustrujme si popsanou situaci na obrázku a zjistěme souřadnice bodu $X = [x, y]$. Z malého pravoúhlého trojúhelníku s přeponou XB je patrné, že

$$\sin\varphi = \frac{y}{b}\,,$$

podobně z velkého pravoúhlého trojúhelníku s přeponou XA je vidět, že

$$\cos\varphi = \frac{x}{a}\,.$$



Našli jsme tedy hledané souřadnice bodu X: $x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi$, neboli

$$X = [a\cos\varphi, b\sin\varphi]\,, \qquad \varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right) .$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o parametrické vyjádření bodů elipsy, je hledanou křivkou oblouk elipsy.

Na popsaném principu je založen přístroj sloužící ke konstrukci elipsy, tzv. *elipsograf*. V bodě X je umístěna tužka, úsečka AB je pevnou tyčkou, která se svými konci pohybuje v kolejnicích, které jsou na sebe kolmé.

Mnohem oblíbenější je varianta založená na *proužkové rozdílové* konstrukci elipsy. Délka úsečky AB není součtem hlavní a vedlejší poloosy ($|AB| \neq a + b$), ale má délku $|AB| = a$. Tužka je upevněna na jednom konci (v bodě B), rameno je usazeno v kolejnicích v bodě A a ve vzdálenosti $a - b$ od bodu A (tj. ve vzdálenosti b od bodu B).

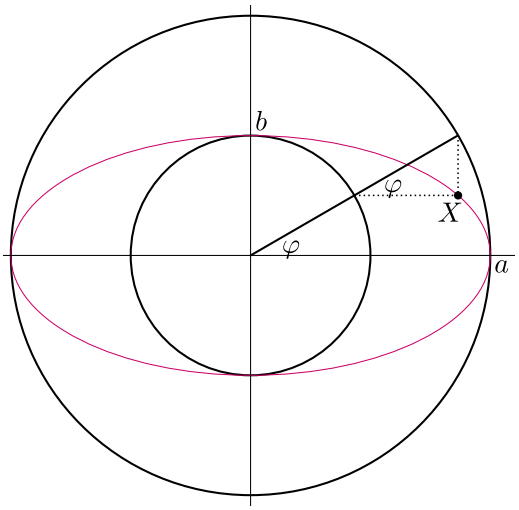
Na následujícím obrázku je elipsograf založený na proužkové rozdílové konstrukci.

Viz https://www.mathinstruments.ch/en/gallery/inv-9.008.html

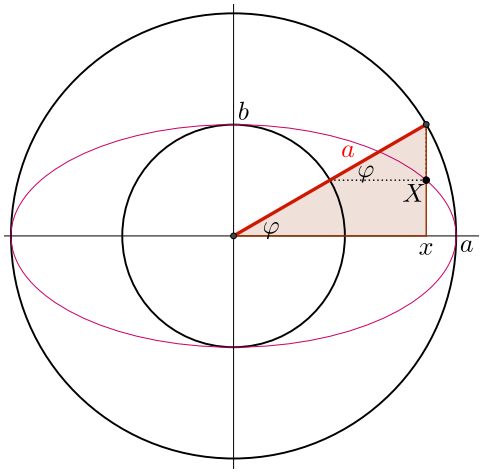
5.12 Trojúhelníková konstrukce elipsy

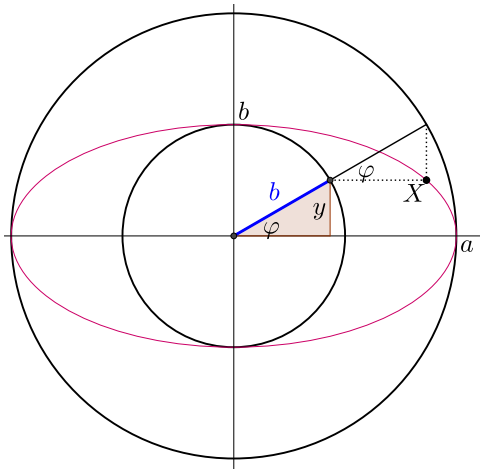
Jiný způsob, jak získat body elipsy, jejíž hlavní poloosa je rovna a a vedlejší poloosa je rovna b, objevil francouzský matematik Philippe de La Hire[1] (1640–1718). Pro jednoduchost si představme kartézskou soustavu souřadnic, v níž narýsujeme dvě soustředné kružnice se středem v počátku: jednu o poloměru a a druhou o poloměru b, viz následující obrázek. Uvažujeme-li pak orientovaný úhel s vrcholem ve společném středu obou kružnic, prvním ramenem splývajícím s kladnou poloosou x a druhým ramenem svírajícím s ním úhel velikosti $\varphi \in [0, 2\pi)$, dostaneme bod elipsy X jako vrchol pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami a přeponu tvoří část druhého ramene obsažená v mezikruží.

[1] U svého otce se naučil malovat, v 19 letech se vydal na čtyři roky do Itálie, kde se věnoval malířství a geometrii. Do Francie se vrátil jako bohatý muž, tak se mohl věnovat vědě (geometrie, vyměřování, astronomie, architektura, ...). Roku 1678 byl zvolen členem francouzské akademie (Académie des Sciences). Rozvíjel Desarguesovy myšlenky, věnoval se kuželosečkám, k nimž zaujímal projektivní přístup.



Důkaz toho, že takto zkonstruovaný bod X skutečně leží na elipse s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b vychází z výpočtu souřadnic bodu $X = [x, y]$. Vyjdeme přitom z příslušných pravoúhlých trojúhelníků.





$$\cos\varphi = \frac{x}{a} \qquad\qquad \sin\varphi = \frac{y}{b}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi)$$

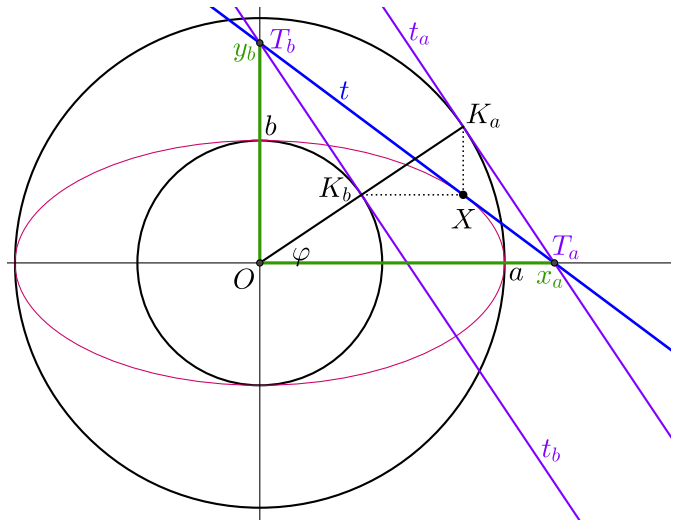
Jelikož jsme dostali parametrické vyjádření elipsy ($x = a\,\cos\varphi, \quad y = b\,\sin\varphi$), je bod X skutečně bodem elipsy. Že souřadnice x, y bodu X vyhovují rovnici elipsy, je patrné také z tohoto výpočtu:

$$1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 .$$

5.12.1 Konstrukce tečny elipsy

Philippe de La Hire ukázal, jak doplnit předchozí konstrukci bodu X elipsy, abychom získali tečnu t této elipsy v jejím bodě X, viz následující obrázek.

V předchozí konstrukci tedy doplňme tečny k oběma kružnicím v bodech K_a a K_b, v nichž je protíná průvodič; tečnu ke kružnici o poloměru a v jejím bodě K_a označme t_a, tečnu ke kružnici o poloměru b v jejím bodě K_b označme t_b. Průsečík tečny t_a s hlavní osou elipsy (tj. s osou x) označme T_a, podobně průsečík tečny t_b s vedlejší osou elipsy (tj. s osou y) označme T_b. Potom tečnou elipsy v jejím bodě X je přímka t procházející body T_a a T_b.



Ukažme, že tečnou elipsy v jejím bodě $X = [x_0, y_0]$ je modře vyznačená přímka t procházející body $T_a = [x_a, 0]$ a $T_b = [0, y_b]$, což jsou postupně průsečíky tečny t_a kružnice o poloměru a v bodě K_a s osou x a průsečík tečny t_b kružnice o poloměru b v bodě K_b s osou y.

Všechny úvahy budeme pro jednoduchost provádět v prvním kvadrantu, v obecném případě by bylo potřeba ohlídat příslušná znaménka.

Předně si všimněme, že trojúhelníky $\triangle OK_bT_b$ a $\triangle OK_aT_a$ jsou pravoúhlé (tečna ke kružnici je totiž kolmá na příslušný poloměr). V $\triangle OK_bT_b$ je vnitřní úhel při vrcholu T_b roven φ, a tak

$$\sin\varphi = \frac{|OK_b|}{|OT_b|} = \frac{b}{y_b}\,.$$

Podobně v $\triangle OK_aT_a$ je

$$\cos\varphi = \frac{|OK_a|}{|OT_a|} = \frac{a}{x_a}\,.$$

Jelikož je bod $X = [x_0, y_0]$ bodem elipsy, lze jeho souřadnice zapsat na základě parametrického vyjádření ve tvaru $X = [x_0, y_0] = [a \cdot \cos\varphi, b \cdot \sin\varphi]$ pro φ vyznačené na obrázku. Z předchozích vztahů tedy vyjádřeme y_b a x_a a nahraďme $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ pomocí y_0 a x_0:

$$y_b = \frac{b}{\sin\varphi} = \frac{b^2}{b \cdot \sin\varphi} = \frac{b^2}{y_0}\,, \qquad x_a = \frac{a}{\cos\varphi} = \frac{a^2}{a \cdot \cos\varphi} = \frac{a^2}{x_0}\,.$$

Napišme nyní rovnici přímky procházející body $T_a = [x_a, 0]$ a $T_b = [0, y_b]$. Jelikož leží tyto body na ose x, rep. ose y, můžeme rovnici takové přímky ihned psát v úsekovém tvaru:

$$\frac{x}{x_a} + \frac{y}{y_b} = 1\,.$$

Dosadíme-li za x_a i y_b, dostaneme

$$\frac{x}{\frac{a^2}{x_0}} + \frac{y}{\frac{b^2}{y_0}} = 1\,,$$

neboli

$$\frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} = 1\,,$$

což je rovnice tečny elipsy v jejím bodě $X = [x_0, y_0]$. Přímka t procházející body T_a a T_b (na obrázku zvýrazněna modře) je tedy skutečně tečnou elipsy v jejím bodě $X = [x_0, y_0]$.

5.13 Hyperoskulační kružnice

Oskulační kružnice elipsy je kružnice, která se k elipse v daném bodě co nejtěsněji přimyká. Je tedy jakousi analogií tečny; ta je však lineárním útvarem, má tedy elipsou styk prvního řádu. Kružnice je útvarem kvadratickým, má tedy s elipsou styk druhého řádu. Toto obecné pravidlo má v případě elipsy 4 výjimky: oskulační kružnice v hlavních i vedlejších vrcholech elipsy mají s elipsou styk dokonce čtvrtého řádu, proto se nazývají kružnice hyperoskulační. V této kapitole najdeme poloměr hyperoskulační kružnice v hlavním vrcholu elipsy a ukážeme si její konstrukci.

Motivace k hledání hyperoskulační kružnice

Proč hledat hyperoskulační kružnice? Bodové konstrukce elipsy, které jsme popsali, mají jednu velkou nevýhodu: umožňují zkonstruovat vždy jen jeden bod elipsy (případně dva body osově souměrné). Výsledkem konstrukce tak není křivka, ale jen jeden izolovaný bod, který na elipse leží.

Tuto situaci částečně řeší elipsografy, mechanické pomůcky založené na různých bodových konstrukcích. Pokud však takovou pomůcku nemáme, musíme si vystačit s pravítkem a kružítkem. Ke slovu pak přicházejí přibližné konstrukce.

Jednou z možností je zkonstruovat místo elipsy tzv. ovál. Kolem hlavních vrcholů elipsu nahradíme kružnicí, která se k elipse co nejtěsněji přimyká. Pokud bychom zkonstruovali i oskulační kružnice ve vedlejších vrcholech, zjistili bychom, že s oskulačními kružnicemi v hlavních vrcholech na sebe nenavazují. Mezi oskulačními kružnicemi v hlavních vrcholech je tedy třeba zkonstruovat jakýsi most tvořený kružnicovým obloukem procházejícím vedlejším vrcholem (a souměrně podle hlavní osy elipsy i pro druhý vedlejší vrchol).

Poloměr hyperoskulační kružnice

Pokusme se nyní najít rovnici oskulační kružnice k v hlavním vrcholu B elipsy dané rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Tato kružnice bude procházet hlavním vrcholem $B = [a, 0]$ dané elipsy. Vzhledem k její souměrnosti podle osy x bude střed oskulační kružnice ležet právě na ose x, jeho souřadnice tedy budou $[s, 0]$, přičemž $s \in (0, a)$. Poloměr oskulační kružnice pak bude $a - s$. Hledáme tedy kružnici $k([s, 0], a - s)$. Ta může mít s elipsou nejvýše tři průsečíky; se zmenšujícím se poloměrem se budou dva z těchto průsečíků blížit k bodu B. Kružnice k se stane oskulační kružnicí v okamžiku, kdy tyto tři průsečíky splynou.

Vyjádřeme nyní tuto myšlenku rovnicemi a najděme s tak, aby kružnice k byla oskulační kružnicí elipsy v jejím vrcholu B. Rovnice elipsy a kružnice $k([s, 0], a - s)$ jsou:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad (x - s)^2 + y^2 = (a - s)^2\,.$$

Jejich společné body nalezneme řešením soustavy. Obě strany rovnice elipsy vynásobíme b^2, aby se při odečtení jedné rovnice od druhé odečetl člen y^2:

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2\,, \qquad (x - s)^2 + y^2 = (a - s)^2\,,$$

$$\frac{b^2x^2}{a^2} - (x - s)^2 = b^2 - (a - s)^2\,.$$

Tuto kvadratickou rovnici upravíme tak, aby byly zřejmé její koeficienty:

$$\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) x^2 - (-2sx + s^2) = b^2 - (a^2 - 2as + s^2)\,,$$

$$\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) x^2 + 2sx - b^2 + a^2 - 2as = 0\,.$$

Jelikož je $a^2 = b^2 + e^2$, můžeme rozdíl $a^2 - b^2$ nahradit e^2:

$$-\left(\frac{e}{a}\right)^2 x^2 + 2sx + (e^2 - 2as) = 0\,.$$

Tato kvadratická rovnice bude mít jeden dvojnásobný kořen, bude-li mít nulový diskriminant:

$$D = 4s^2 + 4\left(\frac{e}{a}\right)^2 (e^2 - 2as) = 0\,.$$

Rovnici ještě po vydělení 4 a vynásobení a^2 upravíme:

$$a^2s^2 + e^2(e^2 - 2as) = 0, \quad \text{tj.} \;\; a^2s^2 + e^4 - 2ase^2 = 0, \quad \text{tj.} \;\; \left(e^2 - as\right)^2 = 0\,.$$

Vidíme, že $D = 0$ právě tehdy, když $e^2 - as = 0$, neboli

$$e^2 = as.$$

Odtud již snadno nalezneme souřadnice středu i poloměr $r_o = a - s$ oskulační kružnice:

$$s = \frac{e^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a} = a - \frac{b^2}{a}\,, \qquad \text{odtud:} \quad r_o = a - s = \frac{b^2}{a}\,.$$

Hledaný poloměr r_o hyperoskulační kružnice elipsy v hlavním vrcholu je tedy roven parametru elipsy:

$$\boxed{r_o = \frac{b^2}{a} = p\,.}$$

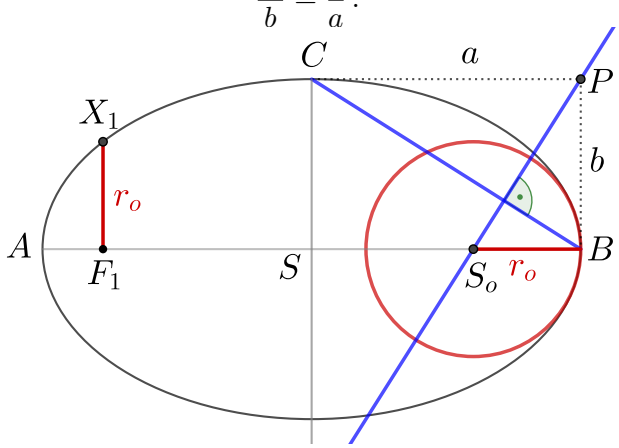
Oskulační kružnicí elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b v jejím hlavním vrcholu B je tedy

$$k\left(\left[0, a - \frac{b^2}{a}\right];\ \frac{b^2}{a}\right)\,.$$

Konstrukce hyperoskulační kružnice

Zbývá však otázka, jak lze právě nalezenou oskulační kružnici zkonstruovat. Vyjdeme ze vztahu $r_o = \frac{b^2}{a}$, který upravíme do tvaru, který budeme moci pohodlně interpretovat pomocí podobnosti trojúhelníků:

$$\frac{r_o}{b} = \frac{b}{a}\,.$$



Jelikož jsou dle věty *uu* pravoúhlé trojúhelníky $\triangle BPC$ a $\triangle S_oBP$ podobné, platí pro délky jejich stran:

$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|S_oB|}{|BP|}\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{b}{a} = \frac{r_o}{b}\,.$$

Vidíme tedy, že kolmice vedená ke spojnici BC bodem P protíná hlavní osu elipsy ve středu S_o hyperoskulační kružnice.

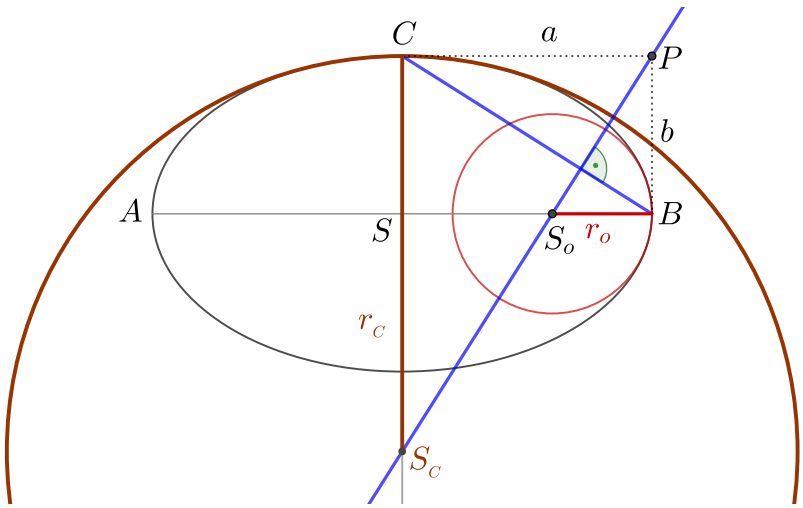
Jinou možností je využít pro konstrukci poloměru r_o hyperoskulační kružnice ohnisko F_1: je-li X_1 bodem elipsy takovým, že úsečka X_1F_1 je kolmá na hlavní osu elipsy, má úsečka X_1F_1 délku rovnou přímo parametru elipsy.

Hyperoskulační kružnice ve vedlejším vrcholu

Pokud bychom chtěli najít hyperoskulační kružnici ve vedlejším vrcholu elipsy, mohli bychom postupovat obdobně jako v případě hyperoskulační kružnice v hlavním vrcholu. Záměnou hlavní a vedlejší (polo)osy bychom zjistili, že její poloměr $r_C = \frac{a^2}{b}$. Odtud plyne:

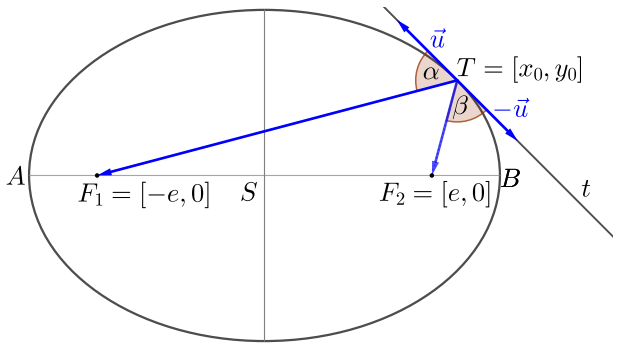
$$\frac{r_C}{a} = \frac{a}{b}\,.$$

Pro konstrukci jejího středu S_C tedy můžeme využít předchozí konstrukce: středem S_C hyperoskulační kružnice ve vedlejším vrcholu C elipsy je průsečík přímky obsahující vedlejší osu elipsy s kolmicí vedenou ke spojnici BC bodem P.



5.14 Ohnisková vlastnost elipsy – odvození analytickou metodou

Ohnisková vlastnost elipsy je dobře známa: paprsek vyslaný z jednoho ohniska libovolným směrem se od elipsy odrazí vždy do druhého ohniska.



Důkaz analytickou metodou je myšlenkově jednoduchý, dovést výpočty do zdárného konce je však zdlouhavou prací. K popisu odrazu paprsku od elipsy v jejím bodě T s výhodou využijeme tečnu: místo odrazu od elipsy budeme uvažovat odraz paprsku od tečny. Její rovnici známe ze střední školy:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1\,.$$

Normálovým vektorem je tedy

$$\vec{n_t} = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)\,.$$

Za směrové vektory tečny t tedy můžeme volit

$$\vec{u} = \left(\frac{-y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2}\right), \qquad -\vec{u} = \left(\frac{y_0}{b^2}, \frac{-x_0}{a^2}\right).$$

Nyní již stačí porovnat úhly příslušných vektorů a ověřit, že $\alpha = \beta$, tedy že platí:

$$\boxed{\angle\left(F_1 - T,\, \vec{u}\right) = \angle\left(F_2 - T,\, -\vec{u}\right).}$$

Výpočet je přímočarý: vektory zapíšeme pomocí souřadnic a využijeme skalárního součinu:

$$\angle\left((-e - x_0, -y_0); \left(\frac{-y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2}\right)\right) = \angle\left((e - x_0, -y_0); \left(\frac{y_0}{b^2}, \frac{-x_0}{a^2}\right)\right).$$

Odchylka vektorů se nezmění, nahradíme-li některý z vektorů jejich nenulovým násobkem (zde druhý vektor vynásobíme a^2b^2):

$$\angle\left((-e - x_0, -y_0); \left(-a^2y_0, b^2x_0\right)\right) = \angle\left((e - x_0, -y_0); \left(a^2y_0, -b^2x_0\right)\right)$$

Vzhledem k tomu, že odchylka vektorů je číslo z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ a funkce kosinus je na tomto intervalu prostá, je rovnost odchylek vektorů ekvivalentní s rovností jejich kosinů, které vyjádříme pomocí vztahu $\cos\angle(\vec{u}; \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$:

$$\frac{ea^2y_0 + a^2x_0y_0 - b^2x_0y_0}{\|(-e - x_0, -y_0)\| \cdot \|\left(-a^2y_0, b^2x_0\right)\|} = \frac{ea^2y_0 - a^2x_0y_0 + b^2x_0y_0}{\|(e - x_0, -y_0)\| \cdot \|\left(a^2y_0, -b^2x_0\right)\|}.$$

Nyní tuto rovnost zjednodušíme vynásobením členem $\|\left(a^2y_0, -b^2x_0\right)\|$, který se vyskytuje v součinu na obou stranách. Následně provedeme rutinní úpravy.

$$\frac{ea^2y_0 + e^2x_0y_0}{\|(-e - x_0, -y_0)\|} = \frac{ea^2y_0 - e^2x_0y_0}{\|(e - x_0, -y_0)\|}$$

$$ey_0 \cdot \frac{a^2 + ex_0}{\|(-e - x_0, -y_0)\|} = ey_0 \cdot \frac{a^2 - ex_0}{\|(e - x_0, -y_0)\|}$$

Obě strany umocníme na druhou, abychom mohli pohodlně rozepsat normu bez použití druhé odmocniny. Obě strany jsou kladné, jedná se tedy o ekvivalentní úpravu ($e < a$, $x_0 < a$, proto $a^2 - ex_0 > 0$).

$$\frac{(a^2 + ex_0)^2}{\|(-e - x_0, -y_0)\|^2} = \frac{(a^2 - ex_0)^2}{\|(e - x_0, -y_0)\|^2}$$

$$(a^2 + ex_0)^2 \cdot \|(e - x_0, -y_0)\|^2 = (a^2 - ex_0)^2 \cdot \|(-e - x_0, -y_0)\|^2$$

$$(a^4 + 2a^2ex_0 + e^2x_0^2) \cdot (e^2 - 2ex_0 + x_0^2 + y_0^2) = (a^4 - 2a^2ex_0 + e^2x_0^2) \cdot (e^2 + 2ex_0 + x_0^2 + y_0^2)$$

$$(a^4 + e^2x_0^2 + 2a^2ex_0) \cdot (e^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2ex_0) = (a^4 + e^2x_0^2 - 2a^2ex_0) \cdot (e^2 + x_0^2 + y_0^2 + 2ex_0)$$

$$-(a^4 + e^2x_0^2)2ex_0 + 2a^2ex_0(e^2 + x_0^2 + y_0^2) = (a^4 + e^2x_0^2)2ex_0 - 2a^2ex_0(e^2 + x_0^2 + y_0^2)$$

Nyní vydělíme $2ex_0$ a roznásobíme závorky, psát budeme jen členy, které se evidentně neodečtou.

$$-(a^4 + e^2x_0^2) + a^2(e^2 + x_0^2 + y_0^2) = (a^4 + e^2x_0^2) - a^2(e^2 + x_0^2 + y_0^2)$$

$$a^2(e^2 + x_0^2 + y_0^2) = a^4 + e^2x_0^2$$

$$(a^2 - e^2)x_0^2 + a^2y_0^2 = a^4 - a^2e^2$$

$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

což je platná rovnost, neboť $T = [x_0, y_0]$ je bodem elipsy, takže vyhovuje její rovnici. Dokázali jsme tedy, že $\alpha = \beta$, neboli

$$\angle\left(\overrightarrow{TF_1}, \vec{u}\right) = \angle\left(\overrightarrow{TF_2}, -\vec{u}\right).$$

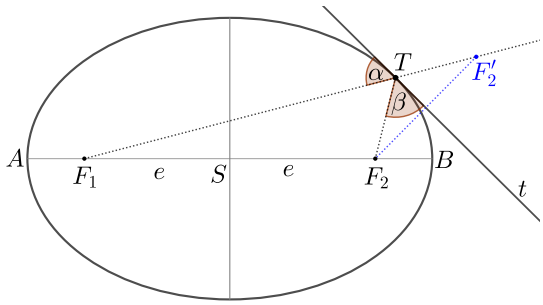
Zdlouhavost předchozího výpočtu vede k otázce, zda by nebylo možno dokázat ohniskovou vlastnost elipsy elegantněji. K takovému důkazu budeme potřebovat charakterizaci tečny elipsy.

5.15 Tečna elipsy

Body elipsy T lze charakterizovat tím, že $|TF_1| + |TF_2| = 2a$. Narýsujme průvodiče TF_1, TF_2 a přenesme úsečku TF_2 na polopřímku $\overrightarrow{F_1T}$ tak, aby vznikla úsečka TF_2' a úsečka F_1F_2' byla součtem úseček F_1T a TF_2'. Pro bod F_2' ležící na polopřímce $\overrightarrow{F_1T}$ tedy bude platit:

$$|TF_2| = |TF_2'| \quad \text{a} \quad |F_1F_2'| = |AB| = 2a\,.$$

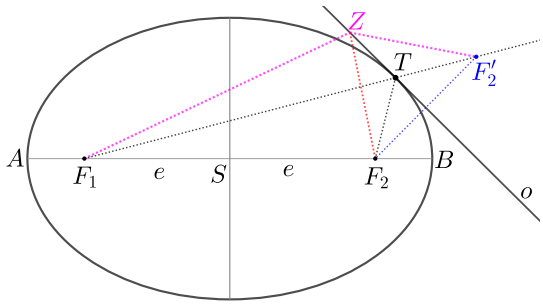
Trojúhelník $\triangle F_2F_2'T$ je tedy rovnoramenný.



