I. REÁLNÁ ČÍSLA

Vyjdeme-li z množiny přirozených čísel

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

která nazýváme též celá kladná čísla, pak zavedením celých záporných čísel a nuly získáme množinu celých čísel

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Konstrukcí zlomků z celých čísel a zavedením ekvivalence na množině zlomků vytvoříme množinu racionálních čísel

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q};\, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}\right\}.$$

S těmito čísly ovšem nevystačíme, protože např. už velikost úhlopříčky ve čtverci o straně 1 není ani jedno z těchto čísel. Podle Pythagorovy věty je druhá mocnina velikosti této úhlopříčky rovna 2. Kdyby byla racionálním číslem, existoval by zlomek $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$, p, q nesoudělná) tak, že $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Předpokládejme, že takový zlomek existuje. Pak

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ je sudé} \Rightarrow p \text{ je sudé}$$

a tedy p lze psát ve tvaru $p = 2p_1, p_1 \in \mathbf{Z}$. Z toho dále plyne

$$4p_1^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2p_1^2 \Rightarrow q^2 \text{ je sudé} \Rightarrow q \text{ je sudé},$$

což je spor s předpokladem, že p, q jsou nesoudělná.

Na střední škole jsme se naučili *intuitivně* pracovat s čísly reálnými. Množina reálných čísel obsahuje kromě čísel racionálních ještě jiná čísla, kterým říkáme iracionální. Vzniká tedy otázka, jak definovat reálná čísla. Je několik možností. Např. axiomaticky (viz [6], [7]), pomocí *nekonečných* posloupností celých čísel (viz [5]) nebo konstruktivním přechodem od racionálních čísel k číslům reálným, což je Dedekindova teorie, která byla dovršena až ve 2. polovině 19. století (viz [1], [3]). Další definice, např. zúplnění metrického prostoru racionálních čísel, předpokládají už hlubší znalosti z matematické analýzy.

Protože konstruktivní metody mají v matematické analýze základní důležitost, budeme definovat reálná čísla Dedekindovou teorií. Ale nejen proto. Z této teorie totiž *velmi názorně* vyplývá úplnost množiny reálných čísel a jedna ze základních vět matematické analýzy — věta o supremu.

Nejprve uvedeme vlastnosti množiny racionálních čísel, uspořádání a aritmetické operace, které, jak uvidíme později, zůstávají v platnosti i pro množinu reálných čísel.

Vlastnosti množiny **Q**

1.1 $\boxed{\text{I. USPOŘÁDÁNÍ}}$

Známe znaky „=“ *rovnost* a „>“ *větší než*, které udávají vztah mezi čísly množiny **Q**. Nechť $a, b, c \in \mathbf{Q}$, pak platí

1° Pro každé $a, b \in \mathbf{Q}$ platí právě jeden ze vztahů
$a = b$, $a > b$, $b > a$ (zákon trichotomie);

2° $a > b \wedge b > c \Longrightarrow a > c$ (zákon tranzitivity);

3° $a > b \Longrightarrow \exists c \in \mathbf{Q} : a > c \wedge c > b$ (hustota **Q**),
(říkáme, že číslo c leží mezi čísly a a b).

Poznámka. Pro pohodlí zavádíme znak „<“ *menší než*:

$$a < b \iff b > a.$$

Platí pro něj 1.1 body 1°, 2°, 3°. Dokažte!

K vlastnosti 1.1 3° vyslovíme definici *husté* množiny:

1.2 Definice. Uspořádaná množina M se nazývá hustě uspořádaná — *hustá* — jestliže mezi každými prvky $a, b \in \mathsf{M}$, $a < b$, leží další prvek $c \in \mathsf{M}$, tj. $a < c < b$.

1.3 $\boxed{\text{II. SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ}}$

Pro každá $a, b \in \mathbf{Q}$ existuje číslo $(a + b) \in \mathbf{Q}$, které se nazývá *součet* čísel a, b. Nechť $a, b, c \in \mathbf{Q}$, pak platí:

1° $a + b = b + a$ (komutativní zákon);

2° $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativní zákon);

3° $a + 0 = a$;

4° $\forall a \ \exists -a \in \mathbf{Q} : a + (-a) = 0$;

5° $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.

Rozdíl čísel a, b se nazývá číslo c takové, že $c + b = a$; značí se $a - b$. Dokažte, že rozdíl je definován jednoznačně a že pro odčítání neplatí zákon komutativní a asociativní (platí pouze ve výjimečných případech — ve kterých?).

