

Poznámky k historii kuželoseček

Zdeněk Halas

Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova

Co vedlo ke zkoumání řezů kuželové plochy?

Co vedlo ke zkoumání řezů kuželové plochy?

Různé otázky

Proč zkoumat řezy kuželové plochy

vedeme řezy kuželovou plochou, vzniknou speciální křivky
Proč chceme zkoumat takovéto řezy?

Názvy „elipsa, parabola, hyperbola“

Odkud se tyto názvy vzaly?

Jak souvisejí se pojmy známými z češtiny?

Planimetrické definice kuželoseček

Jak souvisí tyto definice s řezy kuželové plochy?

výhoda: pohodlněji se s těmito definicemi pracuje

Co vedlo ke zkoumání řezů kuželové plochy?

Kuželosečky a sluneční hodiny

starší typy slunečních hodin

gnómón (svislý obelisk): délka stínu – velmi nepřesné
(délka stínu se v průběhu roku mění)

Egypt + Mezopotámie → Řecko

skafé: horizontální duté polokulové sluneční hodiny

Řecko 7. stol. př. Kr.

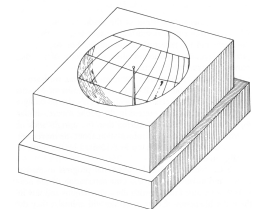
zemská rotace

náročná výroba

rovinné sluneční hodiny

snadná výroba

problém: datové čáry



Rovinné sluneční hodiny – datové čáry

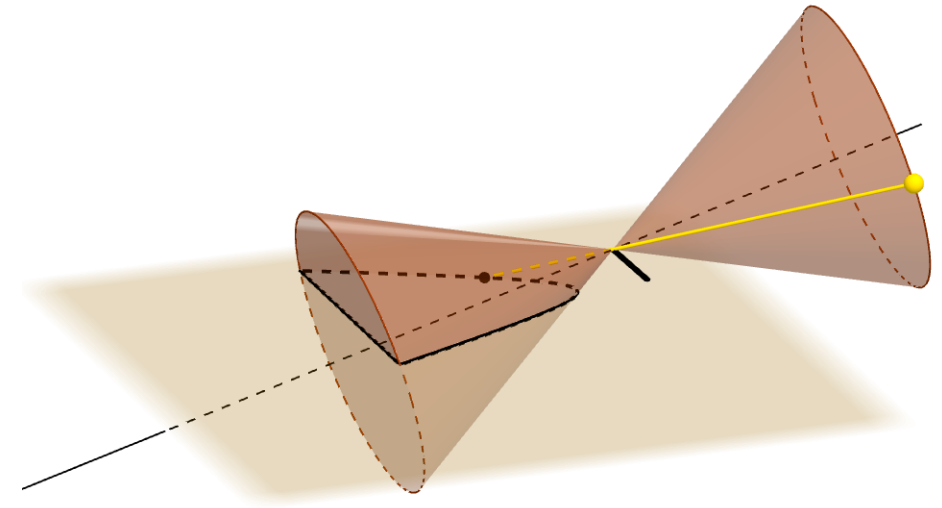
První rovinné sluneční hodiny – Egypt, 4. stol. př. Kr.
(vytvářeny experimentálně)

Problém datové čáry: po jaké křivce se pohybuje konec stínu ukazatele v průběhu daného dne v roce?

- ▶ Slunce se v průběhu dne zdánlivě pohybuje po kružnici
- ▶ špička ukazatele – bod
- ▶ spojením vznikne kuželová plocha
- ▶ jejím průnikem s rovinou číselníku je tedy nutně kuželosečka

V našich zeměpisných šířkách vesměs hyperboly.

Rovinné sluneční hodiny – datové čáry



Rovinné sluneční hodiny – datové čáry

Výška Slunce se na obloze v průběhu roku mění

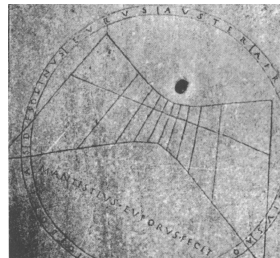
⇒

je možno postupně pozorovat soustavu hyperbol.

(výjimka: rovnodennosti – přímky)

Hyperboly:

- ▶ umožňují odečítat datum
- ▶ usnadňují přesné narýsování hodinových čar



Rovinné sluneční hodiny s datovými čarami se v antice objevily poté, co se rozšířila základní znalost kuželoseček. Skafé vzhledem k náročné výrobě ustoupilo.

Počátky zkoumání kuželoseček

Tři slavné problémy antické matematiky

- ▶ kvadratura kruhu
- ▶ trisekce úhlu
- ▶ zdvojení krychle

Zdvojení krychle:

krétský král Mínós ukládající do hrobu svého syna Glauka byl nespokojen, že je hrobka malá, a tak ji nechal zdvojnásobit, tj. „zvětšit v tomto poměru ve všech směrech“

geometrům se stále nedařilo takový poměr najít $\sqrt[3]{2}$ totiž nelze eukleidovsky zkonstruovat

později jistým lidem z ostrova Délos věštba uložila zdvojnásobit jejich oltář

Objev kuželoseček – Menaichmos

Hippokratés z Chiu (2. pol. 5. stol. př. Kr.)

převodl problém *zdvojení krychle* na nalezení **dvou středních úměrných**:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

volbou $a = 2b$ dostaneme

$$y^3 = 2b^3.$$

Menaichmos (1. polovina 4. stol. př. Kr.)