Pozorujme nyní tečnu t elipsy v bodě T na následujícím obrázku. Vypadá to, jako by byla osou úhlu $\angle F_2TF_2'$. V tom případě by t byla kolmá na spojnici F_2F_2' a rovnoramenný trojúhelník $\triangle F_2F_2'T$ by byl tečnou t půlen na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.

Důkaz

Ukažme nyní, že tomu tak skutečně je, tj. že tečna t je osou úhlu $\angle F_2TF_2'$. Zkonstruujme osu o úhlu $\angle F_2TF_2'$ a ukažme, že je tato osa tečnou elipsy v bodě T, tj. že má s elipsou jediný společný bod T.



Osa o má s elipsou společný bod T. Pokud je o tečnou elipsy, je bod T jejich jediným společným bodem. Pokud by osa o byla sečnou elipsy, měla by s elipsou společný ještě jeden bod. Ukážeme, že tato varianta nemůže nastat. Kdyby totiž takový druhý společný bod elipsy a osy o existoval, mohli bychom jej označit Z a musel by vyhovovat charakteristické vlastnosti elipsy:

$$|ZF_1| + |ZF_2| = 2a\,.$$

Uvážíme-li však trojúhelník $\triangle F_1ZF_2'$, dostáváme z trojúhelníkové nerovnosti

$$|ZF_1| + |ZF_2'| > |F_1F_2'| = 2a\,.$$

Jelikož je $|ZF_2'| = |ZF_2|$, což plyne z osové souměrnosti podle osy o (trojúhelník $\triangle F_2ZF_2'$ je tedy rovnoramenný), přejde předchozí nerovnost v

$$|ZF_1| + |ZF_2| > 2a\,,$$

bod Z tedy není bodem elipsy a elipsa má s osou o úhlu $\angle F_2TF_2'$ jediný společný bod. Osa o je tedy tečnou elipsy v bodě T:

$$\boxed{o = t.}$$

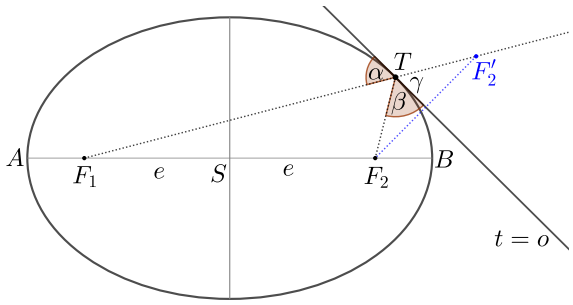
Dostáváme tak návod, jak tečnu elipsy v jejím daném bodě T zkonstruovat:

$$\boxed{\text{tečna je osou úsečky } F_2F_2'.}$$

Poznamenejme ještě, že bod F_2' leží na kružnici se středem F_1 a s poloměrem $2a$.

5.16 Ohnisková vlastnost elipsy – jednoduchý syntetický důkaz

Vzhledem k tomu, že tečna t elipsy je osou úsečky F_2F_2', dělí tato tečna rovnoramenný trojúhelník $\triangle F_2F_2'T$ na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky (t je totiž osou úhlu $\angle F_2TF_2'$). Proto $\beta = \gamma$.



Úhly α a γ jsou vrcholové, proto $\alpha = \gamma$. Celkem tak dostáváme ohniskovou vlastnost elipsy:

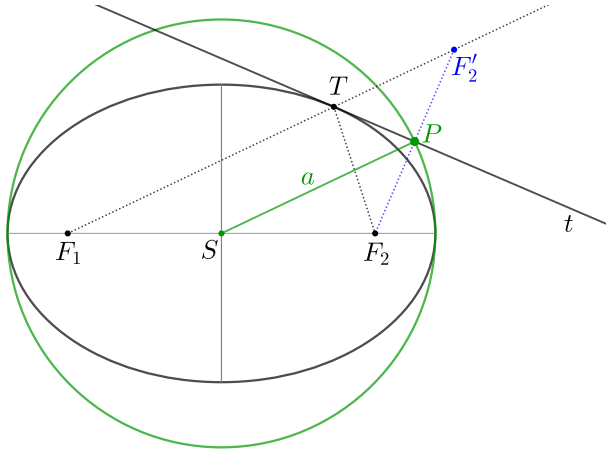
$$\boxed{\alpha = \beta.}$$

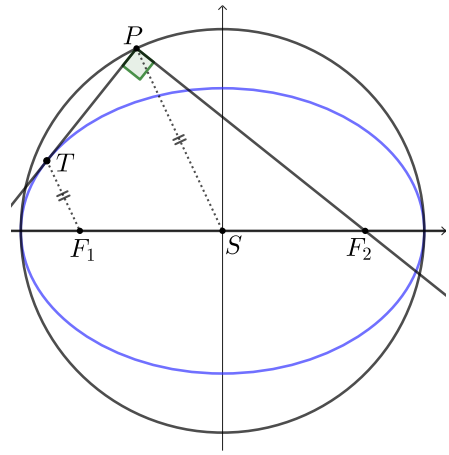
5.17 Vrcholová kružnice a rovnoběžné průvodiče

Kružnici, která má s elipsou společný střed a pochází jejími hlavními vrcholy, se nazývá *vrcholová kružnice*. Označme ještě střed spojnice F_2F_2' písmenem P; vlastně je to průsečík tečny t elipsy s úsečkou F_2F_2'.

Vrcholová kružnice a bod P mají některé pěkné vlastnosti, např.:

- Bod P leží na vrcholové kružnici:
$$|SP| = a\,.$$
- Již jsme ukázali, že kolmice k F_2P procházející bodem P je tečnou elipsy. Je tedy
$$PT \perp PF_2 \qquad (\text{neboli } t \perp PF_2)\,.$$
- Platí také modifikované tvrzení: pokud by byl bod P ležící na vrcholové kružnici vrcholem pravého úhlu a jedno jeho rameno by procházelo některým z ohnisek elipsy, bylo by druhé rameno tečnou elipsy.
- Průvodiče SP a F_1T jsou vždy rovnoběžné:
$$SP \,||\, F_1T\,.$$





Dokážeme první a poslední tvrzení.

5.18 Égregia proprietás

Otázka: Jak poznáme, že přímka $y = kx + q$ je tečnou elipsy?

Kritérium odvodil již Apollónios z Pergé (200 př. Kr.) ve svých *Kónikách*, III,42. Nezávisle na něm odvodil totéž kritérium Leonhard Euler (1748) a nazval jej *égregia proprietás* (výjimečná vlastnost).
Kritérium pro tečnu elipsy: Přímka $y = kx + q$ je tečnou elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

právě tehdy, když

$$\boxed{a^2k^2 + b^2 = q^2\,.}$$

Odvození této podmínky je vlastně důkazem jedné strany implikace:

je-li přímka $y = kx + q$ tečnou elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, platí $a^2k^2 + b^2 = q^2$.

Toto odvození můžeme založit na charakteristické vlastnosti tečny elipsy: má s elipsou společný právě jeden bod. Najděme tedy podmínku, kdy má soustava

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1\,, \\ y &= kx + q\,, \end{aligned}$$

jediné řešení. Dosazením za y z rovnice přímky do rovnice elipsy dostaneme kvadratickou rovnici:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx+q)^2}{b^2} = 1\,.$$

Odstraníme jmenovatele a umocníme dvojčlen na druhou:

$$b^2x^2 + a^2(k^2x^2 + 2kxq + q^2) = a^2b^2$$

a sdružíme členy tak, aby byly patrné koeficienty kvadratické rovnice:

$$(b^2 + a^2k^2)\cdot x^2 \;+\; 2kqa^2\cdot x \;+\; a^2(q^2 - b^2) \;=\; 0\,.$$

Kvadratická rovnice má jediný kořen právě tehdy, když je její diskriminant roven nule, tj.

$$(2kqa^2)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)a^2(q^2 - b^2) = 0\,.$$

Rovnost vydělíme $4a^2$ a vynásobíme obě závorky:

$$k^2q^2a^2 = b^2q^2 - b^4 + a^2k^2q^2 - a^2k^2b^2\,.$$

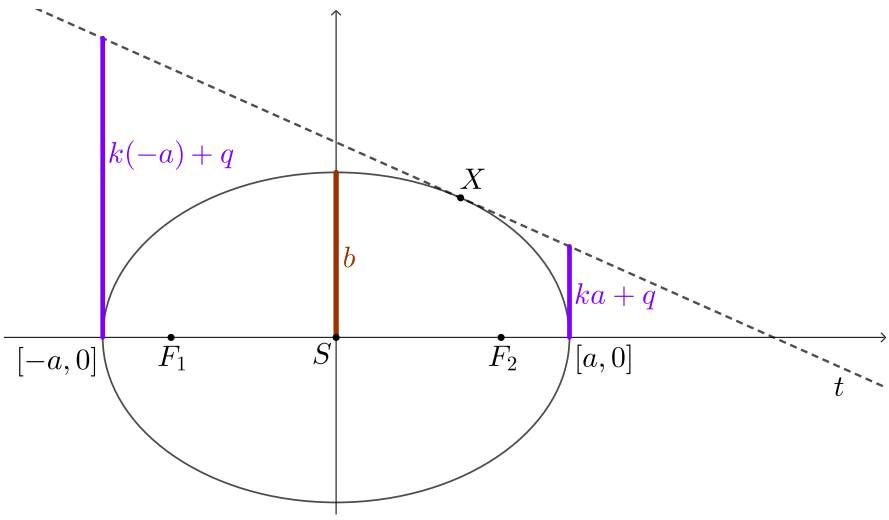
Dále celou rovnost vydělíme b^2. Dostaneme tak

$$0 = q^2 - b^2 - a^2k^2\,,$$

což je rovnost, kterou jsme chtěli odvodit:

$$a^2k^2 + b^2 = q^2\,.$$

Dokázali jsme tak jednu stranu implikace.



Geometrická interpretace: Apollónios formuloval tuto podmínku (tj. $b^2 = q^2 - a^2k^2$, zde uvádíme modernizovanou podobu pomocí matematické symboliky) ve tvaru

$$(q - ak) \cdot (q + ak) = b^2.$$

V této podobě je dobře vidět geometrická interpretace této podmínky, stačí si uvědomit, že $q - ak$ a $q + ak$ jsou y-ovými souřadnicemi bodů na tečně $t\colon y = kx + q$, tj.

$$y(-a) = k(-a) + q = q - ak \qquad \text{a} \qquad y(a) = ka + q = q + ak\,.$$

Vedlejší poloosa b je tedy geometrickým průměrem délek fialově vyznačených úseček.

Důkaz pomocí rovnice tečny: Známe-li tvar rovnice tečny elipsy v jejím bodě $X = [x_0, y_0]$ (vyloučíme ovšem oba hlavní vrcholy $[a, 0]$ a $[-a, 0]$), tj.

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1\,,$$

lze ověřit kritérium

$$a^2k^2 + b^2 = q^2$$

prostým dosazením. Stačí si uvědomit, že směrnicový tvar rovnice tečny je

$$y = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot x + \frac{b^2}{y_0}\,,$$

odkud snadno vidíme $k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ a $q = \frac{b^2}{y_0}$. Dosaďme tedy za k a q do rovnosti

$$a^2k^2 + b^2 = q^2\,,$$

dostaneme:

$$a^2\left(-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{b^2}{y_0}\right)^2\,.$$

Ve dvou ze tří výrazů pozorujeme $\frac{b^4}{y_0^2}$, a tak tímto zlomkem obě strany vydělíme:

$$a^2\left(-\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \frac{y_0^2}{b^2} = 1\,,$$

neboli

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1\,.$$

Tato rovnost je splněna, neboť bod $X = [x_0, y_0]$ je bodem elipsy, vyhovuje tedy její rovnici. Dokázali jsme tedy, že každá tečna $y = kx + q$ elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ splňuje podmínku $a^2k^2 + b^2 = q^2$.

Opačná implikace: splňuje-li přímka $y = kx + q$ podmínku $a^2k^2 + b^2 = q^2$, je tečnou elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, má tedy s touto elipsou jediný společný bod.

Přímka vyhovující předpokladům má rovnici $y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}$ (dosazeno za q do rovnice přímky). Ukažme, že tato přímka má s elipsou jediný společný bod. Určeme tedy počet řešení soustavy

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1\,,\\ y &= kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}\,.\end{aligned}$$

Dosazením za y vyjádřené z druhé rovnice do první dostaneme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}\right)^2}{b^2} = 1\,.$$

Upravme zvlášť čitatel druhého zlomku:

$$\left(kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}\right)^2 = k^2x^2 \pm 2kx\sqrt{a^2k^2 + b^2} + a^2k^2 + b^2\,.$$

Rovnici tak můžeme psát ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2x^2 \pm 2kx\sqrt{a^2k^2 + b^2} + a^2k^2 + b^2}{b^2} = 1\,,$$

neboli (po odečtení 1 na obou stranách a převedení na společný jmenovatel):

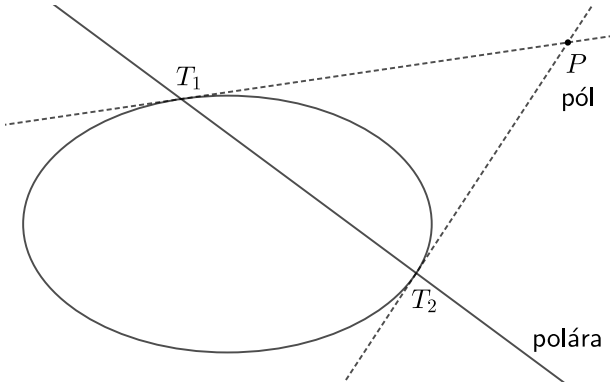
$$\frac{(a^2k^2 + b^2)x^2 \pm 2a^2kx\sqrt{a^2k^2 + b^2} + a^4k^2}{a^2b^2} = 0\,,$$

což je (po vynásobení obou stran a^2b^2):

$$\left(x\sqrt{a^2k^2 + b^2} \pm a^2k\right)^2 = 0\,.$$

Jedná se tedy o kvadratickou rovnici s neznámou x, která má jediné řešení pro každé $k \in \mathbb{R}$. Každá přímka $y = kx + q$ splňující podmínku $a^2k^2 + b^2 = q^2$ je tedy tečnou elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, neboť s ní má jediný společný bod. Volba znaménka $+$, resp. $-$, odpovídá rovnoběžným tečnám elipsy se zvolenou směrnicí k.

5.19 Pól a polára

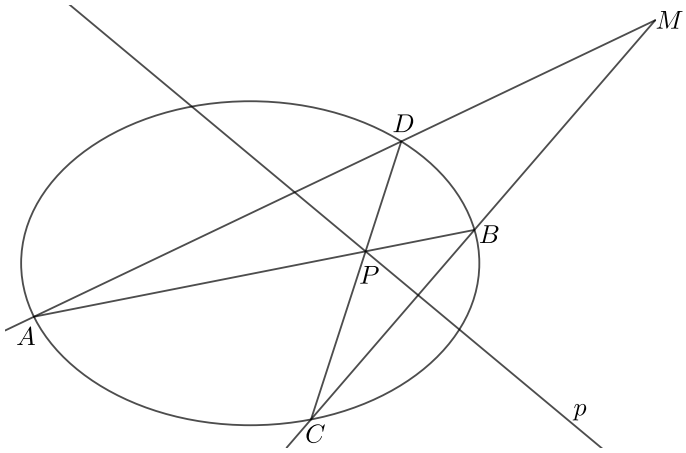


Pozorování: Prochází-li tětiva kuželosečky daným bodem, protínají se tečny v jejich krajních bodech na jediné přímce.

Dvojice tečen kuželosečky vedené z bodů dané přímky určují tětivy, které se protínají v jediném bodě.

Tětivy se protínají na poláře

Dvojice sečen MA, MC elipsy vedené z daného bodu M (pól) vnější oblasti elipsy určují tětivy AB, CD, které se protínají na poláře p bodu M vzhledem k elipse (v bodě P).



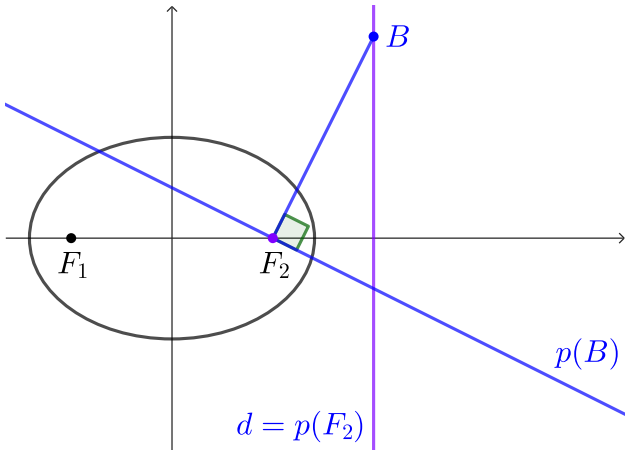
Tětivy AB, CD se protínají na poláře p bodu M vzhledem k elipse

5.19.1 Kolmost spojnice bodu B řídicí přímky s ohniskem a poláry bodu B

V roce 1685[2] dokázal Philippe de la Hire, že pro libovolný bod B ležící na poláře ohniska F_2 (ta je tedy zároveň řídicí přímkou elipsy) je spojnice BF_2 kolmá na poláru bodu B:

$$\boxed{BF_2 \perp p(B)\,.}$$

[2] de la Hire Ph.: *Sectiones Conicae en novem libros distributae*, Paris, 1685.



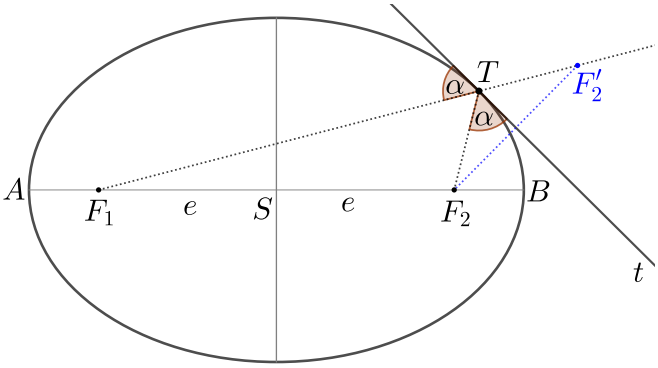
5.20 Feynmanova konstrukce elipsy

Charakterizaci tečny elipsy, kterou jsme odvodili, lze použít pro konstrukci elipsy. Myšlenku této konstrukce elipsy použil fyzik R. Feynman ve svých slavných přednáškách z fyziky (vyšly knižně, i v českém překladu). Záznam této konkrétní přednášky však byl považován za ztracený, nakonec se však našly fotografie tabulí a přednáška vyšla jako samostatná kniha, viz např.

https://www.megaknihy.cz/fyzika/146053-feynmanovy-stratena-prednaska.html.

Tato přednáška obsahovala důkaz, že se planety (případně i jiná vesmírná tělesa) pohybují po kuželosečkách. Tento důkaz byl veden elementárně a byl založen právě na konstrukci elipsy, kterou si právě popíšeme.

Připomeňme si obrázek z kapitoly o tečně elipsy.

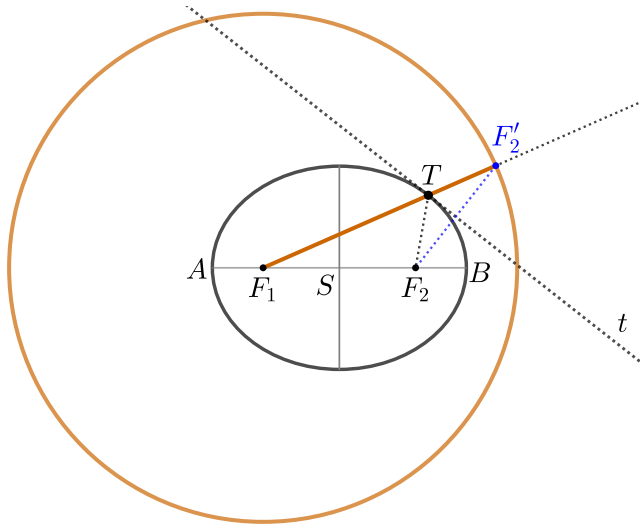


Dokázali jsme, že trojúhelník $\triangle F_2F_2'T$ je rovnoramenný, tečna t je tedy osou úsečky F_2F_2' a $|TF_2| = |TF_2'|$. Z planimetrické definice elipsy plyne, že $|F_1T| + |F_2T| = 2a$; použijeme-li však rovnost $|TF_2| = |TF_2'|$, dostaneme

$$|F_1T| + |TF_2'| = 2a\,, \quad \text{neboli} \quad |F_1F_2'| = 2a\,,$$

$|F_1F_2'|$ je tedy konstantní. Dostáváme tak následující zajímavý výsledek.

Věta: *Každý bod F_2' souměrný podle tečny t elipsy s jedním ohniskem F_2 elipsy leží na kružnici k se středem ve druhém ohnisku F_1 a s poloměrem rovným $2a$.*



Klíčové vztahy k obrázku tedy jsou:

$$|TF_2| = |TF_2'| \quad \Longrightarrow \quad |F_1F_2'| = 2a\,.$$

Zkusme se ještě podívat na jednu vlastnost oranžové kružnice k z předchozí věty. Vzdálenost bodu T elipsy od bodu F_2' kružnice a od ohniska F_2 je stejná:

$$|TF_2| = |TF_2'|\,.$$

Tato vlastnost připomíná planimetrickou definici paraboly, jejímž ohniskem je bod F_2 a řídicí přímkou d_p: vzdálenost bodu T_p paraboly od jejího ohniska F_2 a od řídicí přímky je stejná:

$$|T_pF_2| = |Td_p|\,.$$

To nás vede k tomu, že oranžově zvýrazněná kružnice k je vlastně pro elipsu analogií řídicí přímky.

Definice: Kružnici k z předchozí věty nazýváme řídicí kružnicí elipsy.

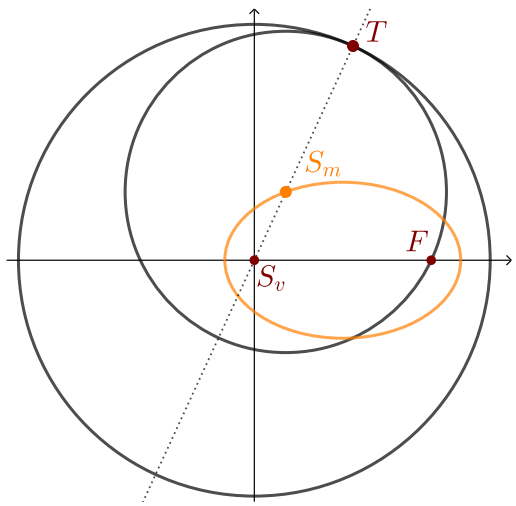
5.21 Konstrukce elipsy pomocí dotýkajících se kružnic

Uvažujme kružnici, v jejímž vnitřku (nikoli však v jejím středu S_v) se nachází bod F. Tímto bodem F nechť prochází další kružnice, která má s větší kružnicí vnitřní dotyk v bodě T. Pokud tímto bodem T pohybujeme po celé velké kružnici, tak střed menší kružnice S_m vykresluje postupně elipsu.

Názorně je to patrné na obrázku. Vidíme také, že bod F je jedním ohniskem elipsy, druhé ohnisko pak leží ve středu S_v velké kružnice.

Důkaz, že se tímto způsobem skutečně dostanou body uvedené elipsy (v obrázku naznačena oranžově), ihned plyne z planimetrické definice elipsy. V našem případě musí pro bod S_m elipsy s ohnisky F a S_v platit:

$$|S_mS_v| + |S_mF| = 2a\,.$$



Ověření platnosti této rovnosti je snadné. Poloměr vnitřní kružnice je roven $|S_mT| = |S_mF|$. Poloměr velké kružnice $|S_vT|$ lze rozložit na součet $|S_vS_m| + |S_mT|$. Dostáváme tak

$$|S_vT| = |S_vS_m| + |S_mT| = |S_vS_m| + |S_mF|\,,$$

což je přesně rovnost, kterou jsme chtěli dokázat. Navíc vidíme, že dvojnásobek délky hlavní poloosy elipsy je roven poloměru velké kružnice $|S_vT|$.

Kapitola 6

Parabola

6.1 Rovnice paraboly

Připomeňme, že parabolu lze snadno charakterizovat na základě jednotné rovnice kuželoseček

$$\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon\,, \quad \varepsilon = 1\,,$$

tj.

$$|XF| = |Xd|.$$

Z předchozího rozboru vyplynulo, kde se nachází řídicí přímka d: je průsečnicí roviny dotykové kružnice Dandelinovy koule a roviny ϱ řezu, v němž se nachází parabola. Ohnisko F paraboly je pak bodem dotyku Dandelinovy koule a roviny řezu ϱ.

Rovnici paraboly odvodíme snadno, zvolme pro jednoduchost kartézskou soustavu souřadnic tak, že řídicí přímka bude kolmá k ose x a bude procházet bodem $-e$, $e > 0$; její rovnice tak bude $d\colon x + e = 0$. Ohnisko F umístěme na osu x tak, aby byl počátek uprostřed mezi řídicí přímkou d a ohniskem F, tj. $F = [e, 0]$. Bod paraboly nechť má souřadnice $X = [x, y]$. Potom:

$$|XF| = |Xd| \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = x + e\,.$$

Umocněním na druhou dostaneme

$$\begin{aligned} (x-e)^2 + y^2 &= (x+e)^2 \\ x^2 - 2ex + e^2 + y^2 &= x^2 + 2ex + e^2 \\ y^2 &= 4ex\,. \end{aligned}$$

Označíme-li vzdálenost ohniska od řídicí přímky $p = 2e$ (tehdy bude označení odpovídat již zavedenému parametru kuželosečky), dostaneme rovnici paraboly ve tvaru

$$\boxed{y^2 = 2px\,.}$$

6.2 Rovnice tečny paraboly

Najděme nyní rovnici tečny paraboly. Předně si musíme uvědomit, že v euklidovské rovině $\mathbb{E}_2$ není parabola uzavřenou křivkou. Mohou tedy existovat i jiné přímky než tečny, které mají s parabolou jediný společný bod. Jsou to přímky rovnoběžné s osou paraboly.

Tečnu paraboly můžeme tedy definovat jako *přímku, která není rovnoběžná s osou paraboly a má přitom s parabolou jediný společný bod.*

Najděme nyní rovnici tečny t paraboly v jejím bodě $T = [x_0, y_0]$, pro jednoduchost uvažujme parabolu o rovnici $y^2 = 2px$. Pro souřadnice bodu T ležícím na této parabole tedy platí: $y_0^2 = 2px_0$.

Předně je tato tečna přímkou procházející bodem $T = [x_0, y_0]$, má tedy rovnici ve tvaru

$$t\colon y - y_0 = k\,(x - x_0)\,.$$

Jediným neznámým koeficientem je tu k, který určíme z podmínky existence jediného společného bodu přímky t a paraboly. Ukážeme, že z této podmínky plyne:

$$\boxed{k = \frac{p}{y_0}\,.}$$

Přímka t nesmí být rovnoběžná s osou paraboly, která splývá s osou x, tj. $k \neq 0$. Případ tečny ve vrcholu (tj. $y_0 = 0$, tečna je vertikální přímkou bez směrnice) ošetříme zvlášť.

Společné body paraboly a tečny najdeme řešením soustavy

$$y^2 = 2px, \qquad y - y_0 = k\,(x - x_0).$$

Zjistěme tedy nyní, kdy má tato soustava jediné řešení a najděme tak směrnici tečny k.

Hledání k – zdlouhavá verze:

Dosazením $y = y_0 + k\,(x - x_0)$ do rovnice paraboly dostaneme

$$(y_0 + k\,(x - x_0))^2 = 2px\,,$$

$$(y_0^2 + 2ky_0(x - x_0) + k^2\,(x^2 - 2x_0x + x_0^2) = 2px\,,$$

$$k^2x^2 + x \cdot (2ky_0 - 2k^2x_0 - 2p) + (y_0^2 - 2kx_0y_0 + k^2x_0^2) = 0\,,$$

$$k^2x^2 + x \cdot 2(ky_0 - k^2x_0 - p) + (y_0 - kx_0)^2 = 0\,.$$

Parabola a přímka t budou mít jediný společný bod, bude-li mít tato kvadratická rovnice jediné řešení, tj. bude-li diskriminant této kvadratické rovnice nulový:

$$4(ky_0 - k^2x_0 - p)^2 - 4k^2(y_0 - kx_0)^2 = 0.$$

Jednoduchými úpravami dostaneme

$$\big((ky_0 - k^2x_0 - p) + k(y_0 - kx_0)\big) \cdot \big((ky_0 - k^2x_0 - p) - k(y_0 - kx_0)\big) = 0$$

$$\big(-2k^2x_0 + 2ky_0 - p\big) \cdot (-p) = 0$$

$$2k^2x_0 - 2ky_0 + p = 0$$

Odtud

$$k = \frac{2y_0 \pm \sqrt{4y_0^2 - 8px_0}}{4x_0} = \frac{2y_0 \pm 2\sqrt{y_0^2 - 2px_0}}{4x_0} = \frac{2y_0 \pm 0}{4x_0} = \frac{y_0}{2x_0} = \frac{py_0}{2px_0} = \frac{py_0}{y_0^2} = \frac{p}{y_0}\,.$$

Hledání k – kratší verze:

Soustavu

$$y^2 = 2px, \qquad y - y_0 = k\,(x - x_0)$$

budeme řešit tak, že z rovnice paraboly vyjádříme $x = \frac{y^2}{2p}$ a dosadíme jej do rovnice přímky; navíc víme, že bod $T = [x_0, y_0]$ je bodem paraboly, proto také $x_0 = \frac{y_0^2}{2p}$. Vznikne tak rovnice

$$y - y_0 = k \cdot \left(\frac{y^2}{2p} - \frac{y_0^2}{2p}\right)\,,$$

neboli

$$y - y_0 = \frac{k}{2p} \cdot \left(y^2 - y_0^2\right)$$

Vytknutím $y - y_0$ dostaneme rovnici

$$(y - y_0) \cdot \left(1 - \frac{k}{2p}\,(y + y_0)\right) = 0,$$

která má jedno řešení $y = y_0$; toto řešení očekáváme, neboť bod dotyku $T = [x_0, y_0]$ je jediným společným bodem tečny a paraboly. Aby to bylo řešení jediné, musí být i členy v druhé závorce rovny nule právě tehdy, když $y = y_0$, tj.

$$1 - \frac{k}{2p}\,(y + y_0) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = y_0\,.$$

Pišme tedy v první rovnici y_0 místo y:

$$1 - \frac{k}{2p} \cdot 2y_0 = 0\,, \qquad \text{neboli} \qquad \frac{k}{p} \cdot y_0 = 1\,.$$

Odtud již máme

$$k = \frac{p}{y_0}\,.$$

Rovnice tečny:

Můžeme tedy psát rovnici tečny:

$$t\colon y - y_0 = k\,(x - x_0)\,, \quad \text{kde} \quad k = \frac{p}{y_0}\,,$$

celkem tedy

$$t\colon y - y_0 = \frac{p}{y_0}\,(x - x_0)\,.$$

Tuto rovnici ještě trochu upravíme:

$$yy_0 - y_0^2 = p\,(x - x_0),$$

$$yy_0 - 2px_0 = p\,(x - x_0),$$

$$yy_0 = px - px_0 + 2px_0,$$

a dostaneme rovnici tečny paraboly $y^2 = 2px$ v jejím bodě $T = [x_0, y_0]$:

$$\boxed{yy_0 = p\,(x + x_0)\,.}$$

Tato rovnice zahrnuje i vertikální tečnu $t_V\colon x = 0$ ve vrcholu $V = [0, 0]$ paraboly $y^2 = 2px$, neboť pro $T = V = [0, 0]$ skutečně dostáváme (připomeňme, že parametr $p \neq 0$):

$$y \cdot 0 = p\,(x + 0)\,,$$

což je rovnice přímky $x = 0$.

6.3 Tečna paraboly jako osa souměrnosti

Na obrázku níže pozorujme souřadnice vrcholů trojúhelníku $\triangle T'FT$: jsou $T' = \left[\frac{p}{2}, y_0\right]$, $F = \left[\frac{p}{2}, 0\right]$ a $T = [x_0, y_0]$. Z planimetrické definice paraboly plyne, že $|TF| = |TT'|$, trojúhelník $\triangle T'FT$ je tedy rovnoramenný (ramena jsou vyznačena modře).

Ukážeme, že tečna paraboly v bodě T je osou úsečky FT'.

Tečna paraboly je tedy osou úsečky $T'F$ a můžeme ihned psát její rovnici. Normálový vektor tečny je totiž

$$T' - F = \left(-\frac{p}{2} - \frac{p}{2}, y_0 - 0\right) = (-p, y_0)\ ,$$

takže tečna t má rovnici

$$-px + yy_0 + c = 0\,.$$

Tato tečna prochází bodem $T = [x_0, y_0]$, odkud najdeme konstantu c:

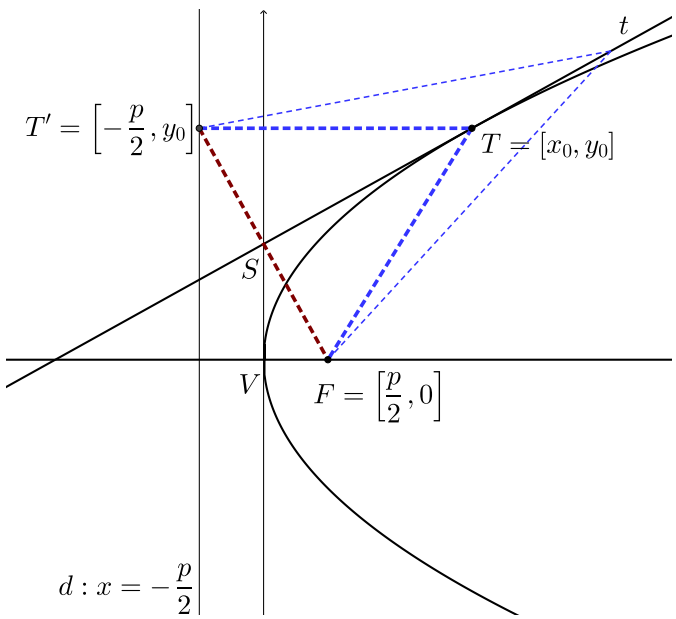
$$-px_0 + y_0^2 + c = 0 \qquad \text{tj.} \qquad c = px_0 - y_0^2\,.$$

Rovnice tečny t paraboly je tedy $-px + yy_0 + px_0 - y_0^2 = 0$. Využijeme ještě faktu, že bod $T = [x_0, y_0]$ je bodem paraboly, proto $y_0^2 = 2px_0$, takže rovnice tečny přejde na tvar

$$-px + yy_0 + px_0 - 2px_0 = 0\,,$$

neboli

$$t\colon\ \ yy_0 = p\,(x + x_0)\,.$$



Jiné odvození rovnice osy souměrnosti

Rovnici osy souměrnosti jsme mohli získat i jinak: je to přímka ST, přičemž $S = [0, \frac{y_0}{2}]$ a $T = [x_0, y_0]$. Parametrické vyjádření této přímky tedy je:

$$X = S + t(T - S)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

neboli vyjádřeno v souřadnicích:

$$x = t\,x_0\,, \qquad y = \frac{y_0}{2} + t\left(y_0 - \frac{y_0}{2}\right)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Vyjádříme-li t z první rovnice ($t = \frac{x}{x_0}$) a dosadíme-li jej do druhé, dostaneme

$$y = \frac{y_0}{2} + \frac{x}{x_0} \cdot \frac{y_0}{2}\,,$$

neboli po úpravě:

$$2yx_0 = x_0y_0 + xy_0\,, \quad \text{neboli} \quad 2yx_0 = y_0\,(x + x_0)\,.$$

Vynásobením y_0 dostaneme $2yx_0y_0 = y_0^2\,(x + x_0)$, dosazením $y_0^2 = 2px_0$ pak $2yx_0y_0 = 2px_0\,(x + x_0)$, což po vydělení $2x_0$ dává

$$yy_0 = p\,(x + x_0)\,.$$

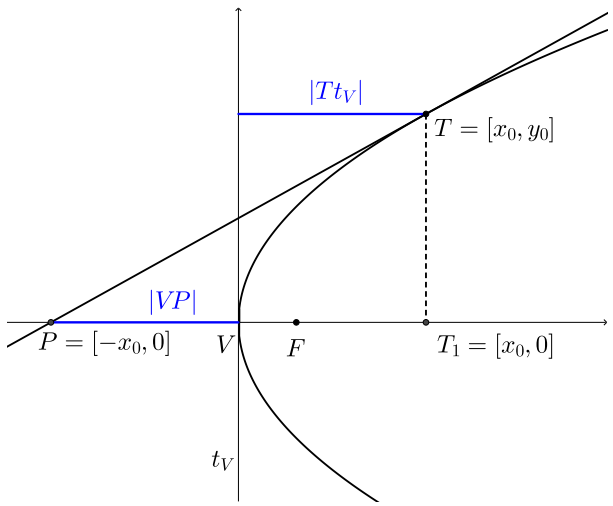
6.4 Konstrukce tečny paraboly

Položme si nyní otázku, jak by bylo možno tečnu paraboly $y^2 = 2px$ v daném jejím bodě $T = [x_0, y_0]$ zkonstruovat.

Rovnice této tečny je $t : y\,y_0 = p\,(x + x_0)$. Pokusme se nyní najít její průsečík P s osou x, tj. $P = [?, 0]$. Do rovnice tečny tedy dosadíme $y = 0$:

$$y \cdot 0 = p\,(x + x_0)\,,$$

takže $0 = p\,(x + x_0)$ a dostáváme $x = -x_0$. Průsečík tečny s osou x je tedy $P = [-x_0, 0]$.



Odvodili jsme tak zajímavou vlastnost tečny paraboly, kterou lze pohodlně použít pro její konstrukci: *vzdálenost bodu dotyku T od vrcholové tečny a vzdálenost průsečíku P s osou od vrcholové tečny je stejná:*

$$\boxed{|Tt_V\,| = |VP\,|\,.}$$

Tento výsledek dokázal již Apollónios z Pergé ve svých *Kónikách* (propozice I,35).

6.4.1 Subtangenta

Úsečka PT_1 na předchozím obrázku se nazývá subtangenta. Subtangentu zpravidla definujeme pro tečnu, která není vrcholová.

Právě odvozený výsledek tedy můžeme zformulovat takto:

$$\boxed{\textit{vrchol paraboly půlí subtangentu.}}$$

6.5 Rovnice tečny paraboly – geometrická interpretace

Rovnici tečny paraboly $y^2 = 2px$

$$yy_0 = p\,(x + x_0)\,.$$

můžeme přepsat ve tvaru

$$\boxed{\frac{y_0}{p} = \frac{x + x_0}{y}\,.}$$

Podle věty *uu* jsou podobné pravoúhlé trojúhelníky (každý z nich má vnitřní úhel velikosti φ):

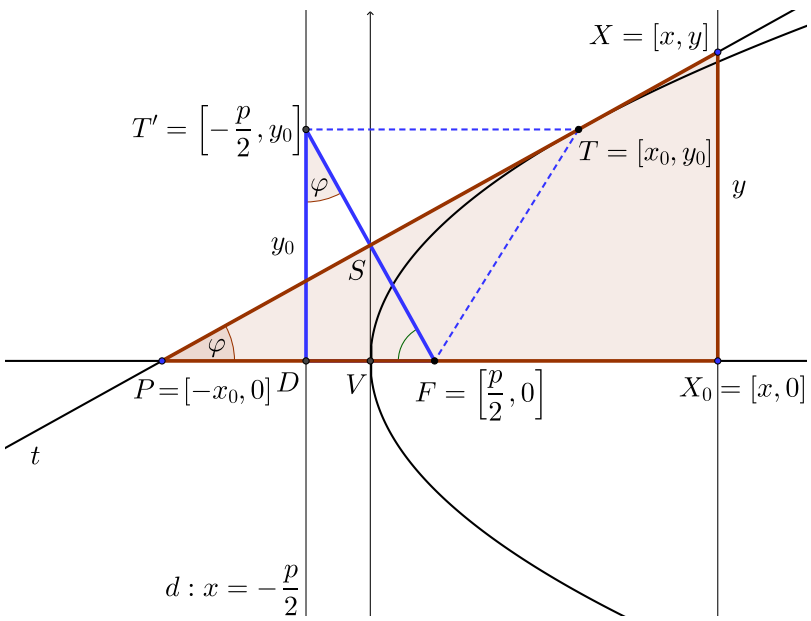
$$\triangle T'DF \sim \triangle PSF \sim \triangle PX_0X\,.$$

Proto

$$\frac{|T'D|}{|FD|} = \frac{|PX_0|}{|XX_0|}\,,$$

což můžeme ihned přepsat do tvaru

$$\frac{y_0}{p} = \frac{x + x_0}{y}\,,$$



neboť je:

- $|T'D| = y_0$,
- $|FD| = p$ (parametr paraboly je definován jako vzdálenost ohniska od řídicí přímky),
- $|PX_0| = |PV| + |VX_0| = x_0 + x$,
- $|XX_0| = y$.

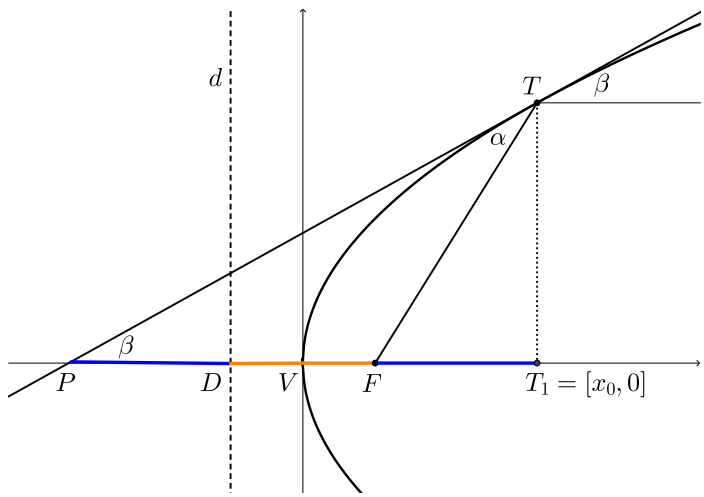
Pokud bychom naopak vyšli z vlastností tečny a z nich odvodili podobnost výše uvedených trojúhelníků, mohli bychom tak ihned psát rovnici tečny paraboly v jejím bodě $T = [x_0, y_0]$.

6.6 Ohnisková vlastnost paraboly

Paprsek vycházející z ohniska se od paraboly odrazí tak, že bude pokračovat rovnoběžně s její osou. A naopak, paprsek rovnoběžný s osou paraboly se od paraboly odrazí do jejího ohniska.

Uvažujme tedy parabolu $y^2 = 2px$ a ukažme, že se úhel dopadu rovná úhlu odrazu:

$$\boxed{\alpha = \beta.}$$



Stačí ukázat, že $\triangle TPF$ je rovnoramenný, tj. dokažme, že $|FT| = |PF|$. Z planimetrické definice paraboly máme $|FT| = |DT_1|$. Zbývá ověřit, že $|DT_1| = |PF|$:

- Z výše odvozené vlastnosti tečny paraboly (vrchol půlí subtangentu) plyne, že $|PV| = |VT_1|$.
- Z planimetrické definice paraboly aplikované na vrchol V máme $|VF| = |DV|$.
- Sečtením obou rovností dostáváme:

$$|PV| + |VF| = |DV| + |VT_1| \quad \text{neboli} \quad |PF| = |DT_1|.$$

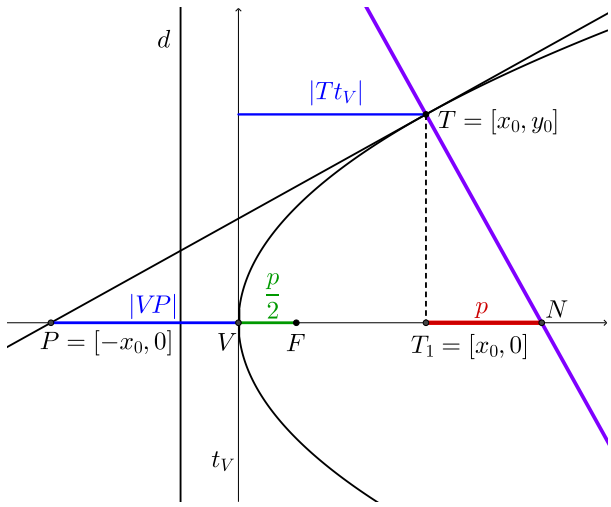
Celkově tak dostáváme: $|FT| = |DT_1| = |PF|$, neboli $|FT| = |PF|$. Trojúhelník $\triangle TPF$ je tedy rovnoramenný, úhly při základně jsou tedy shodné:

$$\boxed{\alpha = \beta.}$$

Poznamenejme ještě, že velikost úhlů při vrcholu P i T značíme β, neboť jsou shodné (souhlasné úhly).

6.7 Subnormála a parametr paraboly

Normálou paraboly v jejím bodě T rozumíme kolmici k tečně paraboly v bodě T procházející bodem T (vyznačena fialově). Pro $T \neq V$ se úsečka T_1N nazývá *subnormálou* paraboly (vyznačena červeně). Podobně jako v případě subtangenty definujeme subnormálu pouze v případě, že normála není vrcholová (tj. pro $T \neq V$). V tomto případě totiž nemá normála s osou paraboly jediný průsečík, neboť osa paraboly s vrcholovou normálou splývá.



Pozorování: Pokud bychom pohybovali bodem paraboly T, tak bychom mohli pozorovat, že *délka subnormály se nemění.* Subnormála má tedy stejnou délku pro každý bod dané paraboly T, její délka je konstantní. Vzniká tak otázka, jaká je hodnota této pro danou parabolu generální konstanty.

Uvažujme tedy parabolu s parametrem p. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, že její vrchol V bude ležet v počátku, její ohnisko na kladné poloose x. Rovnice uvažované paraboly ve zvolené KSS tedy bude $y^2 = 2px$. Zvolme na této parabole libovolně bod $T = [x_0, y_0]$, $T \neq V$. Rovnice tečny t_T sestrojené v bodě T paraboly tedy bude

$$t_T \colon yy_0 = p(x + x_0).$$

Upravme tuto rovnici do standardního tvaru obecné rovnice přímky:

$$t_T \colon px - yy_0 + px_0 = 0.$$

Najděme nyní rovnici normály n_T paraboly v bodě T. Ta je kolmá k tečně t_T, její rovnice bude proto ve tvaru

$$n_T \colon y_0x + py + c = 0.$$

Hodnotu koeficientu c dopočteme tak, aby přímka n_T procházela bodem $T = [x_0, y_0]$: $y_0x_0 + py_0 + c = 0$, tj. $c = -(y_0x_0 + py_0) = -y_0(x_0 + p)$. Dostáváme tak rovnici normály

$$n_T \colon y_0x + py - y_0(x_0 + p) = 0.$$

Najděme nyní souřadnice průsečíku $N = [n_x, 0]$ normály n_T s osou x: $y_0n_x + p \cdot 0 - y_0(x_0 + p) = 0$. Odtud dostáváme (po vydělení y_0):

$$n_x = x_0 + p.$$

Délku subnormály T_1N nyní určíme snadno:

$$|T_1N| = n_x - x_0 = p.$$

Dostáváme tak odpověď na naši otázku:

$$\boxed{\textit{Délka subnormály je rovna parametru paraboly.}}$$

Jednodušší odvození: Tuto odpověď bychom mohli získat i mnohem snáze, a to pomocí geometrické interpretace rovnice tečny t_T sestrojené v bodě $T = [x_0, y_0]$ paraboly $y^2 = 2px$:

$$t_T \colon yy_0 = p\,(x + x_0)\,,$$

neboli (po vydělení):

$$\frac{y_0}{p} = \frac{(x + x_0)}{y}\,.$$

Z tohoto vztahu totiž plyne, že dva pravoúhlé trojúhelníky:

- $\triangle NT_1T$, jehož jednou odvěsnou je subnormála,
- a trojúhelník, jehož jeden vrchol je bod P, přepona leží na tečně paraboly (jedním koncovým bodem přepony je bod P, druhým je libovolný bod tečny o souřadnicích $[x, y]$ takový, že pro dané $x_0 > 0$ je $x > -x_0$) a jedna odvěsna leží na ose x (krajní body této odvěsny jsou P a $[x_0, y_0]$, má tedy délku $x + x_0$) a druhá je kolmá na osu x (patou kolmice je bod o souřadnicích $[x, 0]$, její délka je tedy y),

jsou podobné pro každé $x > -x_0$ při daném $x_0 > 0$. A jelikož jsou tyto dva trojúhelníky podobné pro každé $x_0 > 0$ (a pro každé $x > -x_0$), má subnormála pro každé $x_0 > 0$ stále tutéž délku rovnou parametru paraboly p.

Pozorování: Úsečka PN je součtem dvou úseček: subtangenty a subnormály. Všimněme si, že PN je půlena ohniskem paraboly F. Stačí si uvědomit, že $|VP| = |VT_1| = x_0$, $|VF| = \frac{p}{2}$, $|T_1N| = p$, takže $|PF| = |VP| + |VF| = x_0 + \frac{p}{2}$ a $|FN| = |FT_1| + |T_1N| = \left(x_0 - \frac{p}{2}\right) + p = x_0 + \frac{p}{2}$.

Dokázali jsme tedy následující tvrzení.

Součet subtangenty a subnormály je půlen ohniskem paraboly.

6.8 Hyperoskulační kružnice paraboly

Oskulační kružnice paraboly má v jejím vrcholu s parabolou styk vyššího řádu než druhého, proto ji nazýváme hyperoskulační. Její poloměr r_o se můžeme pokusit odhadnout na základě znalosti poloměru hyperoskulační kružnice elipsy.

Poloměr hyperoskulační kružnice paraboly je roven parametru p paraboly.

$$\boxed{r_o = p}$$

Odvození: Kružnice se středem $S = [r_o, 0]$, $r_o > 0$, procházející vrcholem $V = [0, 0]$ paraboly $y^2 = 2px$ bude její oskulační kružnicí ve V právě tehdy, když bude mít s parabolou jediný společný bod (tím bude bod V).

Parabola a kružnice ($r_o > 0$)

$$y^2 = 2px, \qquad (x - r_o)^2 + y^2 = r_o^2\,,$$

tedy budou mít jediný společný bod $V = [0, 0]$ právě tehdy, když bude mít rovnice (za y^2 z rovnice paraboly jsme dosadili do rovnice kružnice):

$$(x - r_o)^2 + 2px = r_o^2\,,$$

neboli

$$x^2 - 2r_ox + 2px = 0\,, \qquad \text{neboli} \qquad x \cdot (x - 2r_o + 2p) = 0\,,$$

jediné řešení $x = 0$. To nastane právě tehdy, když $-2r_o + 2p = 0$, neboli právě pro

$$\boxed{r_o = p\,.}$$

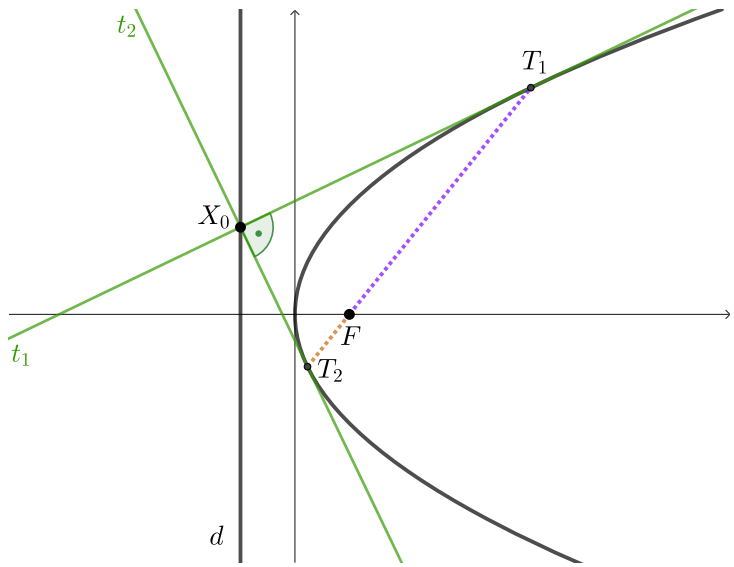
6.9 Tečna paraboly a souměrnost

Bod F' osově souměrný s ohniskem F podle tečny paraboly leží na řídicí přímce. Jinak řečeno: *množina všech bodů osově souměrných s ohniskem F podle všech tečen paraboly je řídicí přímkou paraboly.*

A spojnice FF' je půlena vrcholovou tečnou paraboly. Jinak řečeno: *množina všech pat kolmic spuštěných z ohniska F na tečny paraboly je vrcholovou tečnou paraboly.*

6.10 Kolmost tečen paraboly

Pozorování: Tečny paraboly vedené z libovolného bodu její řídicí přímky jsou na sebe kolmé.



Odvození: Uvažujme parabolu

$$y^2 = 2px\,.$$

Její ohnisko F má souřadnice $F = [0, \frac{p}{2}]$, rovnice její řídicí přímky je $x = -\frac{p}{2}$. Zvolme na řídicí přímce libovolně bod X_0, jeho souřadnice tedy budou $X_0 = [-\frac{p}{2}, y_0]$.

Body dotyku $T_1 = [x_1, y_1]$ a $T_2 = [x_2, y_2]$ tečen t_1 a t_2 vedených z bodu $X_0 \in d$ k parabole jsou

$$\text{průsečíky paraboly } y^2 = 2px \text{ s polárou } yy_0 = p\left(x - \tfrac{p}{2}\right).$$

Řešme tedy tuto soustavu. Vynásobením rovnice poláry dvěma dostaneme $2yy_0 = 2px - p^2$, takže můžeme z rovnice paraboly snadno dosadit y^2 za $2px$; dostaneme tak:

$$2yy_0 = y^2 - p^2\,.$$

Kořeny této kvadratické rovnice

$$y^2 - 2yy_0 - p^2 = 0$$

jsou

$$y_{1,2} = \frac{2y_0 \pm \sqrt{4y_0^2 + 4p^2}}{2} = y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + p^2}\,.$$

Z rovnice poláry $yy_0 = p\left(x - \frac{p}{2}\right)$ dopočteme $x_{1,2}$:

$$x_{1,2} = \frac{y_{1,2}y_0}{p} + \frac{p}{2} = \frac{y_0}{p}\left(y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + p^2}\right) + \frac{p}{2}\,.$$

Souřadnice bodů dotyku T_1 a T_2 tečen t_1 a t_2 tedy jsou:

$$T_1 = \left[\frac{y_0}{p}\left(y_0 + \sqrt{y_0^2 + p^2}\right) + \frac{p}{2}, \quad y_0 + \sqrt{y_0^2 + p^2}\right],$$

$$T_2 = \left[\frac{y_0}{p}\left(y_0 - \sqrt{y_0^2 + p^2}\right) + \frac{p}{2}, \quad y_0 - \sqrt{y_0^2 + p^2}\right].$$

Ověřme nyní, že jsou směrové vektory obou tečen na sebe kolmé, tj. že $(T_1 - X_0) \perp (T_1 - X_0)$, neboli $(T_1 - X_0) \cdot (T_1 - X_0) = 0$. Jelikož jsou souřadnice bodu $X_0 = [-\frac{p}{2}, y_0]$, je směrový vektor tečny t_1, resp. t_2:

$$T_1 - X_0 = \left(\frac{y_0}{p}\left(y_0 + \sqrt{y_0^2 + p^2}\right) + p, \quad \sqrt{y_0^2 + p^2}\right),$$

$$T_2 - X_0 = \left(\frac{y_0}{p}\left(y_0 - \sqrt{y_0^2 + p^2}\right) + p, \quad -\sqrt{y_0^2 + p^2}\right).$$

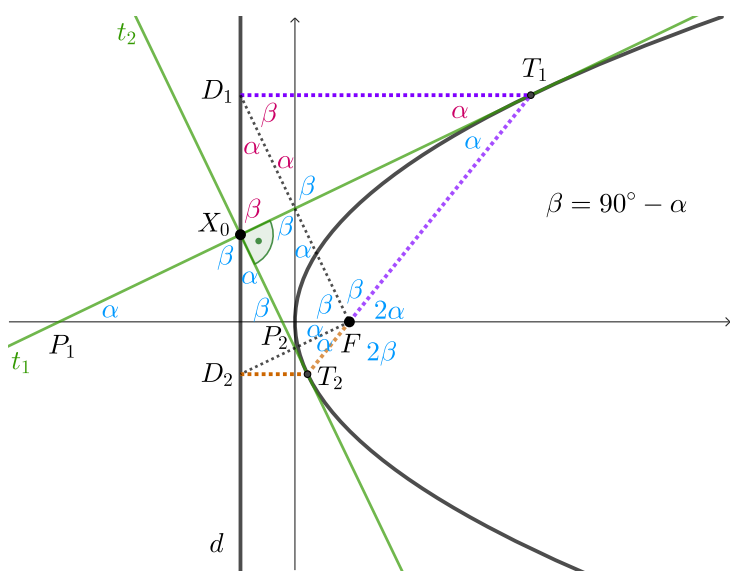
Pro jejich skalární součin skutečně platí

$$(T_1 - X_0) \cdot (T_1 - X_0) = -y_0^2 + 2y_0^2 + p^2 \quad - y_0^2 - p^2 = 0\,,$$

takže tečny paraboly t_1 a t_2 jsou na sebe kolmé.