řešil problém nalezení dvou středních úměrných pomocí kuželoseček:

$$xy = ab, \quad y^2 = bx,$$

nebo

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx.$$

(pokročilá práce s kuželosečkami)

Dvě teorie kuželoseček

1. Starší (např. Archimédés)

řezy pláště kuželu rovinou kolmou na površku

volbou úhlu při vrcholu dostaneme:

- elipsa – řez *ostroúhlého kuželu*
- parabola – řez *pravoúhlého kuželu*
- hyperbola – řez *tupoúhlého kuželu*

2. Mladší (Apollónios)

řezy jedné kuželové plochy

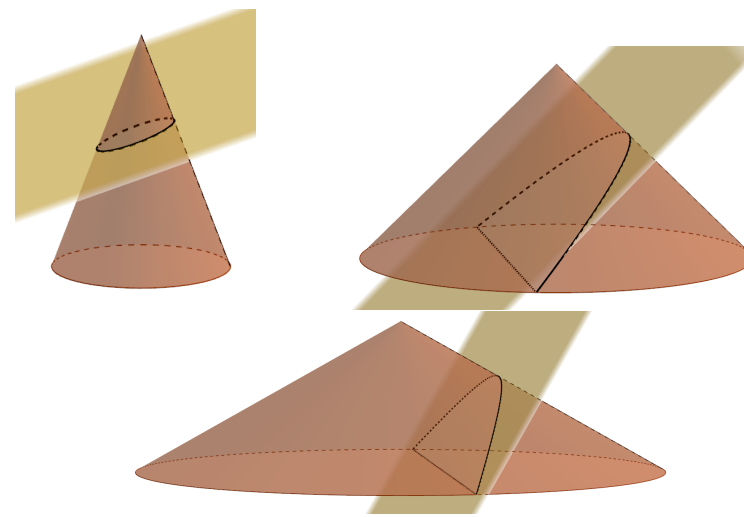
současné názvy – Apollónios z Pergé (kol. 200 př. Kr.)

Kónika

řezy obecně kosé kuželové plochy

Starší teorie kuželoseček (Archimédés)

řezy pláště kuželu rovinou kolmou na površku



Elipsa a hyperbola

Apollónios I, 12 a 13

Rovnice elipsy/hyperboly (vrchol v počátku):

$$\frac{(x \mp a)^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vyjádříme-li y^2 :

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x \mp \frac{b^2}{a^2} x^2$$

Označme $p = \frac{b^2}{a}$, pak

$$y^2 = 2p x \mp \frac{p}{a} x^2$$

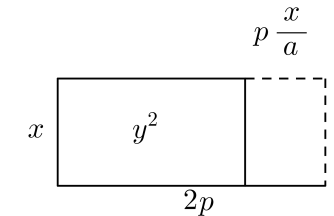
minus – elleipsis plus – hyperbolé

Přikládání ploch – elipsa

$$y^2 = 2p x - \frac{p}{2a} x^2$$

minus – úloha přiložit k zadané úsečce délky $2p$ úsečku délky x takovou, aby výsledný obdélník obsahoval menší obdélník (plnou čarou) se stranou x , který by měl stejný obsah, jako předepsaný čtverec y^2 , a zároveň byl **menší o čárkovaný obdélník** podobný zadanému obdélníku se stranami $2a, 2p$.

Velkému obdélníku tedy chybí (řecky elleipó) čárkovaný obdélník. Odtud má elipsa svůj název (elleipsis).



Přikládání ploch – hyperbola

$$y^2 = 2p x + \frac{p}{a} x^2$$

plus – obdélník o obsahu y^2 **přesahuje** (řecky hyperballó) obdélník se stranami $2p, x$.

Odtud má hyperbola svůj název (hyperbolé).

Apollóniova symptómata

parabola, hyperbola, elipsa

Základní definice:

- ▶ formulovány jazykem přikládání ploch
- ▶ symptómata, která charakterizují jednotlivé kuželosečky v rovině
- ▶ názvy, které používáme dodnes

parabola, elipsa a hyperbola:

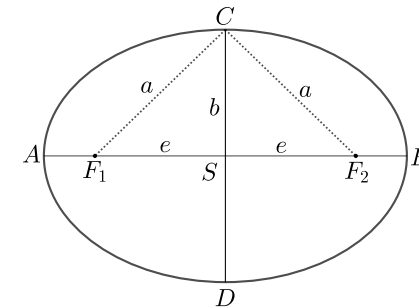
$$y^2 = 2p x \quad y^2 = 2p x - \frac{p}{2a} x^2 \quad y^2 = 2p x + \frac{p}{2a} x^2$$

(označíme-li parametr elipsy a hyperboly $p = \frac{b^2}{a}$)

Ohniska u Apollónia

Charakterizace elipsy pomocí ohnisek u Apollónia

- ▶ Apollónios dochází i k dnes hojně používané charakterizaci elipsy a hyperboly pomocí ohnisek
- ▶ nikde však nepoužívá řídicí přímku

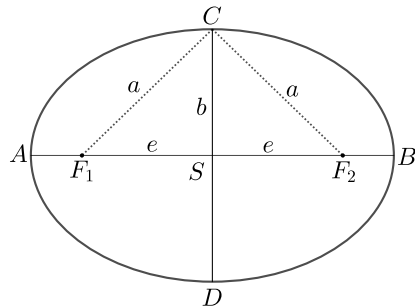


Co jsou pro Apollónia ohniska elipsy?

$$a^2 = b^2 + e^2 \quad \text{neboli} \quad a^2 - e^2 = b^2$$

$$(a + e) \cdot (a - e) = b^2$$

Definice ohnisek elipsy u Apollónia



$$(a + e) \cdot (a - e) = b^2$$

ohniska jsou body, které vzniknou z přikládání:

$$\boxed{AF_2 \cdot F_2B = b^2}$$

nebo také

$$AF_1 \cdot F_1B = b^2$$