Syntetický důkaz

Pokud bychom se chtěli vyhnout zdlouhavým analytickým výpočtům, můžeme k problému přistoupit synteticky. Stačí si uvědomit, že trojúhelníky $\triangle F D_1 T_1$ a $\triangle F D_2 T_2$ jsou rovnoramenné (důsledek planimetrické definice paraboly) a tečny t_1, resp. t_2 jsou osami úseček D_1F, resp. D_2F (dokazovali jsme výše), takže $D_1F \perp t_1$ a $D_2F \perp t_2$.



Také využijeme toho, že trojúhelník $\triangle P_2 T_2 F$ je rovnoramenný (podobně jako $\triangle P_1 T_1 F$ je rovnoramenný), což jsme pozorovali při důkazu ohniskové vlastnosti paraboly.

6.11 Avicennova konstrukce paraboly

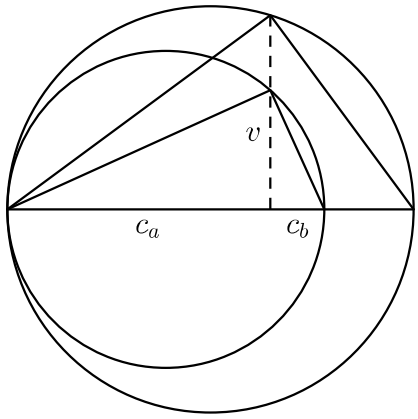
Pozorujme rovnici paraboly:

$$y^2 = 2p \cdot x.$$

Nápadně připomíná Eukleidovu větu o výšce:

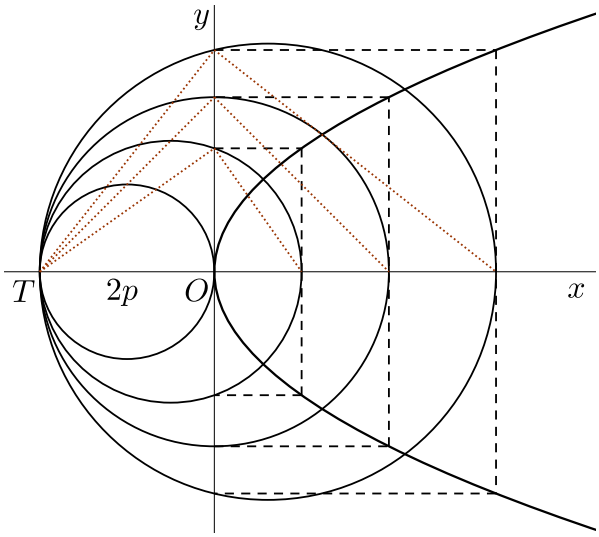
$$v^2 = c_a \cdot c_b,$$

pokud by $c_a = 2p$ byla konstanta a $c_b = x$ by probíhalo svými hodnotami $\mathbb{R}_0^+$. Pokusme se tuto situaci znázornit geometricky.



Tuto souvislost bylo možno využít pro konstrukci jednotlivých bodů paraboly. Na záporné poloose x zvolme pevně bod T a narýsujme kružnici o průměru $|TO| = 2p$ dotýkající se osy y. Samotná konstrukce je dobře patrná z následujícího obrázku. Trojúhelníky, jejichž odvěsny jsou naznačeny tečkovaně, jsou pravoúhlé (Thalétova věta), lze tedy na ně aplikovat Eukleidovu větu o výšce. Trojúhelníky volíme vždy tak, aby byla jejich výška částí osy y. Pak skutečně

$$y^2 = |TO| \cdot x = 2p \cdot x.$$



Tato konstrukce se poprvé objevila v komentáři k Apollóniovým *Kónikám*, který sepsal perský lékař, astronom a matematik ibn Síná (asi 980–1037), známý též jako Avicenna.

6.12 Parabola a vrh šikmý

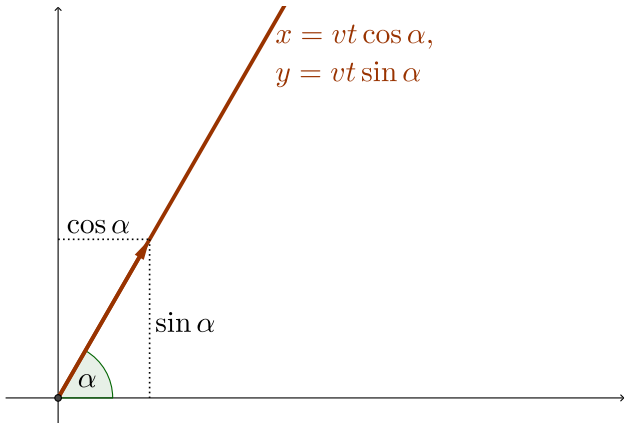
Hodíme-li kamenem pod úhlem $\alpha > 0$, poletí kámen zpočátku zdánlivě po přímce svírající se zemí úhel α; brzy si však všimneme, že kámen přestává stoupat, začne klesat a nakonec dopadne na zem. Po jaké křivce se pohyboval? Pro jednoduchost zanedbáme odpor vzduchu a další drobné faktory, které trajektorii kamene ovlivňují.

Kdyby nebylo gravitačního pole Země, tak by se kámen skutečně pohyboval rovnoměrně přímočaře, tj. po přímce. Označme jeho počáteční rychlost v a zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, že počáteční bod jeho trajektorie bude ležet v počátku, osa y bude na zemi kolmá, osa x bude vodorovná, tj. rovnoběžná se zemí, navíc zvolená tak, že rovina xy bude obsahovat celou trajektorii (osu z tedy nebudeme potřebovat, hledáme trajektorii, která je rovinnou křivkou). Kámen by se pak pohyboval po přímce, která by:

- procházela počátkem,
- s osou x svírala úhel α, tj. směrovým vektorem by byl $(\cos\alpha, \sin\alpha)$,
- poloha kamene na této přímce by byla přímo úměrná rychlosti kamene a času, po který by se kámen pohyboval.

Parametrické vyjádření této přímky by tedy bylo

$$x = vt\cos\alpha, \quad y = vt\sin\alpha.$$



Působení gravitační síly na kámen je však podstatné. Tento vliv si můžeme snadno představit tak, že na kámen při pohybu neustále působí směrem dolů (kolmo k zemi) gravitační síla, jedná se tedy o volný pád. Jelikož tato síla působí neustále, dodává kameni konstantní zrychlení (gravitační zrychlení g). Dráha, kterou při tomto volném pádu urazí, je $s = \frac{1}{2}gt^2$.[1] Jelikož gravitační síla působí ve směru osy y, navíc (na rozdíl od stoupání kamene) směrem dolů, odečteme dráhu uraženou při volném pádu od y-ové souřadnice. Dostaneme tak parametrické vyjádření trajektorie, po níž se při šikmém vrhu v gravitačním poli Země pohybuje vržený kámen, zanedbáme-li ostatní vlivy (zejména odpor vzduchu):

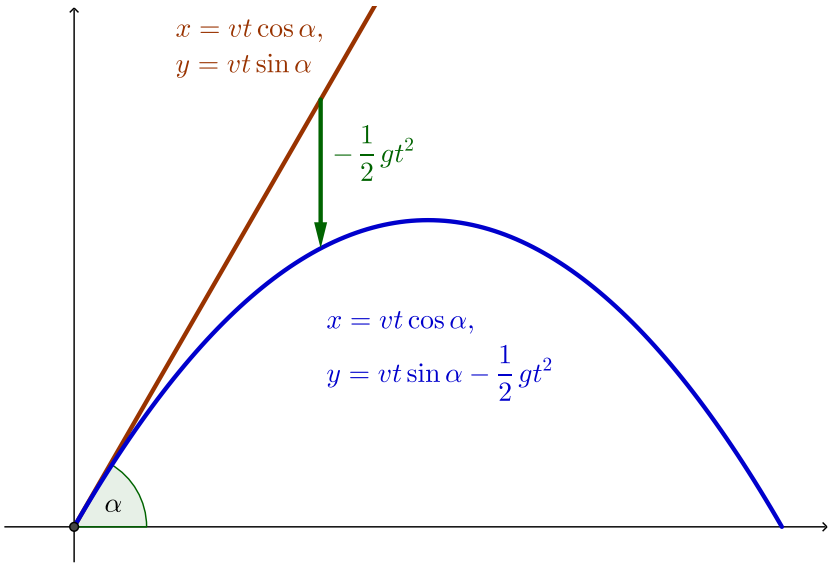
$$x = vt\cos\alpha, \quad y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

Ihned vidíme, že hledanou trajektorií je parabola.[2]

[1] Tento vztah pro dráhu uraženou při volném pádu lze snadno odvodit pomocí diferenciálního počtu: zrychlení g je derivací rychlosti podle času, okamžitá rychlost $v(t)$ je derivací dráhy $s(t)$ podle času, tj. $g = v'(t)$, $v = s'(t)$, takže $g = s''(t)$. Předpokládáme-li nulovou počáteční dráhu i rychlost, tj. $s(0) = 0$ a $v(0) = s'(0) = 0$, dostaneme při postupné integraci:

$$s''(t) = g, \qquad s'(t) = gt, \qquad s(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

[2] K tomu se váže „vtipná“ historka: *Na základě čeho byla parabola pojmenována? V dobách, kdy jezdily parní lokomotivy,*



došlo při jedné jízdě v Tatrách slovenskému strojvedoucímu a topiči uhlí. V této nezáviděníhodné situaci si strojvedoucí sedl na schůdky své lokomotivy, vzal si několik kamínků z náspu do dlaně a krátil si čas tím, že je házel zpět na násep. Při tom si nešťastně opakoval, že mu došla pára: „Para bola, para bola, …“ Když šel kolem matematik, ihned si všiml, že se každý hozený kamínek pohybuje po jemu dobře známé kvadratické křivce, kterou tedy nazval dle slov slovenského strojvedoucího parabolou.

Z historického hlediska však dal parabole jméno už Apollónios z Pergé ve svém spisu *Kóniky* kolem roku 200 př. Kr. podle Eukleidem zformulované úlohy o přikládání ploch, kterou nazýval parabolé (παραβολή).

Kde se však inspiroval Eukleidés? Někteří usuzují, že právě u onoho slovenského strojvedoucího…

Kapitola 7

Hyperbola

7.1 Parametrické vyjádření jedné větve hyperboly

Jednu větev hyperboly lze snadno parametrizovat pomocí hyperbolických funkcí. Porovnejme parametrizace kružnice, elipsy a jedné větve hyperboly:

$$\begin{array}{rlll} \text{kružnice:} & x = r \cdot \cos\varphi, & y = r \cdot \sin\varphi, & \varphi \in \langle 0, 2\pi), \\ \text{elipsa:} & x = a \cdot \cos\varphi, & y = b \cdot \sin\varphi, & \varphi \in \langle 0, 2\pi), \\ \text{jedna větev hyperboly:} & x = a \cdot \cosh\varphi, & y = b \cdot \sinh\varphi, & \varphi \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Připomeňme definice hyperbolického sinu a kosinu (obě funkce jsou definované na celém $\mathbb{R}$):

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

a základní vztah mezi těmito funkcemi platný pro všechna reálná x (analogie tzv. „goniometrické jedničky“):

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.$$

Tento vztah (připomíná rovnici rovnoosé hyperboly $x^2 - y^2 = 1$) společně s využitelností hyperbolických funkcí pro parametrizaci jedné větve hyperboly dal hyperbolickým funkcím jméno.

Důkaz této rovnosti je možno provést přímo na základě definice (využijeme $e^x e^{-x} = 1$):

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = \frac{2+2}{4} = 1\,.$$

Ověření, že rovnice $x = a \cdot \cosh\varphi,\ y = b \cdot \sinh\varphi$ jsou skutečně parametrizací jedné větve hyperboly, je založeno na přímočarém výpočtu. Zkrátka ověříme, že takováto x a y vyhovují rovnici hyperboly:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a \cdot \cosh\varphi)^2}{a^2} - \frac{(b \cdot \sinh\varphi)^2}{b^2} = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Omezení na jednu větev hyperboly plyne z toho, že hyperbolický kosinus nabývá hodnot z intervalu $\langle 1; +\infty)$, neboli

$$\cosh x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pokud bychom při parametrizaci hyperboly nechtěli použít hyperbolických funkcí, tak bychom mohli využít vztahu mezi druhými mocninami funkcí kosinus a tangens, který se využívá např. při integrování:

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi\,.$$

Z něho plyne

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi = 1\,.$$

Dostáváme tak další parametrizaci hyperboly (jednotlivé intervaly odpovídají větvím hyperboly):

$$\boxed{x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y = b\,\mathrm{tg}\,\varphi, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\,.}$$

Již z předchozích úvah je zřejmé, že taková x a y vyhovují rovnici hyperboly, ověřit to však můžeme i přímo:

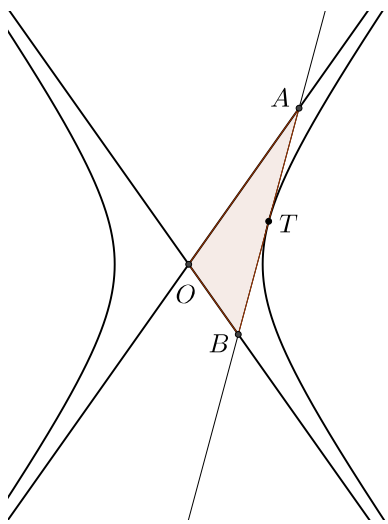
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{\frac{a^2}{\cos^2\varphi}}{a^2} - \frac{b^2\,\mathrm{tg}^2\varphi}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi} - \mathrm{tg}^2\varphi = 1\,.$$

7.2 Obsah trojúhelníku ohraničeného asymptotami a tečnou

Pozorujme následující obrázek: je na něm narýsována hyperbola, zvolen nějaký její bod $T = [x_0, y_0]$ a v něm je zkonstruována tečna hyperboly. Tato tečna vymezuje společně s oběma asymptotami trojúhelník $\triangle AOB$.

A nyní překvapivá zajímavost: tento trojúhelník $\triangle AOB$ má stále stejný obsah, ať je tečna vedena v kterémkoli bodě T dané hyperboly. Tento obsah je roven

$$\boxed{S_{\triangle AOB} = ab.}$$



Odvození tohoto výsledku není nijak těžké. Stačí najít souřadnice průsečíků A, B tečny s asymptotami, a pak vypočítat obsah trojúhelníku $\triangle AOB$ např. pomocí determinantu (jako polovina obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\overrightarrow{OA}$ a $\overrightarrow{OB}$).

Budeme tedy potřebovat rovnici tečny t v bodě $T = [x_0, y_0]$ i rovnice obou asymptot a_1 a a_2:

$$t : \frac{x\,x_0}{a^2} - \frac{y\,y_0}{b^2} = 1\,,$$

$$a_1 : y = \frac{b}{a}x, \qquad a_2 : y = -\frac{b}{a}x\,.$$

K nalezení souřadnic průsečíků asymptot a tečny stačí vyřešit soustavy rovnic tečny a příslušné asymptoty, což snadno provedeme dosazením y z rovnice asymptoty do rovnice tečny:

$$\frac{x\,x_0}{a^2} - \frac{\frac{b}{a}x\,y_0}{b^2} = 1, \qquad \frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{\frac{b}{a}x\,y_0}{b^2} = 1\,.$$

Vytknutím $\frac{x}{a}$ přejdou obě rovnice na tvar

$$\frac{x}{a}\cdot\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) = 1, \qquad \frac{x}{a}\cdot\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) = 1\,,$$

x-ové souřadnice průsečíků A, B tedy jsou

$$x_A = \frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}\,, \qquad x_B = \frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}\,.$$

Z rovnic asymptot $y_{1,2} = \pm\frac{b}{a}x$ dopočítáme i příslušné y-ové souřadnice:

$$y_A = \frac{b}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}\,, \qquad y_B = \frac{-b}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}\,.$$

Získali jsme tak souřadnice obou průsečíků asymptot s tečnou:

$$A = \left[\frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}, \frac{b}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}\right], \qquad B = \left[\frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}, \frac{-b}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}\right].$$

Vypočtěme nyní obsah trojúhelníku vymezeného tečnou a asymptotami:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} & \frac{-b}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \\ \frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} & \frac{b}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{\text{jmenovatel}} - \frac{-ab}{\text{jmenovatel}}\right),$$

kde

$$\text{jmenovatel} = \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\cdot\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1\,,$$

neboť bod dotyku $T = [x_0, y_0]$ je bodem hyperboly, vyhovuje tedy její rovnici.

Dostáváme tak hledaný obsah trojúhelníku

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}(ab + ab) = ab\,.$$

Bod T jako střed úsečky AB

Pozorujme ještě obrázek; zdá se, že bod hyperboly $T = [x_0, y_0]$ je středem úsečky AB. Prozkoumejme tuto hypotézu. Střed S_{AB} úsečky AB je lineární kombinací bodů A, B s koeficienty $\frac{1}{2}$:

$$S_{AB} = A + \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\,.$$

Souřadnice bodů A, B jsme již vypočítali, můžeme tedy vypočítat i souřadnice středu:

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}, \frac{b}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}, \frac{-b}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} + \frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}, \frac{b}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} + \frac{-b}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}\right] \\ &= \left[\frac{1}{2}a\cdot\frac{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}},\ \frac{1}{2}b\cdot\frac{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} - \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}\right] \\ &= \left[\frac{1}{2}a\cdot\frac{2\frac{x_0}{a}}{1},\ \frac{1}{2}b\cdot\frac{2\frac{y_0}{b}}{1}\right] = [x_0, y_0] = T \end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že skutečně *bod dotyku T půlí úsečku s krajními body A, B*, což jsou průsečíky tečny hyperboly v bodě T s asymptotami:

$$\boxed{S_{AB} = T\,.}$$

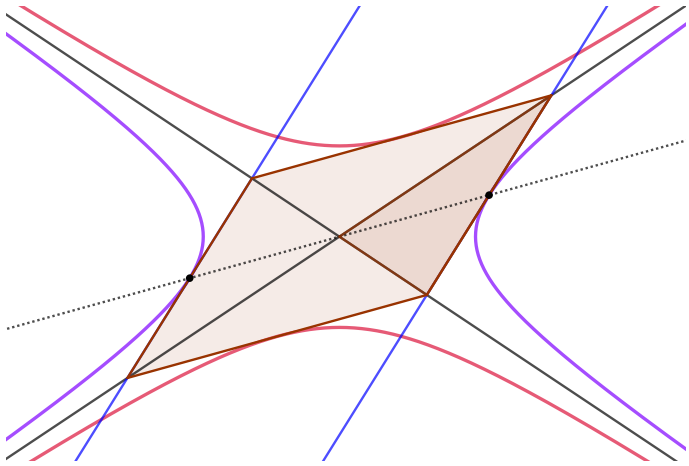
Tento výsledek dokázal již Apollónios z Pergé ve svých *Kónikách* (propozice II,3).

7.2.1 Sdružené hyperboly a obsah rovnoběžníku

Uvažujme hyperbolu, která má hlavní poloosu a, vedlejší poloosu b. Pak k ní můžeme doplnit právě jednu hyperbolu, která má tytéž asymptoty a jejíž jedna poloosa je b (a druhá poloosa je tudíž a). Takové hyperboly nazýváme *sdružené hyperboly*.

Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic tak, že první hyperbola má svou hlavní osu totožnou s osou x a její střed leží v počátku, můžeme jejich rovnice napsat snadno:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1\,.$$



Sestrojíme-li rovnoběžník tak, že jeho vrcholy budou ležet na asymptotách a jeho strany se budou dotýkat jednotlivých větví obou sdružených hyperbol, bude jeho obsah vždy roven

$$S_{\text{rovnob.}} = 4 \cdot ab\,,$$

bude tedy nezávislý na jeho konkrétní volbě. Toto tvrzení plyne z toho, že uvedený rovnoběžník se skládá ze čtyř trojúhelníků o obsahu ab, které jsme prošetřili v předchozí kapitole.

Obsah rovnoběžníku můžeme také psát ve tvaru

$$S_{\text{rovnob.}} = 2a \cdot 2b\,,$$

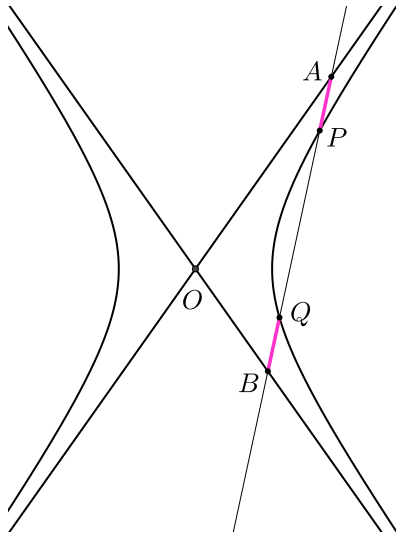
což můžeme interpretovat jako obsah obdélníku, jehož strany mají délky rovné délkám hlavní a vedlejší osy hyperboly.

7.3 Sečna hyperboly

U tečny hyperboly jsme pozorovali, že bod dotyku půlí úsečku AB, kde A a B jsou průsečíky této tečny s asymptotami. Nyní si můžeme položit otázku, zda by podobná vlastnost neplatila i pro sečnu hyperboly, tj. zda úseky na libovolné sečně vymezené větví hyperboly a asymptotami mají stejné délky:

$$\boxed{|AP| = |BQ|\,.}$$

Tento hezký vztah skutečně platí; dokázal jej již Apollónios z Pergé ve svých *Kónikách* (propozice II,8).



Důkaz lze provést poměrně přímočarým výpočtem.

Poznámka: Věta o tečně, kterou jsme dokázali (tj. bod dotyku T hyperboly půlí úsečku s krajními body A, B, což jsou průsečíky tečny hyperboly v bodě T s asymptotami), je vlastně limitním případem věty o sečně, kdy body P a Q splynou ($P = Q = T$).

7.4 Menaichmos – hyperbola a nepřímá úměrnost

Z děl matematiků působících před Eukleidem se nám dochovalo jen několik zmínek z pozdější doby. Jedním z nich je Menaichmos (polovina 4. stol. př. Kr.), který byl současníkem Eudoxa a Platóna. V krátkém úryvku[1] (necelé dvě strany) převádí problém nalezení dvou středních úměrných na úlohu nalézt průsečík dvou kuželoseček.

Modernizovaně řečeno, jsou-li dány veličiny a a b, je úkolem nalézt veličiny x a y takové, aby

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}\,.$$

Tuto soustavu lze upravit například na dvojici rovností

$$x^2 = ay, \qquad ab = xy$$

reprezentujících jedno ze dvou Menaichmových řešení, která se nám dochovala. Tím je původní úloha převedena na problém nalezení průsečíku dvou kuželoseček – paraboly a hyperboly.

Ponechme nyní stranou detaily Menaichmova textu a povšimněme si uvedené rovnice hyperboly: lze ji snadno napsat jako vztah reprezentující nepřímou úměrnost

$$y = \frac{ab}{x}\,.$$

Proč je však grafem nepřímé úměrnosti hyperbola?

Z pozice vysokoškolské matematiky je odpověď snadná: rovnici tvaru $xy = k$ lze pomocí lineární transformace $x = x' - y'$, $y = x' + y'$ ihned převést na rovnici $(x' - y') \cdot (x' + y') = k$, neboli na rovnici rovnoosé hyperboly

$$\frac{x'^2}{k} - \frac{y'^2}{k} = 1\,.$$

[1] Objevuje se v Eutokiově komentáři k Archimédovu spisu *O kouli a válci II*, viz [7], strany 92 až 96.

Transformace soustavy souřadnic (či alespoň otočení) však nemusí vždy patřit do standardní výbavy středoškoláka. Menaichmos tu přináší inspirativní pohled na hyperbolu jako křivku v rovině, pro jejíž body platí, že

součin vzdáleností od dvou různoběžek (asymptot) je konstantní.

To je vlastně geometrická interpretace vztahu $xy = k$, omezíme-li se na větev v 1. kvadrantu a $k > 0$: x je vzdálenost bodu hyperboly od jedné asymptoty (osy y) a y vzdálenost od druhé asymptoty (osy x).

Ukažme nyní, že tuto vlastnost mají všechny body vyhovující rovnici hyperboly známé z analytické geometrie:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{1}$$

Asymptotami této hyperboly jsou přímky

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0\,, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0\,. \tag{2}$$

Vzdálenosti libovolného bodu $X = [x, y]$ od těchto asymptot jsou

$$d_1(X) = \frac{\left|\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}\,, \qquad d_2(X) = \frac{\left|\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}\,.$$

Leží-li bod $X = [x, y]$ na hyperbole dané rovnicí (1), můžeme v součinu vzdáleností $d_1(X) \cdot d_2(X)$ nahradit součin výrazů vzniklých v čitateli jedničkou:

$$d_1(X) \cdot d_2(X) = \frac{\left|\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \cdot \frac{\left|\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\,. \tag{3}$$

Výraz $\dfrac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$ neobsahuje proměnné x, y, je tedy vzhledem k nim konstantní. Vyhovují-li tudíž souřadnice bodu $X = [x, y]$ rovnici hyperboly (1), je součin $d_1(X) \cdot d_2(X)$ jeho vzdáleností od jejích asymptot (2) na volbě tohoto bodu X nezávislý. Tím jsme ověřili, že všechny body hyperboly dané rovnicí (1) splňují „Menaichmovu vlastnost“.[2]

Tuto vlastnost lze snadno pozorovat přímo na rovnici (1), jejíž levá strana nápadně připomíná po rozkladu na součin

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1$$

rovnici (3). Nyní si stačí uvědomit, že každý z těchto činitelů figuruje v čitateli výrazu vyjadřujícího vzdálenost bodu od asymptoty. Oběma činitelům chybí jen určitá konstanta ve jmenovateli a absolutní hodnota. Vhodnou konstantou (přesněji součinem převrácených hodnot norem normálových vektorů obou asymptot) je možno celou rovnici vynásobit. Absolutní hodnotu lze také doplnit, neboť pro všechny body větve hyperboly ležící vpravo od osy y jsou oba činitele kladné; pro všechny body větve ležící vlevo od osy y jsou sice oba činitele záporné, jejich součin je však kladný.

Menaichmův přístup k hyperbole tedy poskytuje zajímavou geometrickou interpretaci nepřímé úměrnosti a standardní rovnice hyperboly.

7.5 Hyperbola v běžném životě

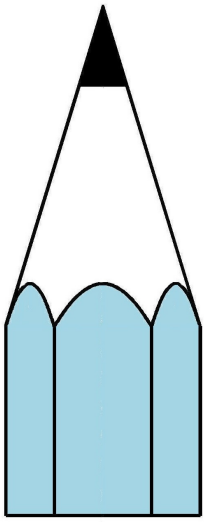
Rozlučme se s hyperbolou úsměvným příkladem jejího výskytu. Představme si špičku ostrouhané tužky jako část kuželové plochy. Není-li tužka kulatá, ale má hranolovitý tvar (např. šestihranná či tříhranná), jsou tyto stěny částí rovin „rovnoběžných s tuhou v tužce“, tedy i s osou kuželové plochy; na rozhraní

[2] Rovnici (3) splňují dvě hyperboly, obě mají asymptoty (2). Jedna hyperbola má větve nalevo a napravo od osy y, druhá má větve nad a pod osou x.

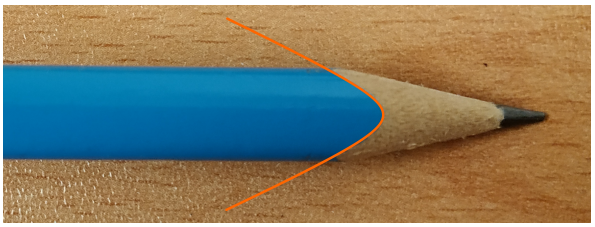
ostrouhaného a neostrouhaného tak vznikají hyperboly.

Strouháme-li tužku, konstruujeme hyperboly.

Kvalitně ostrouhat tužku není jednoduché, navíc jsou vzniklé hyperboly malinké a obtížně se fotí. Předkládáme tedy model, na kterém jsou hyperboly dostatečně veliké a dobře patrné.



Zde je výsledek pokusu s trojhrannou tužkou, na níž jsou hyperboly relativně výrazné.



Kapitola 8

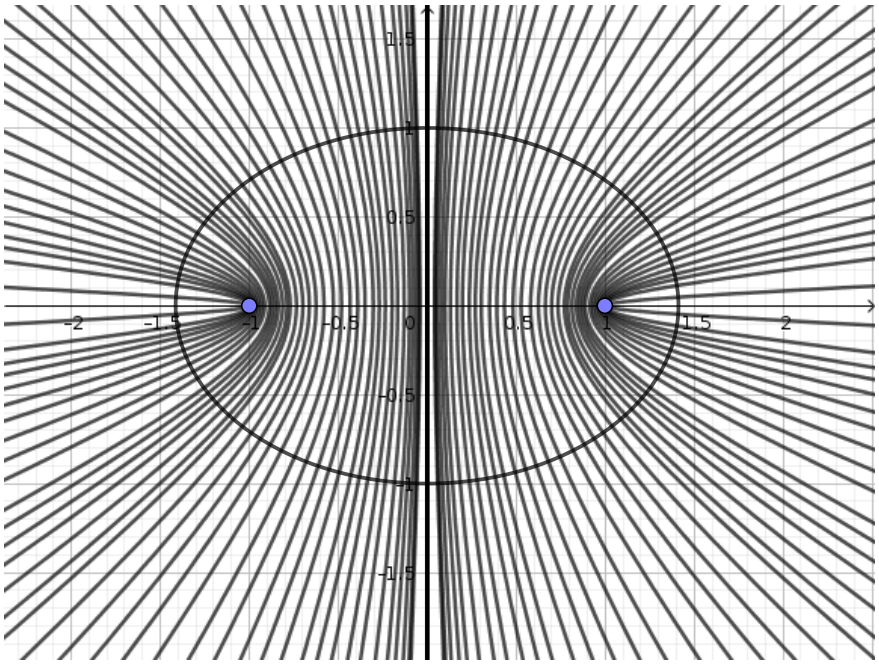
Vztahy mezi kuželosečkami

V této kapitole navážeme na obecné pojednání o kuželosečkách. Upozorníme na několik jednoduchých souvislostí, kterých je možné si všimnout, máme-li k dispozici teorii, kterou jsme doposud vybudovali.

8.1 Konfokální elipsy a hyperboly

Pozorujme následující obrázek. Je na něm narýsována elipsa a hyperboly, všechny tyto kuželosečky mají tatáž ohniska F_1, F_2 (vyznačena modře). Kuželosečky s týmiž ohnisky budeme nazývat *konfokální*.

Na obrázku je patrné, že elipsa je konfokálními hyperbolami protínána pod pravým úhlem. Podobně bychom mohli zvolit jednu hyperbolu a soustavu s ní konfokálních elips, opět bychom zjistili, že se hyperbola s každou z těchto elips protíná pod pravým úhlem.



Pokusme se tedy dokázat následující obecné tvrzení.

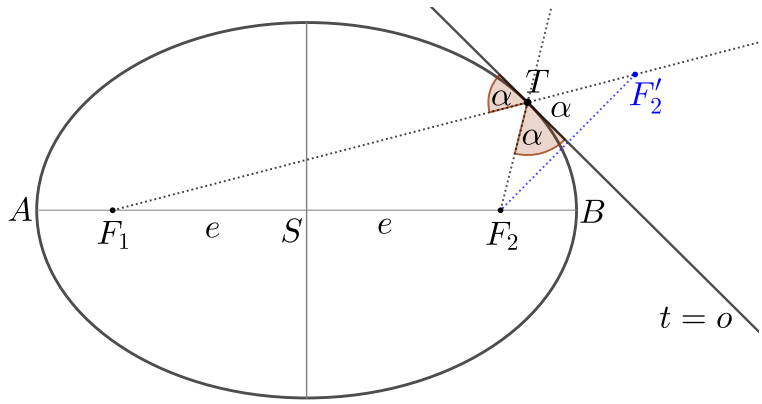
Věta: *Jsou-li elipsa a hyperbola konfokální, protínají se pod pravým úhlem.*

Velikostí úhlu, pod kterým se křivky protínají, rozumíme odchylku tečen v jejich průsečíku. Samotný důkaz tvrzení je překvapivě jednoduchý. Stačí uvážit, jak vypadají směrové vektory tečny elipsy a hyperboly.

U tečny elipsy je trojúhelník $\triangle F_2F_2'T$ rovnoramenný ($|F_2'T| = |F_2T|$), proto je směrový vektor tečny $\vec{u}_e$ lineární kombinací vektorů stejné délky: $(F_2' - T) + (F_2 - T)$. Stejné délky obou generujících vektorů lze dosáhnout i tím, že oba vektory normujeme, budou tedy jednotkové.

Užití F_2' není pohodlné, museli bychom vypočítat jeho souřadnice. Místo vektoru $F_2' - T$ proto použijeme raději vektor se známými vstupními prvky, který je s ním kolineární: $T - F_1$. Pokud stejnou délku obou generujících vektorů zajistíme normováním, dostaneme:

$$\vec{u}_e = \frac{T - F_1}{\|T - F_1\|} - \frac{T - F_2}{\|T - F_2\|}\,.$$



Podobně bychom získali směrový vektor tečny hyperboly:

$$\vec{u}_h = \frac{T - F_1}{\|T - F_1\|} + \frac{T - F_2}{\|T - F_2\|}\,.$$

Vektory $\vec{u}_e$ a $\vec{u}_h$ budou na sebe kolmé, bude-li jejich skalární součin roven nule. To snadno ověříme:

$$\begin{aligned}\vec{u}_e \cdot \vec{u}_h &= \left(\frac{T - F_1}{\|T - F_1\|} - \frac{T - F_2}{\|T - F_2\|}\right) \cdot \left(\frac{T - F_1}{\|T - F_1\|} + \frac{T - F_2}{\|T - F_2\|}\right) \\ &= \left(\frac{(T - F_1) \cdot (T - F_1)}{\|T - F_1\|^2} - \frac{(T - F_2) \cdot (T - F_2)}{\|T - F_2\|^2}\right) = 1 - 1 = 0\,.\end{aligned}$$

Důkaz je tedy hotov. Při výpočtu jsme využili toho, že z definice normy vektoru plyne $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.

8.2 Souvislosti mezi elipsou a parabolou

Na závěr si připomeňme některé výsledky, které jsme odvodili standardními elementárními prostředky. Je užitečné si je připomenout na jednom místě, vyniknou tak vztahy mezi jednotlivými typy kuželoseček, jejich příbuznost i souvislosti mezi nimi.

- Na parabolu můžeme pohlížet jako na elipsu, jejíž jedno ohnisko „pošleme do nekonečna“.
- Porovnejme formulaci *ohniskové vlastnosti* pro parabolu a elipsu.
  - Ohnisková vlastnost paraboly: *paprsek vyslaný z ohniska se odrazí rovnoběžně s osou paraboly.*
  - Ohnisková vlastnost elipsy: *paprsek vyslaný z jednoho ohniska se odrazí do druhého ohniska.*
- Řídicí kružnice elipsy přechází v řídicí přímku paraboly.

Část II

Aplikace lineární algebry na kuželosečky a metoda invariantů

Kapitola 9

Elementy projektivní geometrie a lineární algebra

9.1 Úvod – o čem to je

Mějme rovnici

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad + 2a_{13}x + 2a_{23}y \quad + a_{33} = 0\,.$$

Dosud jsme zjišťovali, o jakou kuželosečku se jedná, pomocí transformace soustavy souřadnic. A také jsme se pak dozvěděli konkrétní parametry, např. u elipsy hlavní a vedlejší poloosu.

Vize: *Nešlo by to provést efektivněji pomocí lineární algebry?*

Ano, šlo: stačí kvadratický výraz na levé straně reprezentovat maticí, a pak použít teorii kvadratických forem.

Pokud se v rovnici kuželosečky neobjevuje smíšený člen (obsahující xy), tak lze získat kanonickou rovnici pouhým posunutím – to se dělá na střední škole. Problém nastává v případě, kdy rovnice obsahuje smíšený člen s xy: jedná-li se např. o elipsu, tak ji musíme otočit tak, aby její osy byly rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, pak smíšený člen vypadne.

Smíšený člen v kvadratických formách jsme ovšem eliminovali v lineární algebře:

pomocí symetrických úprav jsme hledali polární tvar kvadratické formy.

Postup tedy, zdá se, bude následující:

- Z celé levé strany rovnice kuželosečky vytvoříme kvadratickou formu.
- Tu zbavíme smíšeného členu (s xy) pomocí symetrických úprav převodem na polární tvar.
- Vzniklá rovnice už je dostatečně přehledná: určíme, o jakou kuželosečku se jedná.

Pozor: tímto způsobem sice zjistíme, o jakou kuželosečku se jedná, ale většinou ztratíme informace o jejích parametrech (hlavní a vedlejší poloosa u elipsy a hyperboly, ...). Proto nakonec raději půjdeme cestou hledání toho, co se při transformacích kuželosečky nemění – tzv. *invarianty* (např. vlastní čísla, determinanty).

9.2 Maticová reprezentace kuželosečky

Problém: první část rovnice kuželosečky

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

je kvadratickou formou. Snadno ji zapíšeme maticově:

$$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

S kvadratickou formu umíme pracovat: umíme ji transformovat pomocí matice přechodu, eliminovat smíšený člen (obsahující xy) převodem na polární tvar pomocí symetrických úprav. Škoda, že **celá** levá strana rovnice kuželosečky není kvadratickou formou. Co tedy se zbylými členy?

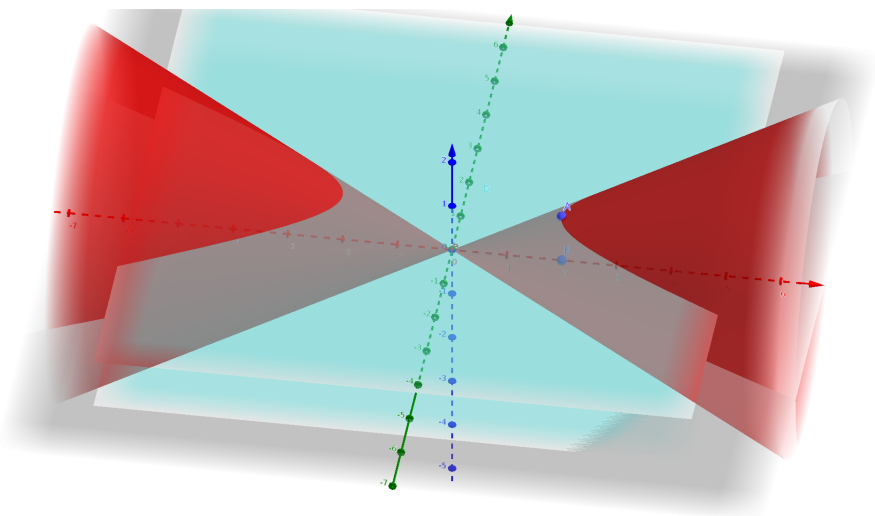
Řešení: Chceme, aby celá levá strana rovnice kuželosečky byla kvadratickou formou. A tak lineární členy i absolutní člen „obohatíme“ o další proměnnou z, aby se i tyto členy staly kvadratickými:

$$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \quad + a_{33}z^2 .}$$

Návrat k původnímu stavu je snadný, stačí dosadit $z = 1$:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad + 2a_{13}x \cdot 1 + 2a_{23}y \cdot 1 \quad + a_{33} \cdot 1 \cdot 1 .$$

Geometricky: rovnice $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \quad + a_{33}z^2 = 0$ může reprezentovat kuželovou plochu. Rovnice $z = 1$ je rovinou (rovnoběžnou s rovinou xy). Jejich průnik je kuželosečka. Například průnikem kuželové plochy $z^2 = \frac{x^2}{4} - y^2$ a roviny $z = 1$ je hyperbola.



Matice kuželosečky

Levé straně rovnice kuželosečky

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad + 2a_{13}x + 2a_{23}y \quad + a_{33} = 0$$

lze tedy jednoznačně přiřadit kvadratickou formu

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \quad + a_{33}z^2 ,$$

kterou můžeme snadno reprezentovat maticí

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Tuto matici nazýváme *maticí kuželosečky*. Matice kuželosečky je tedy maticí příslušné kvadratické formy.

Nyní je také zřejmé, proč jsme v rovnici kuželosečky psali lineární členy a smíšený člen ve tvaru $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{23}$. Matice kuželosečky pak totiž vypadá pěkně, nevyskytují se v ní poloviny $\frac{a_{12}}{2}$, $\frac{a_{13}}{2}$, $\frac{a_{23}}{2}$.

Kvadratickou formu lze tedy pomocí matice K přepsat takto:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \quad + a_{33}z^2 = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

A samotnou rovnici kuželosečky (tj. při $z = 1$)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad + 2a_{13}x + 2a_{23}y \quad + a_{33} = 0$$

budeme psát maticově takto:

$$(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

neboli stručně

$$\boxed{X^T \cdot K \cdot X = 0 ,}$$

případně (označíme-li výraz na levé straně závislý na x a y také K):

$$K(x, y) = 0 .$$

9.3 Homogenní souřadnice

Vše jsme uměle převedli do 3D, převod mezi souřadnicemi původního 2D a nového 3D je však jasný: jelikož je $z = 1$, tak bod $X = [x, y]$ má ve 3D souřadnice $(x, y, 1)$.

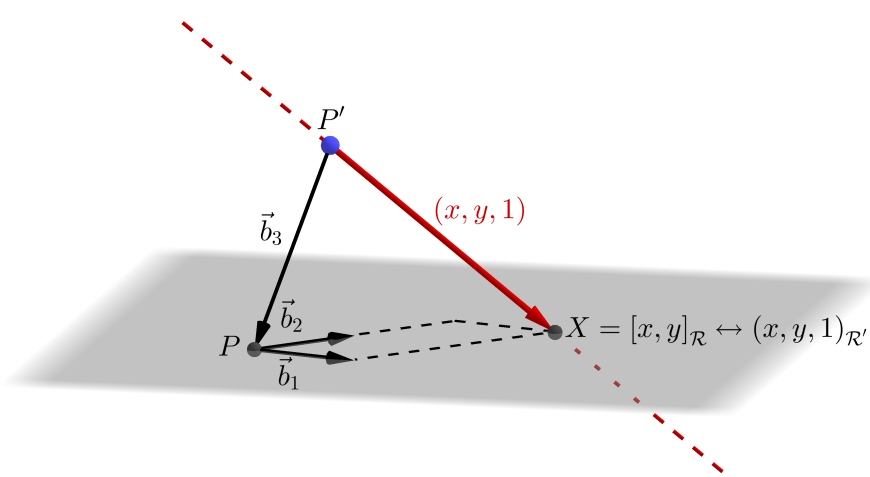
$$\boxed{[x, y] \leftrightarrow (x, y, 1)}$$

Tyto rozšířené souřadnice jsou speciálním případem tzv. *homogenních souřadnic*. Umožňují nesourodou levou stranu rovnice kuželosečky (kvadratická forma, lineární forma, absolutní člen) převést na jedinou kvadratickou formu, tj. na výraz stejno-rodý, cizím slovem homo-genní.

9.3.1 Geometrické znázornění homogenních souřadnic bodu $X = [x, y]$

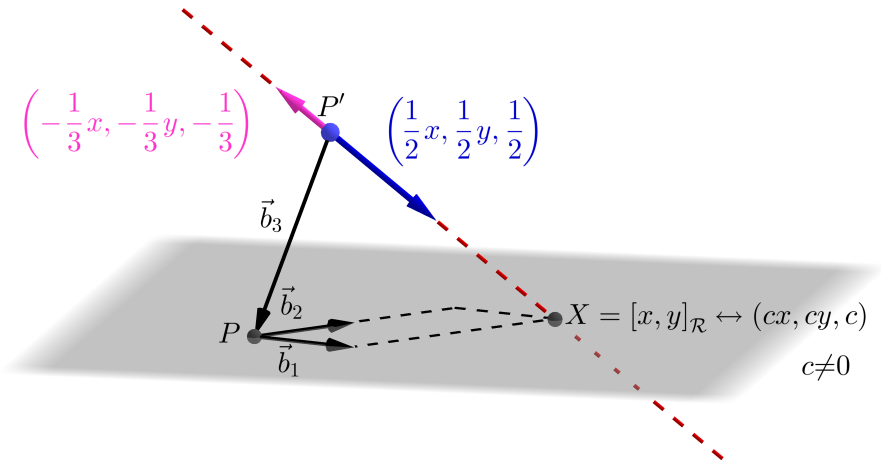
V rovině je dán repér $\mathcal{R} = \langle P; \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle$. Nechť jsou souřadnice bodu X vzhledem k tomuto repéru $[x, y]$.

Zvolme nyní bod P', který v této rovině neleží. Uvažujme dále vektor $\vec{b}_3 = P - P'$. Dostaneme tak repér $\mathcal{R}' = \langle P'; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \rangle$. Souřadnice bodu X vzhledem k tomuto novému repéru $\mathcal{R}'$ jsou $X_{\mathcal{R}'} = (x, y, 1)$, neboť $X = P' + x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Z nového počátku P' do bodu X tak „ukazuje“ vektor $X - P'$ o souřadnicích $(x, y, 1)$.



Myšlenku souřadnic rozšířených o obligátní jedničku můžeme zobecnit: z nového počátku P' do bodu X „ukazuje“ nejen vektor $X - P'$ o souřadnicích $(x, y, 1)$, ale i jeho libovolný nenulový c násobek (cx, cy, c). Jeho koncový bod sice nebude přesně bodem X, ale i tak jím bude bod X jednoznačně určen, neboť přímka se směrovým vektorem (cx, cy, c) procházející počátkem P' protíná rovinu v jediném bodě, kterým je bod X. Můžeme tedy říci, že bod X je jednoznačně určen touto přímkou; jelikož je počátek P' pevně zvolen, tak k jednoznačnému určení bodu X postačuje zadání směrového vektoru (cx, cy, c).

Za souřadnice bodu $X = [x, y]$ v rovině tak můžeme považovat libovolnou uspořádanou trojici (cx, cy, c), $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Právě takováto uspořádaná trojice se nazývá *homogenními souřadnicemi* bodu X v rovině.



9.3.2 Výhoda homogenních souřadnic: nevlastní body a homogenizace

Zatím to vypadá jako samoúčelné přidání třetí souřadnice c, přičemž vztah mezi souřadnicemi bodu $X = [x, y]$ v rovině a jeho homogenními souřadnicemi (cx, cy, c) je zřejmý:

- Bod $X = [x, y]$ v rovině má homogenní souřadnice (cx, cy, c), kde $c \neq 0$ si můžeme libovolně zvolit; zvolíme-li například $c = 1$, jsou homogenní souřadnice bodu $X = (x, y, 1)$.
- Bod X s homogenními souřadnicemi (x, y, z), kde $z \neq 0$, má také homogenní souřadnice $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$, takže jeho souřadnice jsou $X = \left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right]$.

Co kdybychom zvolili $z = 0$?
Homogenním souřadnicím (x, y, z) odpovídá bod $X = \left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right]$ v rovině, jehož souřadnice by pro $z = 0$ nebyly definovány (s trochou neopatrnosti bychom možná řekli, že jsou ***nekonečné***).

Něco na tom bude: vektor $(x, y, 0)$ je rovnoběžný s rovinou (šedá), takže přímka s tímto směrovým vektorem procházející počátkem P' tuto rovinu neprotíná. Pokud bychom si průsečík moc přáli, tak bychom řekli, že leží „někde v nekonečnu“. Z těchto volných úvah plyne, že by body s homogenními souřadnicemi $(x, y, 0)$ mohly reprezentovat *nevlastní body* roviny.

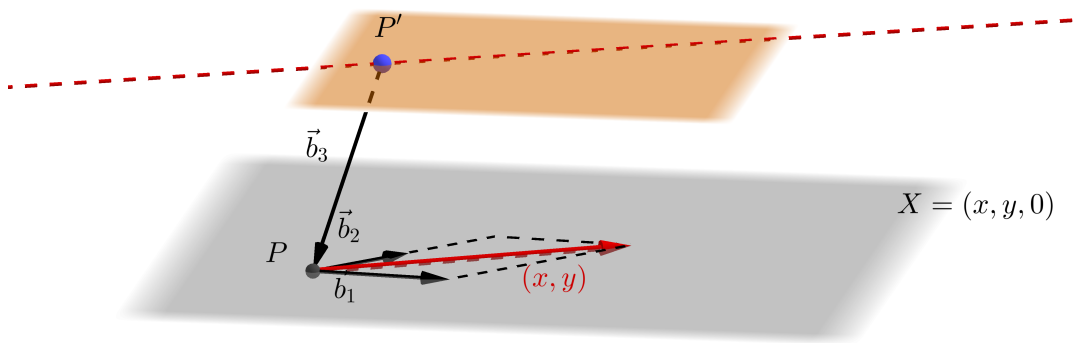
Pokusme se nyní zrevidovat celou konstrukci homogenních souřadnic bodů v rovině:

- sestrojíme množinu všech směrů (tj. jednorozměrných vektorových podprostorů, což vlastně odpovídá množině všech přímek procházejících počátkem) v trojrozměrném prostoru,
- chceme, aby každému směru odpovídal právě jeden bod roviny (a naopak).

Poslední požadavek však zatím není splněn pro $z = 0$. Shrňme tedy oba případy: $z \neq 0$ a $z = 0$.

- Pokud je přímka se směrovým vektorem (x, y, z) procházející bodem P' s rovinou různoběžná, má s ní jediný společný bod. To nastává právě v případě, kdy $z \neq 0$.

- Pokud je přímka se směrovým vektorem (x, y, z) procházející bodem P' s rovinou rovnoběžná, nemá s ní žádný společný bod. To nastává právě v případě, kdy $z = 0$. Mohli bychom však přidat k bodům roviny další body, tzv. *nevlastní body*, které by měly homogenní souřadnice $(x, y, 0)$. Jednalo by se o „body v nekonečnu“, každý by byl jednoznačně určen směrem, neboli přímkou (červeně) rovnoběžnou s rovinou (šedá) procházející počátkem P'.



„Směr“, kterým tato přímka „ukazuje“, však musíme chápat neorientovaně: jedna přímka „ukazuje“ do jediného nekonečna. Vlastně je zajímavé, že na jednom i druhém „konci“ přímky najdeme pořád tentýž jeden nevlastní bod. Výhodou je, že se pak rovnoběžky protínají v jediném nevlastním bodě (a ne „na každém konci v jednom“, tedy ve dvou nevlastních bodech). Dvě přímky v rovině tak mají vždy jediný průsečík: různoběžky vlastní, zatímco rovnoběžky nevlastní – určený směrem těchto rovnoběžek.

Množina všech nevlastních bodů roviny by tedy byla reprezentována všemi přímkami procházejícími počátkem P' rovnoběžnými s rovinou, tj. ležícími v rovině naznačené béžově. Jinak řečeno, jedná se o množinu všech směrů tvaru $[(x, y, 0)]$, kde $x, y \in \mathbb{R}$.

Výhodou homogenních souřadnic je tedy mimo jiné i to, že jsou schopny postihnout i nevlastní body. Přímky v rovině pak mají vždy právě jeden společný bod: jsou-li různoběžné, mají společný vlastní bod (x_0, y_0, z_0); jsou-li rovnoběžné, mají společný nevlastní bod $(x_0, y_0, 0)$ (směrový vektor těchto rovnoběžek je (x_0, y_0)).

9.3.3 Reálná projektivní rovina

Pokud bychom uvažovali všechny body, kterým odpovídají homogenní souřadnice, dostali bychom reálnou projektivní rovinu (přesněji projektivní rozšíření dvojrozměrného afinního prostoru).

Jak se liší projektivní rovina od roviny afinní? Přidáme-li k afinní rovině všechny body nevlastní přímky ($z = 0$), dostaneme projektivní rovinu.

Můžeme zkonstruovat také projektivní rozšíření eukleidovského prostoru, což opět realizujeme přidáním všech bodů nevlastní přímky ($z = 0$) k bodům eukleidovského prostoru.

Kapitola 10

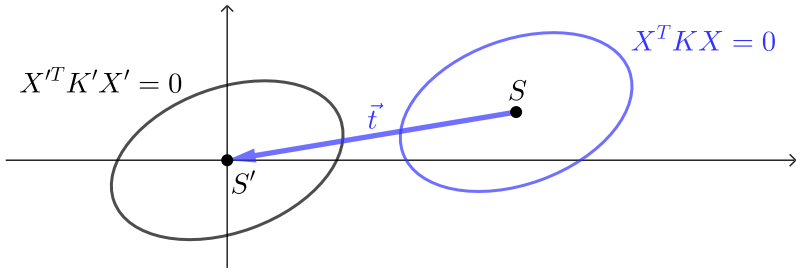
Transformace kuželosečky

Cíl: Vhodným posunutím kuželosečky se (pokud možno) zbavíme lineárních členů[1], vhodným otočením se pak zbavíme členu s xy. V následujících podkapitolkách postupně najdeme takové posunutí a otočení, aby k těmto zjednodušením skutečně došlo, bude-li to možné.

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{posunutí}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{otočení}} \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix}$$

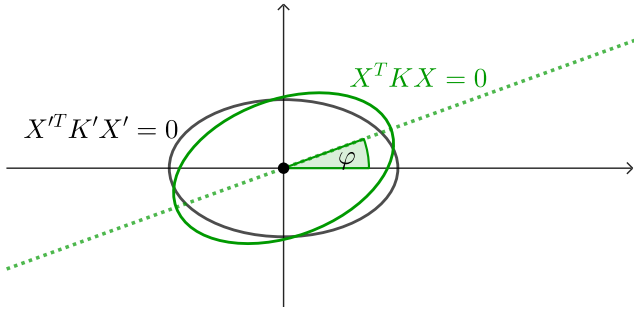
Grafické znázornění prvního kroku – posunutí (translace): Na následujícím obrázku je znázorněna elipsa se středem S neležícím v počátku (modře), která se posunutím o vektor $\vec{t} = (t_1, t_2)$ zobrazí na elipsu se středem v počátku.

Pozor: Souřadnice původního středu S tedy jsou $S = [-t_1, -t_2]$, místo samotného vektoru $\vec{t}$ nás tedy bude spíše zajímat vektor $-\vec{t}$.



Grafické znázornění druhého kroku – otočení (rotace): Na následujícím obrázku je elipsa se středem ležícím v počátku (zeleně), její hlavní osa je oproti ose x pootočena o úhel $-\varphi$ (přibližně $-20°$). Tato elipsa se zobrazí na elipsu, jejíž hlavní osa splývá s osou x, a to pomocí otočení R_φ kolem počátku o úhel φ.

Pozor: Hledat budeme toto otočení R_φ (kterým elipsu pootočíme do „vodorovné polohy“), výsledkem však bude $-\varphi$ (o kolik je původní zelená elipsa pootočená oproti „vodorovné“ poloze).



[1] Například u paraboly ($y^2 - 2px = 0$) se obou lineárních členů nezbavíme, jeden nutně zůstane. (A všimněme si koeficientu $2p$, aby matice vypadala hezky.)

Shrnutí:

Nyní postupně oba kroky provedeme aplikací vhodných matic:

- matice posunutí $T_{\vec{t}}$ (cizím slovem *translace*) o vektor $\vec{t}$,
- a matice otočení R_φ (cizím slovem *rotace*) o úhel φ.

Ve skutečnosti však hledáme spíše údaje o původní zadané kuželosečce (na obrázcích znázorněna barevně), z uvedených dvou kroků tedy získáme:

- souřadnice středu S původní zadané kuželosečky (modře), které jsou rovny souřadnicím vektoru $-\vec{t}$
- a úhel, o který je původní kuželosečka (zeleně) pootočená oproti „vodorovné“ poloze, tj. $-\varphi$.

Budeme tedy hledat matice zobrazení $T_{\vec{t}}$ a R_φ, která postupně posunou a otočí kuželosečku $X^T \cdot K \cdot X = 0$ do „hezké“ polohy, zajímat nás však bude ta původní „nepěkná“ poloha:

$$\boxed{\text{střed } S\colon\ -\vec{t} \qquad \text{a} \qquad \text{úhel otočení:}\ -\varphi\,,}$$

což jsou parametry inverzních zobrazení k posunutí $T_{\vec{t}}$ a otočení R_φ. Je zřejmé, že tato inverzní zobrazení jsou opět posunutím ($T_{-\vec{t}}$, zkrátka posuneme zpět, tedy o opačný vektor k $\vec{t}$), resp. otočením ($R_{-\varphi}$, zkrátka otočíme zpět, tedy o úhel $-\varphi$).

10.1 Posunutí (translace)

Pozorování: Začněme pro jednoduchost příkladem toho, co známe ze střední školy: rovnici elipsy se středem $S = [s_1, s_2]$ různým od počátku, tj.

$$\frac{(x-s_1)^2}{a^2} + \frac{(y-s_2)^2}{b^2} = 1$$

lze vždy pomocí posunutí

$$T\colon \quad x' = x + (-s_1), \qquad y' = y + (-s_2)$$

zobrazit na elipsu se středem v počátku. Její rovnice pak má tvar

$$\frac{x'^{\,2}}{a^2} + \frac{y'^{\,2}}{b^2} = 1\,,$$

který už neobsahuje lineární členy.

Všimněme si ještě, že pokud chceme provést posunutí elipsy se středem $S = [s_1, s_2]$ tak, že do její rovnice dosadíme za x a y, budeme muset z rovnic posunutí x a y vyjádřit, čímž dostaneme rovnice zobrazení inverzního:

$$T^{-1}\colon \quad x = x' - (-s_1), \qquad y = y' - (-s_2)\,,$$

zapsáno vektorově (označíme-li $X = [x, y]$, $X' = [x', y']$, $\vec{t} = (-s_1, -s_2)$):

$$T^{-1}\colon \quad X = X' - \vec{t}\,.$$

Toto inverzní zobrazení je opět posunutím, ovšem místo vektoru $\vec{t} = (-s_1, -s_2)$ máme vektor opačný: $-\vec{t} = (s_1, s_2)$; zapsáno vektorově:

$$\boxed{T\colon\ X' = X + \vec{t}, \qquad T^{-1}\colon\ X = X' + (-\vec{t}) = X' - \vec{t}\,.}$$

Závěr: *Souřadnice středu $S = [s_1, s_2]$ původní zadané kuželosečky jsou rovny souřadnicím vektoru* $-\vec{t} = (s_1, s_2)$ (viz též obrázek u grafického znázornění posunutí na začátku této kapitoly):

$$\boxed{S = [s_1, s_2] \quad \sim \quad -\vec{t} = (s_1, s_2)\,.}$$

10.1.1 Matice posunutí

Na kuželosečku $X^T K X = 0$ budeme chtít aplikovat posunutí T o vektor $\vec{t} = (t_1, t_2)$:

$$T\colon \quad x' = x + t_1, \qquad y' = y + t_2\,,$$

zapsáno vektorově:

$$T\colon\ X' = X + \vec{t}.$$

Bylo by velmi výhodné, kdybychom toto zobrazení mohli realizovat pomocí násobení maticí (místo velmi nepohodlného sčítání). Rovnice kuželosečky ($X^T K X = 0$) se totiž také skládá ze součinů matic; navíc nalezení předpisu inverzního zobrazení by se zredukovalo na nalezení inverzní matice.

Jaká matice[2] T provede posunutí bodu $X = [x, y]$ o vektor $\vec{t} = (t_1, t_2)$? Pracujme přímo v homogenních souřadnicích ($z = 1$). Je to matice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

neboť právě jejím vynásobením dostaneme $x + t_1$ a $y + t_2$:

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = T \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_1 \\ y + t_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rovnice posunutí T o vektor $\vec{t}$ tedy jsou:

$$T\colon\ X' = X + \vec{t} \qquad \text{nebo maticově:} \quad T\colon\ X' = T \cdot X\,.$$

Matice inverzního zobrazení k posunutí T

K samotnému posunutí kuželosečky budeme potřebovat rovnice posunutí, které je zobrazením inverzním k posunutí o vektor $\vec{t}$. Jedná se opět o posunutí, avšak o vektor $-\vec{t}$:

$$T\colon\ X' = X + \vec{t}, \qquad T^{-1}\colon\ X = X' - \vec{t}.$$

Maticový zápis obou zobrazení vypadá takto:

$$T\colon\ X' = T \cdot X, \qquad T^{-1}\colon\ X = T^{-1} \cdot X'\,.$$

Matice T^{-1} inverzní k matici T posunutí T by tedy měla v posledním sloupci obsahovat vektor $-\vec{t}$. Skutečně:

$$T \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_1 \\ 0 & 1 & -t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_1 + t_1 \\ 0 & 1 & -t_2 + t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E\,,$$

odkud plyne:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_1 \\ 0 & 1 & -t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[2] Posunutí jakožto zobrazení i jeho matici budeme značit stejným písmenem T, jelikož je posunutí svou maticí určeno jednoznačně.

10.1.2 Posunutí kuželosečky

Při realizaci posunutí kuželosečky budeme pracovat přímo v homogenních souřadnicích (tj. místo $X = [x, y]$ budeme psát $X = (x, y, 1)$; této speciální volby ($z = 1$) se budeme držet, takže příslušná x a y vždy budou přesně kartézskými souřadnicemi bodu X).

Aplikujme nyní posunutí $T\colon X' = T \cdot X$ (odkud plyne: $X = T^{-1} \cdot X'$) na kuželosečku s rovnicí

$$X^T \cdot K \cdot X = 0\,.$$

Za X tedy do rovnice kuželosečky dosadíme $X = T^{-1} \cdot X'$:

$$X^T \cdot K \cdot X = (T^{-1}X')^T \cdot K \cdot (T^{-1}X') = X'^T\,(T^{-1})^T K\,T^{-1}X' = X'^T \cdot \big((T^{-1})^T K\,T^{-1}\big) \cdot X'\,.$$

Vypočtěme tedy matici posunuté kuželosečky:

$$(T^{-1})^T K\,T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -t_1 & -t_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_1 \\ 0 & 1 & -t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jelikož jsou souřadnice hledaného středu $S = [s_1, s_2]$ původní zadané kuželosečky rovny souřadnicím vektoru $-\vec{t} = (-t_1, -t_2) = (s_1, s_2)$, nahraďme $-t_1 = s_1$ a $-t_2 = s_2$:

$$(T^{-1})^T K\,T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_1 & s_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13} & a_{12}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23} & a_{13}s_1 + a_{23}s_2 + a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23} \\ a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13} & a_{12}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23} & \tilde{a} \end{pmatrix},$$

přičemž prvek $\tilde{a}$ nebudeme potřebovat.[3]

Kdy budou koeficienty lineárních členů vyskytující se v matici $(T^{-1})^T K\,T^{-1}$ nulové?

Když budou nulové prvky této matice na pozicích $\{1, 3\}$ a $\{2, 3\}$ (a samozřejmě také prvky na pozicích $\{3, 1\}$ a $\{3, 2\}$, jelikož je matice symetrická):

$$a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13} \qquad \text{a} \qquad a_{12}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23}\,.$$

Dostáváme tak soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých s_1 a s_2:

$$\begin{aligned} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13} &= 0 \\ a_{12}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23} &= 0 \end{aligned}$$

neboli maticově

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{23} \end{array}\right).$$

[3] Samozřejmě jej lze snadno dopočítat:

$$\tilde{a} \;=\; a_{11}s_1^2 + 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_2^2 \;+\; 2a_{13}s_1 + 2a_{23}s_2 \;+\; a_{33} \;=\; (s_1, s_2, 1)\,K \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava má jediné řešení právě tehdy, když je matice soustavy, což je vlastně matice koeficientů kvadratických členů

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

regulární (neboli invertibilní, má nenulový determinant). Je-li tedy matice A regulární, existuje posunutí takové, že lineární členy zcela zmizí. Odtud dostaneme souřadnice jediného bodu $S = [s_1, s_2]$, který budeme na základě předchozích úvah nazývat středem kuželosečky.

Středové a nestředové regulární kuželosečky

Připomeňme znovu například rovnici elipsy probíranou na střední škole:

$$\frac{(x - s_1)^2}{a^2} + \frac{(y - s_2)^2}{b^2} = 1\,.$$

Posunutím bodu $S = [s_1, s_2]$ do počátku jsme eliminovali lineární členy, čímž vznikla rovnice:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1\,.$$

Bod S je střed elipsy, podobně to funguje u hyperboly.

U paraboly však lineární členy posunutím eliminovat zcela nelze ($x^2 = 2py$, $p \neq 0$), přestože je její matice K regulární; soustava by neměla jediné řešení, neboť matice A je singulární:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p \\ 0 & -p & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Parabola tedy nemá střed, což souhlasí s naší zkušeností s parabolou. Parabolu tedy budeme považovat za nestředovou kuželosečku, elipsu (a kružnici jako její speciální případ) a hyperbolu za kuželosečky středové.

Dostáváme se tak k definici středu kuželosečky a středových a nestředových kuželoseček.

10.1.3 Střed regulární kuželosečky

Předpokládejme, že je zadána kuželosečka svou maticí K. Zabývat se budeme pouze regulárními kuželosečkami, tj. případem, kdy matice K je regulární.

Definice: Je-li matice A (a zároveň matice K) regulární, řekneme, že kuželosečka K je *středová*; bod $S = [s_1, s_2]$, jehož souřadnice získáme jako jediné řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{23} \end{array}\right)$$

nazýváme *středem* kuželosečky K.

Tuto soustavu je snadné si dokonce i zapamatovat: vypadá (až na znaménka pravé strany) jako první dva řádky matice kuželosečky.

Námitka: Střed jsme definovali na základě pozorování speciálních případů (elipsa, hyperbola). Měli bychom však ověřit, že bod S skutečně splňuje to, co od středu očekáváme:

střed kuželosečky je jejím středem souměrnosti,

tj. s každým bodem P_1 kuželosečky na ní leží i jeho obraz P_2 ve středové souměrnosti se středem S.

Tvrzení stačí ověřit pro kuželosečku posunutou bodem S do počátku. Je-li v této situaci vlastní bod $P_1 = [p, q]$, potom má jeho obraz P_2 ve středové souměrnosti podle počátku S souřadnice $[-p, -q]$. Ověřme tedy tvrzení:

$$\text{je-li } P_1 \in K, \text{ potom i } P_2 \in K.$$

To je však snadné, stačí implikaci přepsat

$$P_1^T K P_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad P_2^T K P_2 = 0.$$

A tato implikace platí, neboť platí rovnost

$$(p, q, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad (-p, -q, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -p \\ -q \\ 1 \end{pmatrix},$$

což je ihned vidět, pokud součiny matic rozepíšeme:

$$a_{11}\, p^2 + 2a_{12}\, pq + a_{22}\, q^2 + a_{33} \quad = \quad a_{11}\, (-p)^2 + 2a_{12}\, (-p)(-q) + a_{22}\, (-q)^2 + a_{33}\,.$$

Příklad: Najděte střed elipsy $4\,x^2 + 9\,y^2 - 8\,x - 90\,y + 193 = 0$.

Vlastně bychom se mohli zeptat, jak tuto elipsu máme posunout ve směru osy x a y, aby se střed posunul do počátku.

Matice této elipsy je

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 9 & -45 \\ -4 & -45 & 193 \end{pmatrix}.$$

Zapišme a vyřešme soustavu rovnic pro nalezení souřadnic jejího středu, kterou převezmeme z prvních dvou řádků matice elipsy s tím, že v posledním sloupci použitém jako sloupec pravých stran změníme znaménka:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 45 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

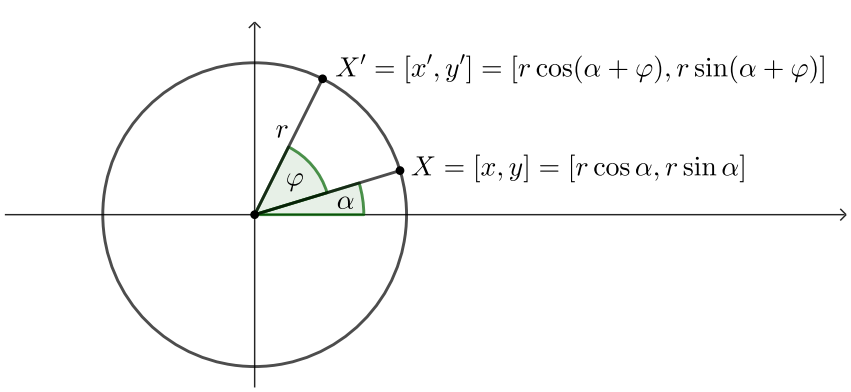
Řešením této soustavy jsou přímo souřadnice středu, tedy: $S = [1, 5]$.

10.2 Otočení (rotace)

10.2.1 Matice otočení kolem počátku o orientovaný úhel φ

Rovnice otočení lze snadno odvodit, neboť jsou důsledkem součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus. Předpokládejme, že souřadnice všech bodů budou v jediné zvolené kartézské soustavě souřadnic.

Otočením bodu $X = [x, y]$ kolem počátku o orientovaný úhel φ dostaneme bod $X' = [x', y']$, jehož souřadnice snadno nalezneme na základě tohoto obrázku:



Máme tedy:

$$x' = r\cos(\alpha+\varphi), \qquad y' = r\sin(\alpha+\varphi)\,.$$

Rozepišme pravé strany pomocí součtových vzorců:

$$x' = r\cdot(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi)\,, \qquad y' = r\cdot(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi)$$

a pišme místo $r\cos\alpha$ souřadnici x a místo $r\sin\alpha$ souřadnici y; dostaneme tak ihned rovnice otočení bodu $X = [x, y]$ kolem počátku o orientovaný úhel φ:

$$\boxed{x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \qquad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi\,.}$$

Tyto rovnice můžeme zapsat maticově:

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\varphi \cdot X\,,$$

neboli stručně

$$X' = R_\varphi \cdot X\,,$$

kde R_φ značí matici otočení kolem počátku o orientovaný úhel φ:

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\,.$$

Matice inverzního zobrazení k otočení R_φ

Všimněme si zajímavé vlastnosti matice otočení:

$$R_\varphi \cdot R_\varphi^T = E\,,$$

neboli matice transponovaná je zároveň maticí inverzní. Ověřit to lze přímým výpočtem, ale je to vidět ihned „otočením zpět“, tj. o orientovaný úhel $-\varphi$, čímž dostaneme matici transponovanou. Celkově tak máme rovnost všech těchto matic:

$$\boxed{R_\varphi^T = R_\varphi^{-1} = R_{-\varphi}.}$$

Navíc snadno vypočítáme $\det R_\varphi = 1$ (goniometrická jednička) pro každé $\varphi \in \mathbb{R}$. Z nenulovosti determinantu také vyplývá, že matice R_φ je regulární, tedy invertibilní.

10.2.2 Otočení kuželosečky

Cílem je nyní otočit kuželosečku K (je-li středová, tak se středem v počátku) kolem počátku o takové φ, aby byl koeficient u smíšeného členu (tj. prvek na pozici $\{1, 2\}$ v matici kuželosečky) nulový.

Při realizaci otočení kuželosečky budeme pracovat přímo v homogenních souřadnicích (tj. místo $X = [x, y]$ budeme psát $X = (x, y, 1)$; této speciální volby ($z = 1$) se budeme držet, takže příslušná x a y vždy budou přesně kartézskými souřadnicemi bodu X).

Aplikujme nyní otočení R_φ: $X' = R_\varphi \cdot X$ (odkud plyne: $X = R_{-\varphi} \cdot X'$) na kuželosečku s rovnicí

$$X^T \cdot K \cdot X = 0\,.$$

Za X tedy do rovnice kuželosečky dosadíme $X = R_{-\varphi} \cdot X'$:

$$X^T \cdot K \cdot X = (R_{-\varphi}X')^T \cdot K \cdot (R_{-\varphi}X') = X'^T\, R_{-\varphi}^T K\, R_{-\varphi} X' = X'^T \cdot \left(R_{-\varphi}^T K\, R_{-\varphi}\right) \cdot X'\,.$$

Jelikož je $R_\varphi^T = R_\varphi^{-1} = R_{-\varphi}$, můžeme matici otočené kuželosečky zjednodušit:

$$R_{-\varphi}^T K\, R_{-\varphi} \;=\; R_\varphi K\, R_\varphi^T\,.$$

Vypočtěme nyní matici otočené kuželosečky:

$$R_\varphi K\, R_\varphi^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cílem je najít takové φ, pro něž bude prvek na pozici $\{1,2\}$ nulový (a samozřejmě také na pozici $\{2,1\}$, jelikož je matice symetrická). Ten vyjde:

$$a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi\,(a_{11} - a_{22})\,.$$

Kdy bude tento koeficient smíšeného členu nulový?

Bude to tehdy, když

$$a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi\,(a_{11} - a_{22}) = 0\,.$$

Jelikož je $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$ a $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\cdot\sin 2\varphi$, dostáváme

$$a_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,(a_{11} - a_{22}) = 0\,,$$

což upravíme vydělením $\cos 2\varphi$ (v případě nenulovosti, tj. pro $\varphi \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$):

$$a_{12} + \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,2\varphi\,(a_{11} - a_{22}) = 0\,.$$

Odtud pak

$$\mathrm{tg}\,2\varphi = -\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\,,$$

což je vztah vhodný pro snadný výpočet φ. Podmínky existence však upozorňují, že bychom měli raději chtít vzorec, v němž jsou zaměněny čitatel a jmenovatel:

$$\mathrm{cotg}\,2\varphi = -\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}\,,$$

neboť v případě $a_{12} = 0$ máme zadánu kuželosečku, jejíž rovnice neobsahuje smíšený člen, a není tedy třeba ji otáčet. Tomu odpovídají i φ, pro něž není $\mathrm{cotg}\,2\varphi$ definován: $\varphi \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Nyní jsme našli φ, chceme však $\varphi' = -\varphi$, neboť to je úhel, o který je původní kuželosečka otočena, viz též poznámky v úvodu celé této kapitoly. Nehledáme tedy rovnici, z níž bychom získali φ, ale cílem je získat úhel $-\varphi$, o který je elipsa pootočena oproti „vodorovné“ poloze. Jelikož je tangens funkcí lichou, tj. $\mathrm{tg}\,2\varphi' = \mathrm{tg}\,2(-\varphi) = -\mathrm{tg}\,2\varphi$, dostáváme pro $\varphi' = -\varphi$ vztah:

$$\boxed{\mathrm{tg}\,2\varphi' = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\,,}$$

případně (po pouhé záměně čitatele a jmenovatele)

$$\mathrm{cotg}\,2\varphi' = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}\,.$$

10.2.3 Matice otočení v geometrii a lineární algebře

Na začátku kapitoly věnované otočení jsme odvodili matici otočení kolem počátku o orientovaný úhel φ:

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Je to matice geometrického zobrazení, které bodu X v rovině přiřadí bod X'. Vše se děje v jedné zvolené kartézské soustavě souřadnic.

Pokud bychom tuto matici porovnali s maticí otočení odvozenou v rámci lineární algebry, zjistili bychom, že se liší umístěním znaménka minus:

$$R_\varphi^{LA} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} .$$

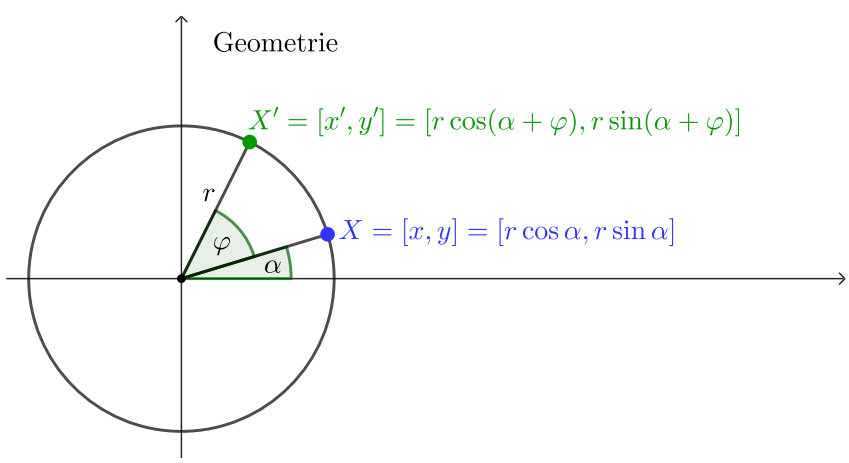
Je tomu tak proto, že v lineární algebře tato matice není maticí geometrického zobrazení, které jednomu bodu X přiřazuje jiný bod X', ale jedná se o matici přechodu od báze B k bázi B':

$$R_\varphi^{LA} = P_{BB'} .$$

Netransformují se tedy samotné geometrické objekty, ale transformuje se pouze soustava souřadnic (přesněji báze). Vektor tedy zůstává tentýž, mění se pouze jeho souřadnice. Matice R_φ^{LA} tedy řeší jiný problém: reprezentuje vztah dvou kartézských soustav souřadnic se společným počátkem, kdy jedna soustava (čárkovaná) vznikla otočením druhé soustavy (nečárkované) kolem počátku o úhel φ.

Otočení jako geometrické zobrazení

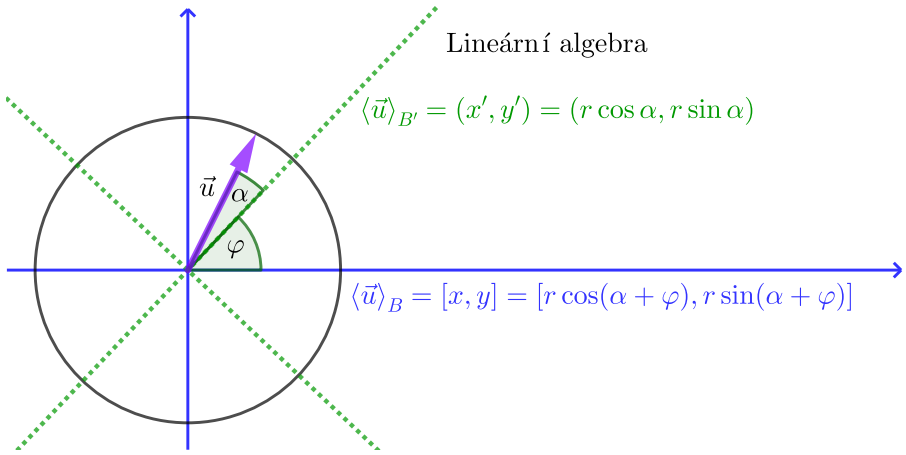
Na následujícím obrázku jsou původní bod X a jeho souřadnice označeny modře. Bod X' vzniklý otočením bodu X kolem počátku o úhel φ a jeho souřadnice jsou označeny zeleně.



Otočení jako matice přechodu v lineární algebře

V lineární algebře při transformaci báze máme pouze jeden vektor $\vec{u}$ (fialově) a jeho souřadnice vyjadřujeme v původní bázi B (modře) a v nové bázi B' otočené o φ (zeleně):

$$\langle \vec{u} \rangle_{B'} = R_\varphi^{LA} \cdot \langle \vec{u} \rangle_B .$$



Porovnáním obou obrázků je ihned zřejmé „prohození souřadnic čárkovaných a nečárkovaných objektů“:

- v geometrii jsou modré souřadnice původního bodu založeny na úhlu α, zelené souřadnice bodu otočeného o φ jsou založeny na úhlu $\alpha + \varphi$;
- v lineární algebře jsou naopak modré souřadnice původního vektoru založeny na úhlu $\alpha + \varphi$, zelené souřadnice bodu otočeného o φ jsou založeny na úhlu α.

10.3 Transformace paraboly

V předchozích podkapitolách jsme se soustředili na středové kuželosečky (zejména elipsu a hyperbolu), které jsme v prvním kroku transformací posouvali tak, aby jejich střed ležel v počátku. Parabola však střed nemá, protože by soustava neměla řešení, neboť hodnost matice A (rovna jedné) je různá od hodnosti matice rozšířené (je rovna dvěma). Stačí se podívat na jednu z kanonických rovnic paraboly: je tvaru $x^2 = 2py$, $p \neq 0$, její matice je

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p \\ 0 & -p & 0 \end{pmatrix},$$

a na příslušnou soustavu rovnic pro hledání souřadnic středu:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{array}\right).$$

Lineární členy tedy úplně eliminovat nelze. Vzniká tak otázka, jak parabolu vhodně transformovat.

Kapitola 11

Metoda invariantů

11.1 Základní myšlenka metody invariantů

Vše jsme sice dosud zapisovali maticově, ale bez toho bychom se klidně obešli: lineární algebru jsme dosud podstatně nevyužili.

Diagonalizace matice kuželosečky. Všechno snažení (otočení, posunutí) směřuje k tomu, abychom matici kuželosečky převedli na matici diagonální. To bychom mohli provést převedením kvadratické formy s maticí K na polární tvar, příslušná polární báze by byla bází, vzhledem k níž má kuželosečka „hezkou“ rovnici (bez smíšených a lineárních členů, pokud možno). Z polární báze však není vidět, jaké otočení a posunutí je potřeba provést, vše je v ní obsaženo zároveň. Navíc polární tvar (existující určitě aspoň v případě elipsy či hyperboly) vlastně ani nepotřebujeme: už předem víme, že vyjde diagonální matice.

Co tedy potřebujeme? Konkrétní φ a konkrétní posunutí T (pokud existují). A (pokud možno) diagonalizovaný tvar matice kuželosečky, v němž bude zachováno vše podstatné. Například u elipsy bychom si přáli tvar

$$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}.$$

Odtud již snadno najdeme hlavní a vedlejší poloosu, tj. *geometrické* vlastnosti elipsy. Hledání polárního tvaru matice K však není moc vhodné: při jeho hledání nás totiž nic neupozorní, že bychom měli přestat; úprava v případě elipsy by vždy mohla skončit maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

což odpovídá kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Změnili jsme bázi natolik, že jsme změnili délku bázových vektorů, takže se „přizpůsobily“ hlavní a vedlejší poloose.

Jak z toho ven? Matice kuželosečky se transformuje jako kvadratická forma:

$$R_\varphi^T K R_\varphi\,;$$

také víme, že pro matici rotace platí

$$R_\varphi^T = R_\varphi^{-1}.$$

Takže transformaci kuželosečky lze psát ve tvaru

$$\boxed{R_\varphi^{-1} K R_\varphi\,,}$$

což znamená hledat **Jordanův kanonický tvar** (teď by měla zaznít fanfára, zde se děje to klíčové). Jelikož je matice kuželosečky symetrická, je Jordanův kanonický tvar matice K diagonální (Jordanův

tvar s jedničkami mimo diagonálu by nebyl symetrickou maticí) a na diagonále jsou vlastní čísla. Takže: **najděme vlastní čísla matice K a budeme o kuželosečce vědět (skoro) vše podstatné.**

11.1.1 Invarianty – determinanty a vlastní čísla

Pozorování: Všimněme si, že vlastní čísla matice K se při rotaci nemění, protože podobné matice mají stejná vlastní čísla (dokonce mají stejný Jordanův kanonický tvar) a matice K a $R_\varphi^{-1} K R_\varphi$ skutečně podobné jsou. Můžeme tedy říci, že vlastní čísla λ_1 a λ_2 jsou invariantní vůči rotaci.

Pozorování: Všimněme si, že se také nemění $\det K$, a to ani při translaci

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

neboť $\det T = 1$, takže

$$\det(T^T K T) = \det T^T \cdot \det K \cdot \det T = 1 \cdot \det K \cdot 1 = \det K,$$

ani při rotaci

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

neboť $\det R_\varphi = 1$, takže

$$\det(R_\varphi^T K R_\varphi) = \det R_\varphi^T \cdot \det K \cdot \det R_\varphi = 1 \cdot \det K \cdot 1 = \det K.$$

Determinant matice kuželosečky je tedy také invariantem.

Pozorování: Všimněme si, že se nemění ani determinant matice kvadratických členů $\det A$ (zde má smysl ověřovat pouze invarianci vůči rotaci), neboť

$$\det(R_\varphi^T A R_\varphi) = \det R_\varphi^T \cdot \det A \cdot \det R_\varphi = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$= 1 \cdot \det A \cdot 1 = \det A.$$

Determinant matice kvadratických členů $\det A$ je tedy také invariantem.

Pozorování: Všimněme si, že se nemění ani hodnosti matic $h(K)$, $h(A)$, neboť se při translaci a rotaci násobí maticemi translace/rotace, což jsou regulární matice (jejich determinanty jsou rovny 1) a vynásobení regulární maticí hodnost původní matice nezmění.

11.2 Praktické provedení (u regulární kuželosečky)

Nyní využijeme invarianty (vlastní čísla, determinanty, hodnosti), které jsme našli v předchozí kapitole. Poslouží nám k pohodlnému nalezení odpovědí na následující otázky. Soustředit se budeme na regulární kuželosečky (tj. případ, kdy matice kuželosečky je regulární): elipsu, hyperbolu, parabolu.

Otázky: Mějme matici kuželosečky (kterou snadno sestavíme z rovnice kuželosečky). Jak z ní poznáme:

- o jakou kuželosečku se jedná,
- hodnoty základních charakteristik?

Dříve jsme odpovědi na obě otázky hledali pomocí transformace soustavy souřadnic. Nyní si tuto poměrně složitou cestu zjednodušíme.

Jak určit, o jakou kuželosečku se jedná?
Stačí určit hodnosti matic K (matice kuželosečky) a A (matice kvadratických členů) a jejich determinanty ($\Delta = \det K$ a $\delta = \det A$). Všechny možnosti jsou vypsány na první stránce stručného přehledu klasifikace kuželoseček na konci tohoto textu. Není třeba se jej složitě učit, stačí si uvědomit základní typy rovnic, představit si příslušnou matici a uvědomit si hodnosti i determinanty.
Pozor: pokud rovnice obsahuje člen s x^2, tak jeho koeficient a_{11} musí být kladný (není-li, tak celou rovnici vynásobíme -1). Pokud bychom to nedodrželi, tak by posloupnosti znamének determinantů nefungovaly tak pěkně, jak je to v přehledu klasifikace kuželoseček.

Pokud například vyjde, že obě matice jsou regulární, přičemž $\Delta > 0$ a $\delta < 0$, jedná se o hyperbolu, neboť po transformaci (posunutí, otočení, které nemusíme provádět), by diagonální matice dopadla nějak takto:

$$\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix},$$

což odpovídá rovnici hyperboly $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Předpokládáme totiž, že koeficient u x^2 je kladný, $\delta < 0$, takže na pozici $\{2, 2\}$ musí být (po transformacích, které neprovádíme) záporný prvek. Je-li celý $\Delta > 0$, tak musí být poslední prvek na diagonále záporný.

Jak určit základní charakteristiky zadané kuželosečky?
Matici kuželosečky K bychom měli převést na kanonický tvar. Ale vlastně to ani nemusíme dělat, protože jsme to provedli v rámci teorie a přesně víme, co by nám vyšlo pro daný typ kuželosečky. Stačí, když najdeme to podstatné: vlastní čísla matice kvadratických členů A a další konstanty, které jsou nutné k jednoznačnému nalezení rovnice zadané kuželosečky v kanonickém tvaru. Zde bude nejlepší, když vše uděláme zvlášť pro elipsu/hyperbolu a pro parabolu.

11.2.1 Elipsa a hyperbola

Cíl: Při standardní proceduře pomocí translace a rotace bychom převáděli rovnici elipsy/hyperboly na kanonický tvar: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$, tj. na tvar odpovídající rovnici známé ze střední školy. Matice této kuželosečky (v kanonickém tvaru) je

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že se jedná o

- **elipsu** právě tehdy, když mají (obě nenulová) λ_1 a λ_2 stejná znaménka a $c < 0$,
- **hyperbolu** právě tehdy, když mají (obě nenulová) λ_1 a λ_2 různá znaménka a $c \neq 0$.

Schematicky je to naznačeno ve stručném přehledu klasifikace kuželoseček na konci tohoto textu. Nenulovost λ_1, λ_2, c je zajištěna podmínkami kladenými na hodnosti matic: $h(K) = 3$, $h(A) = 2$.

Postup:

- Rotace se týká pouze kvadratických členů. Hledejme tedy pouze vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Jordanův kanonický tvar bude vypadat takto:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- Zbývá nalézt poslední prvek na hlavní diagonále c. Všimněme si, že

$$\delta = \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad \text{a} \quad \Delta = \det K = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot c = \det A \cdot c\,.$$

  Takže c vypočteme snadno:

$$\boxed{c = \frac{\det K}{\det A}\,.}$$

- Hlavní a vedlejší poloosu získáme porovnáním rovnice $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$ s kanonickou rovnicí $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.
- Souřadnice středu elipsy jsou řešením soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{23} \end{array}\right)$$

- Úhel otočení určíme ze vztahu

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\,.}$$

  Pokud by bylo $a_{11} = a_{22}$, tak bychom použili vztah s kotangens.

Příklad: Rozhodněte, o jakou kuželosečku se jedná a určete její charakteristiky.

$$3\,x^2 + 4\sqrt{3}\,xy + 7\,y^2 + 4\,(\sqrt{3} - 3)\,x + 2\,(7 - 4\sqrt{3})\,y - (17 + 8\,\sqrt{3}) = 0$$

Řešení: Matice kuželosečky je

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{3} & 2\,(\sqrt{3} - 3) \\ 2\sqrt{3} & 7 & 7 - 4\sqrt{3} \\ 2\,(\sqrt{3} - 3) & 7 - 4\sqrt{3} & -(17 + 8\,\sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

- Šikovným výpočtem pomocí Gaussovy eliminace získáme oba determinanty zároveň: $\Delta = \det K = -4 \cdot 9^2 < 0 \quad \text{a} \quad \delta = \det A = 9 > 0$. Jedná se tedy o elipsu.
- Vlastní čísla:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

  Vlastní čísla seřadíme podle velikosti (a první musí být kladné):

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 9\,.$$

- Hlavní a vedlejší poloosa, kanonická rovnice:

$$c = \frac{\det K}{\det A} = \frac{-4 \cdot 9^2}{9} = -4 \cdot 9$$

  Kanonická rovnice $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$ vychází $x^2 + 9y^2 - 4 \cdot 9 = 0$, neboli

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1\,.$$

  Poloosy tedy jsou: $a = 6$, $b = 2$.

- Úhel otočení:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{4\sqrt{3}}{3-7} = -\sqrt{3}\,,$$

  tj. $2\varphi = -60^\circ + k \cdot 180^\circ$, takže $\varphi = -30^\circ + k \cdot 90^\circ$. Elipsa je tedy otočena o -30°. (Varianta $-30^\circ + 90^\circ = 60^\circ$ odpovídá případu, kdybychom prohodili hlavní a vedlejší osu.)

- Souřadnice středu elipsy získáme řešením soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2\sqrt{3} & -2\,(\sqrt{3}-3) \\ 2\sqrt{3} & 7 & -(7-4\sqrt{3}) \end{array}\right),$$

  vychází $S = [2, -1]$.

Kapitola 12

Tečny a asymptoty

12.1 Tečna kuželosečky

Pozorujme tečny kuželoseček, jak byly odvozeny na střední škole. Pro připomenutí: tečna kuželosečky tam byla definována takto:

- pro případ elipsy: přímka, která má s elipsou jediný společný bod,
- pro případ hyperboly: přímka, která má s hyperbolou jediný společný bod, zároveň však není rovnoběžná s žádnou z jejích asymptot,
- pro případ paraboly: přímka, která má s parabolou jediný společný bod, zároveň však není rovnoběžná s její osou.

Rovnice tečen pak lze v každém z těchto případů odvodit z těchto podmínek. Jedná se však o dosti otravný úkol, jak je vidět z následujícího náznaku výpočtu pro případ elipsy.

12.1.1 Tečna elipsy – středoškolský přístup

Příklad: (spíše na podívání, jak je ten výpočet ošklivý) Tečna elipsy v jejím bodě $T = [x_0, y_0]$: je to přímka procházející bodem $T = [x_0, y_0]$, má tedy rovnici $y - y_0 = k(x - x_0)$. S elipsou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

má mít jediný společný bod $[x_0, y_0]$, což je podmínka, z níž odvodíme hodnotu směrnice k.

Hledejme tedy společný bod uvedené přímky a elipsy. Ten je řešením soustavy

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0), \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$

Dosaďme tedy $y = y_0 + k(x - x_0)$ do rovnice elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y_0 + k(x - x_0))^2}{b^2} = 1\,.$$

Ptáme se, pro jaké k má tato kvadratická rovnice s neznámou x jediné řešení. To nastane právě tehdy, když bude diskriminant roven nule. Upravme tuto kvadratickou rovnici:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{2y_0\,k(x - x_0) + k^2(x - x_0)^2}{b^2} = 1\,.$$

Bod $T = [x_0, y_0]$ je bodem elipsy, proto splňuje její rovnici $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Rovnice se tím malinko zjednoduší:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{2xky_0 - 2kx_0y_0 + k^2x^2 - 2xk^2x_0 + k^2x_0^2}{b^2} = 0\,.$$

Sdružme členy s x^2 a členy s x:

$$x^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right) + x \cdot \frac{2k}{b^2}\,(y_0 - kx_0) + \frac{k^2x_0^2 - 2kx_0y_0}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} = 0\,.$$

a vynásobme rovnici a^2b^2:

$$x^2 \cdot \left(b^2 + k^2a^2\right) + x \cdot 2ka^2\,(y_0 - kx_0) + x_0^2\,(a^2k^2 - b^2) - 2a^2kx_0y_0 = 0\,.$$

Tato kvadratická rovnice má jediné řešení právě tehdy, když je diskriminant nulový:

$$D = 4k^2a^4\,(y_0 - kx_0)^2 - 4 \cdot \left(b^2 + k^2a^2\right) \cdot \left(x_0^2\,(a^2k^2 - b^2) - 2a^2kx_0y_0\right) = 0\,.$$

Nyní bychom měli z této kvadratické rovnice vypočítat k:

$$4\,a^4\,y_0^2\,k^2 + 8\,a^2\,b^2\,x_0\,y_0\,k + 4\,b^4\,x_0^2 = 0$$

$$a^4\,y_0^2\,k^2 + 2\,a^2\,b^2\,x_0\,y_0\,k + b^4\,x_0^2 = 0$$

$$(a^2\,y_0\,k + b^2\,x_0)^2 = 0$$

$$k = -\frac{b^2\,x_0}{a^2\,y_0}$$

Dopočtěme tedy rovnici tečny elipsy v jejím bodě $T = [x_0, y_0]$:

$$y = y_0 + k(x - x_0) = y_0 - \frac{b^2\,x_0}{a^2\,y_0}(x - x_0).$$

Vynásobíme-li rovnici $\frac{y_0}{b^2}$, dostaneme

$$\frac{yy_0}{b^2} = \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{xx_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2},$$

přičemž modře zvýrazněné členy jsou dohromady rovny jedné ($[x_0, y_0]$ je totiž bodem elipsy, vyhovuje tedy její rovnici). Rovnice tečny elipsy v jejím bodě $T = [x_0, y_0]$ tedy vychází:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Pozorování: Tečnu t elipsy lze však ihned nalézt jednoduchou úvahou: tečna je přímka, takže je reprezentována lineární rovnicí, zároveň musí procházet bodem $T = [x_0, y_0]$, který je bodem elipsy. Stačí tedy v rovnici elipsy nahradit kvadratické členy lineárními:

$$t: \quad \frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} = 1,$$

a je rovnice tečny elipsy na světě. Dosadíme-li totiž za x a y souřadnice x_0 a y_0, vznikne rovnost

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

která potvrzuje, že bod $[x_0, y_0]$ leží nejen na elipse (to jsme předpokládali), ale i na přímce t, která je tedy tečnou, ověříme-li, že $[x_0, y_0]$ je skutečně jediným společným bodem této přímky a elipsy.

Ověřit to můžeme například sporem. Nechť je $[x_1, y_1]$ dalším průsečíkem této přímky a elipsy, který je různý od $[x_0, y_0]$. Potom tento bod leží na přímce, tj.:

$$\frac{x_1\, x_0}{a^2} + \frac{y_1\, y_0}{b^2} = 1$$

i na elipse:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Odečtením těchto dvou rovností dostaneme

$$\frac{(x_1 - x_0)\, x_1}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)\, y_1}{b^2} = 0.$$

Odečteme-li jiné dvě rovnosti ($[x_0, y_0]$ leží na elipse, $[x_1, y_1]$ leží na přímce), vyjde:

$$\frac{(x_1 - x_0)\, x_0}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)\, y_0}{b^2} = 0.$$

Oba body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$ (dle předpokladu různé) tedy leží nejen na přímce

$$\frac{x\, x_0}{a^2} + \frac{y\, y_0}{b^2} = 1,$$

ale také na další přímce

$$\frac{(x_1 - x_0)\, x}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)\, y}{b^2} = 0,$$

což není možné. □

Obdobně se postupuje v případě hyperboly a paraboly.

12.1.2 Rovnice tečny regulární kuželosečky obecně – analogie

Na základě analogie s rovnicemi tečen kuželoseček uváděnými na střední škole můžeme odvodit obecný tvar rovnice tečny kuželosečky s maticí K. Pro porovnání:

rovnice elipsy: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$ rovnice tečny elipsy v bodě $[x_0, y_0]$: $\dfrac{x\, x_0}{a^2} + \dfrac{y\, y_0}{b^2} = 1,$

zapsáno maticově:

$$(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad (x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Obecně:

Rovnice kuželosečky: rovnice tečny kuželosečky v bodě $[x_0, y_0]$:

$$(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad \boxed{(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,.}$$

Na základě analogie jsme tedy odhadli, že rovnice tečny t regulární kuželosečky s maticí K v jejím bodě $X_0 = (x_0, y_0, 1) \in K$ je

$$\boxed{t : X^T \cdot K \cdot X_0 = 0\,.}$$

Ověřme, že se skutečně jedná o tečnu, tj.:

1) bod dotyku X_0 je skutečně bodem přímky t,
2) jiný bod přímky t už na kuželosečce K neleží,
3) je splněna případná další podmínka kladená na tečnu (hyperbola, parabola).

První podmínku ověříme snadno: stačí dosadit bod X_0 do rovnice přímky t, dostaneme $X_0^T \cdot K \cdot X_0 = 0$, což platí (neboť bod X_0 je dle předpokladu bodem kuželosečky K), takže X_0 vyhovuje rovnici přímky t, je tedy jejím bodem.

Platnost druhé podmínky dokážeme sporem. Nechť je $X_1 = (x_1, y_1, 1)$ dalším průsečíkem přímky t a kuželosečky K, který je různý od $(x_0, y_0, 1)$. Potom tento bod leží:

$$\text{na přímce } t\text{, tj.: } X_1^T \cdot K \cdot X_0 = 0, \qquad \text{i na kuželosečce } K\text{: } X_1^T \cdot K \cdot X_1 = 0.$$

Zároveň však bod X_0 leží na přímce t i na kuželosečce K:

$$X_0^T \cdot K \cdot X_0 = 0.$$

V následujících výpočtech budeme pracovat s uspořádanými trojicemi jako maticemi, nebudeme tedy rozlišovat, zda se jedná o body, nebo vektory. Odečtením jednotlivých rovností dostáváme:

$$(X_1 - X_0)^T \cdot K \cdot X_0 = 0,$$

$$X_1^T \cdot K \cdot (X_1 - X_0) = 0.$$

Druhou rovnost transponujme ($K = K^T$, neboť je matice K symetrická):

$$(X_1 - X_0)^T \cdot K \cdot X_1 = 0.$$

Obě rovnosti (první a transponovanou druhou) porovnejme:

$$(X_1 - X_0)^T \cdot K \cdot X_0 = 0, \qquad (X_1 - X_0)^T \cdot K \cdot X_1 = 0.$$

Takže body X_0 a X_1 leží na přímce

$$(X_1 - X_0)^T \cdot K \cdot X = 0.$$

Jenže body X_0 a X_1 leží také na přímce t (rovnice je transponována):

$$X_0^T \cdot K \cdot X = 0,$$

což však není možné, protože by muselo být $(X_1 - X_0)^T = X_0^T$, neboli v souřadnicích

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0, 0) = (x_0, y_0, 1),$$

tyto dvě trojice se však nerovnají.

Třetí podmínka se týká pouze hyperboly a paraboly. U paraboly nesmí být přímka t rovnoběžná s osou paraboly, u hyperboly nesmí být přímka t rovnoběžná s žádnou z asymptot. Tyto podmínky lze poměrně snadno ověřit, potřebujeme však znát rovnici osy paraboly, resp. rovnici asymptoty hyperboly.

12.1.3 Rovnice tečny regulární kuželosečky obecně – sečna přejde v tečnu

V předchozí podkapitole jsme postupovali na základě analogie s rovnicemi tečen kuželoseček uváděnými na střední škole. Obecný tvar rovnice tečny kuželosečky s maticí K lze však odvodit přímo, na základě úvah podobných těm, které provádíme při hledání tečny v matematické analýze (sečna procházející body X_0, X_1 přechází při $X_1 \to X_0$ v tečnu v bodě X_0).

Mějme kuželosečku K s rovnicí $X^T \cdot K \cdot X = 0$ a dva body X_0, X_1, které této kuželosečce náleží, tj. platí pro ně

$$X_0^T \cdot K \cdot X_0 = 0, \quad X_1^T \cdot K \cdot X_1 = 0.$$

Přímka, která těmito dvěma body prochází, je sečnou kuželosečky K a má rovnici:

$$X = X_0 + t\,(X_1 - X_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tuto rovnici vynásobme zleva výrazem $X_0^T \cdot K$, aby co nejvíce členů vypadlo:

$$X_0^T \cdot K \cdot X = X_0^T \cdot K \cdot X_0 + t\,(X_0^T \cdot K \cdot X_1 - X_0^T \cdot K \cdot X_0).$$

Jelikož je bod X_0 bodem kuželosečky K, vyhovuje její rovnici, tj. $X_0^T \cdot K \cdot X_0 = 0$. Zbude tedy

$$X_0^T \cdot K \cdot X = t\,(X_0^T \cdot K \cdot X_1).$$

Nyní proveďme limitní přechod, tj. nechť $X_1 \to X_0$, čímž dostaneme rovnici tečny

$$X_0^T \cdot K \cdot X = t\,(X_0^T \cdot K \cdot X_0),$$

neboli (opět použijeme $X_0^T \cdot K \cdot X_0 = 0$) tečna kuželosečky K v jejím bodě X_0 má obecnou rovnici

$$\boxed{\text{tečna:} \quad X_0^T \cdot K \cdot X = 0.}$$

12.1.4 Problém charakterizace tečny pomocí jediného společného bodu s regulární kuželosečkou

Tečna elipsy má s elipsou jediný společný bod, zároveň je jedinou přímkou s touto vlastností. Jinak je tomu v eukleidovské rovině s parabolou a hyperbolou. Parabola má jediný společný bod nejen s tečnou, ale i s přímkou rovnoběžnou s její osou. Hyperbola má jediný společný bod s tečnou a s přímkou rovnoběžnou s asymptotou. Pokud bychom tedy chtěli charakterizovat tečnu paraboly a hyperboly, museli bychom vyloučit uvedené případy.

Pokud bychom kuželosečky uvažovali v projektivní rovině (přesněji v projektivním rozšíření eukleidovské roviny, tj. v eukleidovské rovině doplněné o přímku nevlastních bodů), tak by nebylo potřeba případ rovnoběžky s osou paraboly a rovnoběžky s asymptotou hyperboly nebylo potřeba vylučovat. Rovnoběžka s osou paraboly by totiž měla s parabolou jeden průsečík vlastní a jeden nevlastní (ten by byl zároveň průsečíkem osy paraboly a rovnoběžky s ní). A rovnoběžka s asymptotou hyperboly by také měla s hyperbolou dva průsečíky: kromě vlastního i jeden nevlastní – společný bod asymptoty a hyperboly, který by byl zároveň průsečíkem asymptoty hyperboly a rovnoběžky s ní. Není tedy třeba činit žádné výjimky, ani rozlišovat jednotlivé regulární kuželosečky.

V uvedené projektivní rovině je tedy možno *tečnu regulární kuželosečky* definovat elegantně jako *přímku, s níž má tato kuželosečka jediný společný bod.*

Je však třeba upozornit, že tato elegantní charakterizace tečny regulární kuželosečky by nebyla možná, pokud by regulární kuželosečky nebyly křivkami speciálního tvaru. Jen si představme např. tečnu grafu funkce sinus v bodě $\left[\frac{\pi}{2}; 1\right]$, která by měla s touto sinusoidou nekonečně mnoho společných bodů $\left\{\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 1\right],\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

12.1.5 Rovnice tečny regulární kuželosečky obecně – jediný společný bod

V předchozí kapitole jsme pozorovali, že s ohledem na tvar regulárních kuželoseček můžeme jejich tečnu charakterizovat i bez použití limity. Tato charakterizace neobsahuje výjimky, pohybujeme-li se v projektivním rozšíření eukleidovské roviny, tj. uvažujeme-li také nevlastní body. Za tečnu regulární

kuželosečky $X^T \cdot K \cdot X = 0$ v jejím bodě X_0 pak můžeme považovat přímku, která má s touto kuželosečkou jediný společný bod, kterým je právě X_0.

Mějme tedy kuželosečku K s rovnicí $X^T \cdot K \cdot X = 0$ a bod $X_0 \in K$, který leží na této kuželosečce, tj. platí pro něj:

$$X_0^T \cdot K \cdot X_0 = 0.$$

Přímka, která tímto bodem prochází, má parametrické vyjádření

$$t\colon X = X_0 + s\,\vec{u}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Najděme společné body kuželosečky K a přímky t, tj. dosaďme za X do rovnice kuželosečky K:

$$(X_0 + s\,\vec{u})^T \cdot K \cdot (X_0 + s\,\vec{u}) = 0.$$

Levou stranu rozepíšeme (využijeme toho, že ze symetričnosti matice K plyne: $\vec{u}^T \cdot K \cdot X_0 = X_0^T \cdot K \cdot \vec{u}$):

$$(X_0 + s\,\vec{u})^T \cdot K \cdot (X_0 + s\,\vec{u}) = X_0^T \cdot K \cdot X_0 + s\,2\,X_0^T \cdot K \cdot \vec{u} + s^2\,\vec{u}^T \cdot K \cdot \vec{u}$$

a dostaneme tak ($X_0^T \cdot K \cdot X_0 = 0$) kvadratickou rovnici s neznámou s:

$$s\,2\,X_0^T \cdot K \cdot \vec{u} + s^2\,\vec{u}^T \cdot K \cdot \vec{u} = 0,$$

neboli

$$s \cdot \left(2\,X_0^T \cdot K \cdot \vec{u} + s\,\vec{u}^T \cdot K \cdot \vec{u}\right) = 0,$$

Jelikož hledáme přímku t, která by měla s kuželosečkou K jediný průsečík, ptáme se, kdy má tato kvadratická rovnice jediný dvojnásobný kořen. Jeden kořen je přitom zřejmý: $s_1 = 0$. Druhý kořen s_2 tedy musí být také roven nule, tj. musí být

$$2\,X_0^T \cdot K \cdot \vec{u} + s\,\vec{u}^T \cdot K \cdot \vec{u} = 0.$$

Tato lineární rovnice s neznámou s má jediný kořen rovný nule právě tehdy, když

$$X_0^T \cdot K \cdot \vec{u} = 0.$$

Obecnou rovnici tečny z jejího parametrického vyjádření nyní najdeme tak, že jej vynásobíme zleva vektorem $X_0^T \cdot K$:

$$t\colon X = X_0 + s\,\vec{u}, \quad s \in \mathbb{R}, \qquad \Big/\; X_0^T \cdot K \cdot,$$

dostaneme tak

$$t\colon X_0^T \cdot K \cdot X = X_0^T \cdot K \cdot X_0 + s\,X_0^T \cdot K \cdot \vec{u}.$$

Jelikož je $X_0^T \cdot K \cdot X_0 = 0$ i $X_0^T \cdot K \cdot \vec{u} = 0$, tak se předchozí rovnice velmi zjednoduší a vznikne obecná rovnice tečny regulární kuželosečky K v jejím bodě $X_0 \in K$:

$$\boxed{t\colon X_0^T \cdot K \cdot X = 0.}$$

12.2 Rovnice asymptot hyperboly

Díky homogenním souřadnicím, které umožňují zapsat i nevlastní body, je úkol snadný: stačí si uvědomit, že *asymptota hyperboly je tečnou hyperboly v jejím nevlastním bodě.*

Představa je zde názorná: pokud se posouváme s bodem po hyperbole „čím dál tím dále“ směrem k nevlastnímu bodu hyperboly, tečna v tomto bodě se stále více přibližuje jedné z asymptot.

Jelikož je rovnice tečny v bodě $X_0 \in K$ ve tvaru $t : X^T \cdot K \cdot X_0 = 0$, neboli v souřadnicích:

$$t : (x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,,$$

je rovnice asymptoty as ve tvaru:

$$\boxed{as : (x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,,}$$

kde $(x_0, y_0, 0)$ je nevlastním bodem hyperboly. Ten najdeme snadno z podmínky, že je to bod hyperboly, tj.:

$$(x_0, y_0, 0) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,,$$

což lze, vzhledem k nulovosti poslední souřadnice, zredukovat na rovnici obsahující pouze matici kvadratických členů:

$$(x_0, y_0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Příklad: Najděte asymptoty hyperboly $2xy = 3$.
Řešení: Matice této hyperboly je

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

matice kvadratických členů:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hledejme nevlastní body:

$$(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0\,,$$

tj.

$$(y_0, x_0) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0\,,$$

odkud dostáváme rovnici

$$2x_0y_0 = 0\,.$$

Vychází tak nevlastní body: $(c_1, 0, 0)$ a $(0, c_2, 0)$.
Pozor: souřadnice $(c_1, 0, 0)$ určují pro libovolné $c_1 \neq 0$ stále tentýž nevlastní bod. Stačí si připomenout geometrickou interpretaci homogenních souřadnic a představit si vektor, který „ukazuje rovnoběžně s původní rovinou směrem do nekonečna“: nezáleží na tom, zda místo něho vezmeme libovolný jeho nenulový násobek, nevlastní bod je určen směrem (jednorozměrným podprostorem), ne jen jeho jediným konkrétním generátorem. A teď trošku přesněji: bod X byl na obrázku u homogenních souřadnic reprezentován libovolným nenulovým vektorem (s počátečním bodem v počátku P'), tj. vektorem ležícím na přímce $P'X$ (v obrázku červeně), záleží tedy na směru, nikoli na konkrétním vektoru, který jej určuje.

Pro jednoduchost zvolme například $c_1 = c_2 = 1$ (volba nemá na výsledné rovnice asymptot vliv). Potom nevlastní body mají jednoduché homogenní souřadnice $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$. Rovnice příslušných asymptot pak vycházejí:

$$as_1\colon\ (x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad as_2\colon\ (x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Po vynásobení:

$$as_1\colon\ \ y = 0, \qquad as_2\colon\ \ x = 0.$$

□

V této kapitole jsme úspěšně našli nevlastní body hyperboly. Nejsou to jen „nějaké neužitečné body v nekonečnu“, potřebovali jsme je k nalezení asymptoty hyperboly. Možná už také tušíme, že i osa paraboly má něco společného s nevlastními body. Pojďme je tedy najít obecně.

12.3 Nevlastní body regulárních kuželoseček

Zavedení homogenních souřadnic nám umožňuje pracovat s nevlastními body. U elipsy bychom očekávali, že nebude mít žádný nevlastní bod (je to uzavřená křivka), u hyperboly bychom čekali dva (pozor, ne čtyři), u paraboly jeden (parabolu si tak můžeme představit jako elipsu, jejíž jeden vrchol pošleme po hlavní ose do nekonečna – tento „vrchol v nekonečnu“ je nevlastním bodem paraboly).

K čemu nám nevlastní body budou?

- U hyperboly jsme je využili k nalezení asymptot, což byly tečny hyperboly v nevlastních bodech. Jelikož má hyperbola dva nevlastní body, můžeme očekávat dvě asymptoty.
- U paraboly využijeme souřadnice nevlastního bodu k nalezení její osy, což je přímka procházející vrcholem paraboly a její nevlastní bod je nevlastním bodem paraboly.

12.3.1 Hledání nevlastních bodů

Nevlastní body $(x_0, y_0, 0)$ kuželosečky jsou jejími body, takže musí vyhovovat její rovnici:

$$(x_0, y_0, 0) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Jelikož je poslední souřadnice nulová, tak se v tomto součinu neobjeví prvky matice K, které jsou ve třetím řádku a třetím sloupci. Stačí tedy pracovat s maticí kvadratických členů A:

$$(x_0, y_0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Všechny výpočty se podstatně zjednoduší, pokud si vše budeme představovat na rovnici kuželosečky po transformaci na kanonický tvar.

Nevlastní body elipsy (rovnice v kanonickém tvaru)

Řešme rovnici (pro jednoduchost je matice A už přímo v kanonickém tvaru):

$$(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0\,,$$

neboli

$$\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 = 0\,.$$

Jedná se o elipsu, jsou-li obě vlastní čísla λ_1, λ_2 kladná. Za těchto podmínek však rovnice nemá žádné reálné řešení. Elipsa tedy nemá žádné (reálné) nevlastní body.

Nevlastní body hyperboly (rovnice v kanonickém tvaru)

Výpočet je stejný, jako u elipsy, v rovnici

$$\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 = 0$$

však vystupují vlastní čísla, která mají navzájem různá znaménka ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 < 0$. Za těchto podmínek má rovnice nekonečně mnoho řešení, která tvoří dva jednorozměrné vektorové podprostory. Můžeme tedy očekávat dva nevlastní body.

$$(\sqrt{\lambda_1}\, x_0 - \sqrt{-\lambda_2}\, y_0) \cdot (\sqrt{\lambda_1}\, x_0 + \sqrt{-\lambda_2}\, y_0) = 0$$

$$y_0 = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}}\, x_0, \qquad y_0 = -\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}}\, x_0.$$

Množina všech řešení je

$$\left[\left(x_0,\ \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}}\, x_0\right)\right] \cup \left[\left(x_0,\ -\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}}\, x_0\right)\right],$$

neboli

$$\left[(\sqrt{-\lambda_2}\ x_0,\ \sqrt{\lambda_1}\ x_0)\right] \cup \left[(\sqrt{-\lambda_2}\ x_0,\ -\sqrt{\lambda_1}\ x_0)\right].$$

Hyperbola má tedy právě dva nevlastní body

$$(\sqrt{-\lambda_2}\ x_0,\ \sqrt{\lambda_1}\ x_0,\ 0)\,, \quad (\sqrt{-\lambda_2}\ x_0,\ -\sqrt{\lambda_1}\ x_0,\ 0)\,.$$

Souřadnice nevlastních bodů jsou jednoznačné až na nenulový násobek, takže také body se souřadnicemi

$$(\sqrt{-\lambda_2},\ \sqrt{\lambda_1},\ 0)\,, \quad (\sqrt{-\lambda_2},\ -\sqrt{\lambda_1},\ 0)$$

jsou nevlastními body zadané hyperboly.

SŠ: Pokud by hyperbola byla zadána rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

bylo by možno její nevlastní body zapsat například pomocí těchto souřadnic:

$$(\frac{1}{b},\ \frac{1}{a},\ 0)\,, \quad (\frac{1}{b},\ -\frac{1}{a},\ 0)\,,$$

případně lépe (po vynásobení ab):

$$(a, b, 0)\,, \quad (a, -b, 0)\,.$$

Směrnice obou asymptot jsou pak

$$\frac{b}{a} \qquad \text{a} \qquad -\frac{b}{a}$$

a jejich rovnice

$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{a} \qquad y = -\frac{b}{a}x\,.$$

Rovnice asymptot můžeme ještě upravit:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0\,.$$

Připomeňme si rovnici tečny hyperboly v bodě $[x_0, y_0, 1]$ uváděnou na střední škole:

$$t : \frac{x\, x_0}{a^2} + \frac{y\, y_0}{b^2} = 1\,.$$

Tečny v nevlastních bodech hyperboly $(a, b, 0)$ a $(a, -b, 0)$ pak budou mít rovnice

$$t_1 = as_1 :\ \frac{x\, a}{a^2} + \frac{y\, b}{b^2} = 0 \qquad \text{a} \qquad t_2 = as_2 :\ \frac{x\, a}{a^2} + \frac{y\,(-b)}{b^2} = 0\,,$$

neboli

$$t_1 = as_1 :\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \qquad \text{a} \qquad t_2 = as_2 :\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0\,.$$

Nevlastní bod paraboly $\lambda_1 x^2 + 2p'y = 0$ (rovnice v kanonickém tvaru)

Parabola má jedno vlastní číslo nenulové, druhé nulové. Matice A kvadratických členů tedy dává rovnici

$$(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0\,,$$

neboli

$$\lambda_1 x_0^2 = 0\,.$$

Tato rovnice má nekonečně mnoho řešení $x_0 = 0$, která tvoří jednorozměrný vektorový podprostor obsahující vektory $(0, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, neboli podprostor $[(0,1)]$. Parabola $\lambda_1 x^2 + 2p'y = 0$ má tedy jeden nevlastní bod $(0, 1, 0)$.

Pozorování: Právě jsme našli nevlastní bod paraboly: $(0, 1, 0)$. Všimněme si (známe to již ze SŠ), že vektor $(0, 1)$ je směrovým vektorem osy (její rovnice je $x = 0$) paraboly $\lambda_1 x^2 + 2p'y = 0$. To není náhoda: souřadnice směrového vektoru osy paraboly jsou skutečně rovny prvním dvěma složkám nevlastního bodu paraboly; jakmile najdeme naprosto obecně osu paraboly, tak to bude zřejmé.
Pro netrpělivé: nevlastní bod paraboly je „v nekonečnu ve směru osy“.

Asymptota paraboly $\lambda_1 x^2 + 2p'y = 0$

Jelikož má parabola $\lambda_1 x^2 + 2p'y = 0$, kde $\lambda_1 \neq 0$ a $p' \neq 0$, právě jeden nevlastní bod $(0, 1, 0)$, můžeme v něm nalézt rovnici tečny, neboli rovnici asymptoty paraboly:

$$as\colon\ \ (x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p' \\ 0 & p' & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Vynásobením matic postupně dostaneme:

$$as\colon\ \ (x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p' \end{pmatrix} = 0\,,$$

neboli rovnici $p' = 0$, což je spor, neboť jsme předpokládali, že $p' \neq 0$. Parabola v eukleidovské rovině tedy asymptotu nemá.

Jiná situace nastane, když budeme uvažovat projektivní rozšíření eukleidovské roviny, tj. eukleidovskou rovinu doplněnou o nevlastní body. Budeme tedy pracovat s homogenními souřadnicemi obecně, tj. (x, y, z), nebudeme se omezovat na $z = 1$ v případě vlastních bodů (tj. bodů eukleidovské roviny). Rovnice asymptoty pak bude

$$as\colon\ \ (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p' \\ 0 & p' & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

neboli po vynásobení matic:

$$as\colon\ \ (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p' \end{pmatrix} = 0\,,$$

což je vlastně rovnice $p'z = 0$, neboli $z = 0$. To je však rovnice přímky, jejíž všechny body mají poslední souřadnici nulovou, je tedy tvořena právě všemi nevlastními body. Tuto přímku proto nazýváme *nevlastní přímkou*. V projektivním rozšíření eukleidovského prostoru má tedy parabola právě jednu asymptotu, která je nevlastní přímkou:

$$as\colon\ \ z = 0\,.$$

Jak je tomu s existencí asymptoty paraboly?

- V „obyčejné“ eukleidovské rovině nevlastní body nejsou, **parabola tedy nemá asymptotu.**
- Připouštíme-li však v rovině i nevlastní body, tj. pracujeme-li v projektivním rozšíření eukleidovské roviny, **má parabola právě jednu asymptotu:** je jí nevlastní přímka, tvoří ji právě všechny nevlastní body projektivně rozšířené roviny, má rovnici $z = 0$ (proto ji v „obyčejné“ eukleidovské rovině „nevidíme“).

U hyperboly tento problém nevzniká, asymptoty vyšly jako „obyčejné“, tedy vlastní, přímky. Existují tedy již v eukleidovské rovině; samozřejmě existují i v projektivním rozšíření eukleidovské roviny a jsou to stále tytéž vlastní přímky.

U elipsy je situace jiná: při hledání nevlastních bodů elipsy (tj. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$) jsme došli k rovnici

$$\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 = 0\,,$$

která však nemá žádné reálné řešení různé od $(0, 0)$. Má však řešení v komplexním oboru, elipsa má tedy v komplexním rozšíření právě dva nevlastní body, v nichž bychom mohli nalézt rovnice tečen a získat tak asymptoty elipsy. V reálné eukleidovské rovině ani v jejím projektivním rozšíření však elipsa nevlastní body (tedy ani asymptoty) nemá.

Nevlastní bod paraboly $(x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ **(rovnice v obecném tvaru)**

Parabola má jedno vlastní číslo nenulové, druhé nulové. Matice A kvadratických členů tedy dává rovnici

$$(x_0, y_0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0\,,$$

Co znamená, že vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ je vlastním vektorem matice A příslušným vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$?

$$A\vec{v} = 0 \cdot \vec{v}, \qquad \text{tj.} \quad A\vec{v} = \vec{o}.$$

Vlastní vektor $\vec{v}$ je tedy řešením homogenní soustavy $A\vec{v} = \vec{o}$. Všimněme si, že vlastní vektor $\vec{v}$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$ také vyhovuje rovnici

$$\vec{v}^T \cdot A \cdot \vec{v} = 0\,,$$

neboť

$$\vec{v}^T \cdot (A \cdot \vec{v}) = \vec{v}^T \cdot \vec{o} = 0.$$

Takže jsme ověřili, že vlastní vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$ vyhovuje rovnici $\vec{v}^T \cdot A \cdot \vec{v} = 0$, takže parabola $(x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ má (jediný) nevlastní bod:

$$\boxed{(v_1, v_2, 0).}$$

Kapitola 13

Další prvky kuželoseček

13.1 Osa paraboly

Osa paraboly K je definována jako přímka, podle níž je parabola osově souměrná. To splňuje přímka s rovnicí:[1]

$$\boxed{\text{osa}: \quad (x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,}$$

kde u_1, u_2 jsou souřadnice vlastního vektoru $\vec{u}$ matice A příslušného vlastnímu číslu $\lambda_1 \neq 0$. Průsečík paraboly a její osy se nazývá *vrchol*.

Důkaz:

Ověřme nyní, že rovnice v rámečku skutečně určuje přímku, která je osou souměrnosti paraboly. Vezměme libovolný bod $X = (x, y, 1)$, který leží na parabole K, tj. $X^T \cdot K \cdot X = 0$, a bod Y ležící na ose $(x, y, 1) \cdot K \cdot (u_1, u_2, 0)^T = 0$ takový, aby byl vektor $X - Y$ na osu kolmý, což nastane, pokud budou vektory $X - Y$ a $\vec{u}$ (normálový vektor osy) lineárně závislé, tj. musí existovat $c \neq 0$ takové, že $X - Y = c \cdot \vec{u}$.

Obraz bodu X v osové souměrnosti s osou $Y^T \cdot K \cdot \vec{u} = 0$ označme X', potom musí platit:

$$X = Y + (X - Y) \quad \text{a} \quad X' = Y - (X - Y).$$

[1] Kdyby někdo chtěl „vidět“ tuto rovnici hned: na parabolu můžeme nahlížet jako na elipsu, jejíž jeden hlavní vrchol je v nekonečnu. Tento bod je nevlastním bodem paraboly. Díky homogenním souřadnicím máme možnost zapsat jeho souřadnice: $(v_1, v_2, 0)$, kde v_1, v_2 jsou taková, že vektor (v_1, v_2) je vlastním vektorem matice kvadratických členů A příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$).

Rovnici tečny v nevlastním bodě $(v_1, v_2, 0)$

$$t: \quad (x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

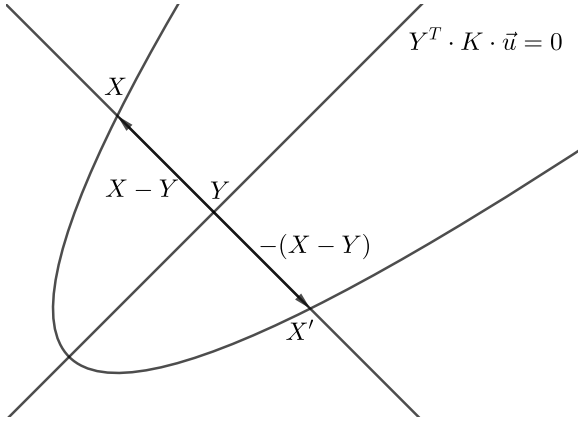
můžeme využít k nalezení něčeho hmatatelnějšího: osy paraboly. Ta by měla být na tečnu v nevlastním bodě $(v_1, v_2, 0)$ kolmá (stále si představujme analogii s elipsou) a měla by nevlastním bodem $(v_1, v_2, 0)$ procházet.

Nyní si stačí připomenout, že vlastní vektory jsou na sebe kolmé, takže kolmým vektorem k vlastnímu vektoru (v_1, v_2) bude vlastní vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ matice A příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 \neq 0$ ($A\,\vec{u} = \lambda_1\,\vec{u}$, proto $K \cdot (u_1, u_2, 0)^T = (\lambda_1 u_1, \lambda_1 u_2, c)^T$).

Rovnice osy paraboly je tedy na světě: přímka s rovnicí v rámečku je skutečně osou paraboly, neboť je kolmá na tečnu v nevlastním bodě a zároveň tímto bodem $(v_1, v_2, 0)$ prochází, protože

$$(v_1, v_2, 0) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0;$$

tuto rovnost stačí přepsat do tvaru $(v_1, v_2, 0) \cdot (\lambda_1 u_1, \lambda_1 u_2, c)^T$, což je vzhledem ke kolmosti $\vec{u}$ a $\vec{v}$ rovno nule.



Máme dokázat:

$$\boxed{X \in K \quad \Longrightarrow \quad X' \in K.}$$

Přepišme tuto implikaci:

$$X^T \cdot K \cdot X = 0 \quad \Longrightarrow \quad X'^T \cdot K \cdot X' = 0$$

a dosaďme za X i X':

$$[Y + (X - Y)]^T \cdot K \cdot [Y + (X - Y)] = 0 \quad \Longrightarrow \quad [Y - (X - Y)]^T \cdot K \cdot [Y - (X - Y)] = 0.$$

Oba výrazy na levých stranách upravme:

$$[Y + (X - Y)]^T \cdot K \cdot [Y + (X - Y)] = Y^T \cdot K \cdot Y + 2\,Y^T \cdot K \cdot (X - Y) + (X - Y)^T \cdot K \cdot (X - Y),$$

$$[Y - (X - Y)]^T \cdot K \cdot [Y - (X - Y)] = Y^T \cdot K \cdot Y - 2\,Y^T \cdot K \cdot (X - Y) + (X - Y)^T \cdot K \cdot (X - Y).$$

Vidíme, že oba výrazy se liší jediným znaménkem, a to u členu

$$Y^T \cdot K \cdot (X - Y).$$

Ten je však nulový, takže jsou si oba výrazy rovny. Proč je nulový? Jelikož je $X - Y = c \cdot \vec{u}$, můžeme levou stranu upravit:

$$Y^T \cdot K \cdot (X - Y) = c \cdot Y^T \cdot K \cdot \vec{u};$$

bod Y leží na ose $Y^T \cdot K \cdot \vec{u} = 0$, takže je tento výraz skutečně nulový. Ověřili jsme tak, že jsou si oba výrazy rovny:

$$X^T \cdot K \cdot X = X'^T \cdot K \cdot X',$$

takže platí, že je-li jeden z nich roven nule, je roven nule i druhý:

$$X^T \cdot K \cdot X = 0 \quad \Longrightarrow \quad X'^T \cdot K \cdot X' = 0,$$

tudíž bod X' souměrný podle osy $Y^T \cdot K \cdot \vec{u} = 0$ s bodem $X \in K$ je také bodem paraboly K. $\square$

Příklad: Najděte **osu** paraboly $x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 8 = 0$.
Řešení: Najdeme nenulové vlastní číslo λ_1 matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

tj. kořen charakteristické rovnice $\det(A - \lambda E) = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0$. Vychází $\lambda_1 = 2$, příslušný vlastní vektor je řešením homogenní soustavy s maticí $A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Řešením je jednorozměrný

podprostor $[(1,-1)]$, takže vlastní vektor příslušný nenulovému vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$ je například $\vec{u} = (1,-1)$.

Rovnice osy

$$\text{osa}: \quad (x,y,1)\cdot K \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

paraboly K tedy vychází:

$$(x,y,1)\cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{neboli} \quad (x,y,1)\cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0,$$

po vydělení rovnice číslem 2:

$$\text{osa:} \quad y = x + 1.$$

Vrchol této paraboly teď můžeme najít dle definice jako průsečík paraboly a její osy; rovnice paraboly je $(x-y)^2 - 4y + 8 = 0$, rovnice osy $x - y = -1$. Dosazením jedné rovnice do druhé dostáváme rovnici $(-1)^2 - 4y + 8 = 0$, tj. $y = \frac{9}{4}$; z rovnice osy pak $x = y - 1 = \frac{5}{4}$. Vrchol paraboly je tedy $V = [\frac{5}{4}, \frac{9}{4}]$.

Pozorování: Vrchol paraboly je definovaný jako průsečík paraboly a její osy. Všimněme si, že tyto průsečíky jsou dva: jeden odpovídá vrcholu paraboly, jak jej známe ze střední školy, druhý bod, který vyhovuje podmínce z definice vrcholu, je nevlastní bod paraboly. Parabola má tedy jeden vlastní vrchol a jeden nevlastní vrchol.

KONEC ZVONEC

Část III

Přehledy

Kapitola 14

Metrická klasifikace kuželoseček

Označení

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Matice kuželosečky: $K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Diskriminant kuželosečky: $\Delta = \det K$

Diskriminant kvadratických členů: $\delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$

Dá se dokázat, že ke každé kuželosečce v eukleidovské rovině $\mathbb{E}_2$ existuje taková kartézská soustava souřadnic, vzhledem k níž má jednu z následujících rovnic.

14.1 Regulární kuželosečky $\quad h(K) = 3, \quad$ tj. $\Delta \neq 0$

- $h(A) = 2$: **středové** ($\delta \neq 0$): $\quad \delta > 0$ elipsa $\quad \delta < 0$ hyperbola

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ imaginární elipsa (prázdná množina) $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \delta > 0, \quad \Delta > 0$

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ reálná elipsa $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \delta > 0, \quad \Delta < 0$

3. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hyperbola $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \delta < 0$

- $h(A) = 1$: **nestředové** ($\delta = 0$)

4. $x^2 \pm 2py = 0$ parabola $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm p \\ 0 & \pm p & 0 \end{pmatrix}$ nebo $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm p \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm p & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \delta = 0, \Delta < 0$

Ve všech případech jsou a, b i p kladná reálná čísla.

14.2 Singulární kuželosečky $\quad h(K) < 3, \quad$ tj. $\Delta = 0$

• $\delta \neq 0$: **různoběžky** ($h(K) = 2$, $h(A) = 2$)

1. $x^2 + k^2y^2 = 0$ bod $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\delta > 0$ (dvojice komplexně sdružených různoběžných přímek s reálným průsečíkem)

2. $x^2 - k^2y^2 = 0$ dvojice reálných různoběžných přímek $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\delta < 0$

• $\delta = 0$: **rovnoběžky** ($h(A) = 1$)

- různé ($h(K) = 2$)

3. $x^2 + r^2 = 0$ prázdná množina $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + \end{pmatrix}$ (dvojice komplexně sdružených (různých) rovnoběžných přímek)

4. $x^2 - r^2 = 0$ dvojice (reálných) různých rovnoběžek $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix}$

- splývající ($h(K) = 1$)

5. $x^2 = 0$ přímka $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (dvě splývající rovnoběžky)

Ve všech případech jsou k i r kladná reálná čísla.

Kdybychom pracovali v projektivním rozšíření eukleidovské roviny a používali homogenní souřadnice, dostali bychom ještě další dva typy:

- $xz = 0$ (vlastní a nevlastní přímka)
- $z^2 = 0$ (dvojnásobná nevlastní přímka)

14.3 Výpočet jednotlivých prvků kuželoseček

úhel otočení: $\operatorname{cotg} 2\varphi = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$ nebo $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$

Elipsa, hyperbola

$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$

$$\det K = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = c\lambda_1\lambda_2 \quad \text{a} \quad \det A = \lambda_1\lambda_2, \quad \text{tj.} \quad c = \frac{\det K}{\det A}$$

Odtud pak dopočteme a, b porovnáním s kanonickou rovnicí $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Souřadnice středu jsou řešením soustavy $\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{23} \end{array}\right)$.

Parabola

$\lambda_1 x^2 + 2p'y = 0$

$$\det K = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p' \\ 0 & p' & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_1 p'^2 \quad \text{tj.} \quad p'^2 = \frac{-\det K}{\lambda_1} \quad p = \frac{p'}{\lambda_1}$$

vlastní číslo $\lambda_1 \neq 0$, příslušný vlastní vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$,
vlastní číslo $\lambda_2 = 0$, příslušný vlastní vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$

rovnice osy paraboly: $(x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

vrchol V je průsečíkem paraboly a její osy ohnisko: $F = V + \dfrac{1}{2} p \dfrac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$

Tečna kuželosečky

v jejím bodě $[x_0, y_0] \in K$: $(x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Asymptoty hyperboly

Asymptota hyperboly je vlastně tečnou v nevlastním bodě hyperboly.

$$(x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{kde} \quad (x_0, y_0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$$

Kapitola 15

Afinní a projektivní klasifikace kuželoseček

15.1 Afinní klasifikace

Afinní klasifikace je prakticky stejná jako klasifikace metrická, jen nemusíme zachovávat hodnoty jednotlivých parametrů (a, b, p, k, r) a můžeme je normovat na jedničku. Je tomu tak proto, že transformace rovnic kuželoseček na kanonický tvar neprovádíme pouze pomocí shodností (postačují posunutí a otočení), ale obecněji pomocí afinit.

Dá se dokázat, že ke každé kuželosečce v afinní rovině $\mathbb{A}_2$ existuje taková lineární soustava souřadnic, vzhledem k níž má jednu z následujících rovnic.

Regulární kuželosečky $\quad h(K) = 3, \quad$ tj. $\Delta \neq 0$

- $h(A) = 2$: **středové** $(\delta \neq 0)$: $\qquad \delta > 0$ elipsa $\qquad \delta < 0$ hyperbola

1. $x^2 + y^2 = -1$ imaginární elipsa (prázdná množina) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \delta > 0, \quad \Delta > 0$

2. $x^2 + y^2 = 1$ reálná elipsa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \delta > 0, \quad \Delta < 0$

3. $x^2 - y^2 = 1$ hyperbola $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \delta < 0$

- $h(A) = 1$: **nestředové** $(\delta = 0)$

4. $x^2 + 2y = 0$ parabola $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm p \\ 0 & \pm p & 0 \end{pmatrix}$ nebo $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \delta = 0, \Delta < 0$

Singulární kuželosečky $\quad h(K) < 3, \quad$ tj. $\Delta = 0$

- $\delta \neq 0$: **různoběžky** $(h(K) = 2, h(A) = 2)$

1. $x^2 + y^2 = 0$ bod $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \delta > 0$ (dvojice komplexně sdružených různoběžných přímek s reálným průsečíkem)

2. $x^2 - y^2 = 0$ dvojice reálných různoběžných přímek $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\delta < 0$

• $\delta = 0$: **rovnoběžky** ($h(A) = 1$)

- různé ($h(K) = 2$)

3. $x^2 + 1 = 0$ prázdná množina $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (dvojice komplexně sdružených (různých) rovnoběžných přímek)

4. $x^2 - 1 = 0$ dvojice (reálných) různých rovnoběžek $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- splývající ($h(K) = 1$)

5. $x^2 = 0$ přímka $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (dvě splývající rovnoběžky)

Kdybychom pracovali v projektivním rozšíření afinní roviny a používali homogenní souřadnice, dostali bychom ještě další dva typy:

- $xz = 0$ (vlastní a nevlastní přímka)
- $z^2 = 0$ (dvojnásobná nevlastní přímka)

15.2 Projektivní klasifikace

Projektivní klasifikaci pouze naznačíme. Rovnice budeme zapisovat v homogenních souřadnicích; dostaneme tak tzv. normální rovnice kuželoseček či *normální tvar* rovnic kuželoseček; příslušný repér pak nazýváme normovaná polární báze.

Regulární kuželosečky

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ imaginární regulární kuželosečka (prázdná množina reálných bodů)
2. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ reálná regulární kuželosečka

Singulární kuželosečky

3. $x^2 + y^2 = 0$ dvojice komplexně sdružených přímek (singulární kuželosečka hodnosti 2)
4. $x^2 - y^2 = 0$ dvojice reálných přímek (singulární kuželosečka hodnosti 2)
5. $x^2 = 0$ jedna reálná dvojnásobná přímka (singulární kuželosečka hodnosti 1)

Kapitola 16

Literatura

[Bal] Baltus Ch.: *Collineations and Conic Sections. An Introduction to Projective Geometry in its History.* Springer, 2020.

[Beč] Bečvář J.: *Měření kruhu.* In Halas Z. (ed.), *Archimédés, několik pohledů do jeho života a díla.* Matfyzpress, Praha, 2012, str. 45–53.
[Dostupné z http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/402371]

[Cool] Coolidge J. L.: *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces.* Oxford University Press, Oxford, 1945.

[Hal] Halas Z.: *Aplikace matematiky v běhu věků.* In A. Slavík (ed.), *Matematika a reálný svět.* Matfyzpress, Praha, 2012, str. 93–98.
[Dostupné z http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/konference2012/sbornik.pdf]

[JaSe] Janyška, J., Sekaninová, A.: *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik.* Brno, 2013.
[Dostupné z https://www.math.muni.cz/~vondra/ums/kuakv/skripta.pdf]

[Nos] Nosek M., Brož M. (eds.): *Sluneční hodiny na pevných stanovištích.* Academia, Praha, 2004.

[Pe] Pech P.: *Kuželosečky.* České Budějovice, 2004.
[Dostupné z https://katedry.pf.jcu.cz/kma/pro-studenty/materialy-pro-studenty/]

[PPG] Richter-Gebert J.: *Perspectives on Projective Geometry. A Guided Tour Through Real and Complex Geometry.* Springer, 2011.

[Šír] Šír Z.: *Řecké matematické texty.* OIKOYMENH, Praha, 2011.

[Tal] Taliaferro R. C.: *Apollonius of Perga, Conics.* Books I–III, Green Lion Press, Santa Fe, 2000.

[UC2] Glaeser G., Stachel H., Odehnal B.: *The Universe of Conics. From the Ancient Greeks to 21st Century Developments.* Second edition, Springer, 2024.