1.4 $\boxed{\text{III. NÁSOBENÍ A DĚLENÍ}}$

Pro každá $a, b \in \mathbf{Q}$ existuje číslo $ab \in \mathbf{Q}$, které se nazývá *součin* čísel a, b. Značí se také $a \,.\, b$ nebo $a \times b$. Nechť $a, b, c \in \mathbf{Q}$, pak platí:

1° $ab = ba$ (komutativní zákon);

2° $(ab)c = a(bc)$ (asociativní zákon);

3° $a \,.\, 1 = a$;

4° $\forall a \neq 0 \;\; \exists \frac{1}{a} \in \mathbf{Q} : a \,.\, \frac{1}{a} = 1$, ($\frac{1}{a}$ se značí také a^{-1});

5° $(a+b)c = ac + bc$ (zákon distributivní);

6° $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$.

Podíl čísel a, b, $b \neq 0$, se nazývá číslo c takové, že $cb = a$; značí se $\frac{a}{b}$, $a : b$, a/b. Dokažte, že podíl čísel je definován jednoznačně a že pro dělení neplatí zákon komutativní a asociativní (platí pouze ve výjimečných případech — ve kterých?).

1.5 Poznámky.

1) Neuvažujeme podíl čísel a, b, kde $b = 0$, neboť tento podíl nelze jednoznačně definovat. Uvažte, jaké možnosti plynou pro čísla c, a z rovnice $c \,.\, 0 = a$ (viz [1]).

2) V 1.4 6° nelze vynechat podmínku $c > 0$. Dokažte! Vyslovte a dokažte vztah 1.4 6° pro $c < 0$.

3) Důkaz hustoty $\mathbf{Q}$ (1.1 3°) : $a > b \Rightarrow a > \frac{a+b}{2} > b$.

1.6 $\boxed{\text{IV. ARCHIMEDŮV AXIOM}}$

1° $\forall c \in \mathbf{Q}$, $c > 0$, $\exists n \in \mathbf{N} : n > c$.

(1′ $\forall a, b \in \mathbf{Q}$, $a > 0$, $b > 0$, $\exists n \in \mathbf{N} : an > b$.)

Poznámka. Tvrzení 1° a 1′ jsou ekvivalentní; stačí označit $c = \frac{b}{a}$. Ve skutečnosti byla Archimedem vyslovena geometrická věta, která je známa pod názvem „Archimedův axiom“: Jsou-li na přímce dány dvě úsečky délek a, b (a, b jsou zde ovšem čísla reálná), pak lze vždy nanést na přímku úsečku délky a tolikrát, že součet délek těchto úseček bude větší než b.

Iracionální čísla

V úvodu první kapitoly jsme dokázali, že kromě racionálních čísel existují další čísla, např. $\sqrt{2}$, která budeme definovat jako řezy v množině $\mathbf{Q}$. Mějme (celou) množinu racionálních čísel $\mathbf{Q}$ a rozdělme $\mathbf{Q}$ na dvě neprázdné množiny A, A′ takto:

1.7 Definice. Dvojice množin $\mathsf{A}, \mathsf{A}' \subset \mathbf{Q}$ se nazývá *řez v množině* $\mathbf{Q}$, značí se A/A', jestliže platí:

1° $\mathsf{A} \neq \emptyset$, $\mathsf{A}' \neq \emptyset$,

2° *každé* racionální číslo patří právě do jedné z množin A, A', 3° $a \in \mathsf{A}$, $a' \in \mathsf{A}' \Rightarrow a < a'$.

Množina A se nazývá *dolní* skupina řezu A/A', množina A' *horní* skupina řezu A/A'.

Poznámka. Z definice řezu A/A' plyne:

$$a \in \mathsf{A} \Rightarrow \forall x \in \mathbf{Q},\ x < a : x \in \mathsf{A},$$

$$a' \in \mathsf{A}' \Rightarrow \forall x' \in \mathbf{Q},\ x' > a' : x' \in \mathsf{A}'.$$

1.8 Definice. Nechť M je uspořádaná množina. Jestliže existuje prvek $m^* \in \mathsf{M}$ tak, že pro každé $x \in \mathsf{M}$ platí $x \leq m^*$, pak se m^* nazývá *největší prvek množiny* M a značí se $\max \mathsf{M}$. Jestliže existuje prvek $m \in \mathsf{M}$ tak, že pro každé $x \in \mathsf{M}$ platí $x \geq m$, pak se m nazývá *nejmenší prvek množiny* M a značí se $\min \mathsf{M}$.

Poznámka. Občas se užívá pro největší (nejmenší) prvek množiny M zkrácený název maximum (minimum) množiny M, ale tento název nebudeme používat, protože by mohlo dojít k záměně s pojmy absolutní maximum (absolutní minimum) nebo lokální maximum (lokální minimum), které budou definovány později. Jde ovšem o definice, názvy, a ty mohou být u různých autorů různé (viz např. [5]).

1.9 Příklady.

1. $\mathsf{A} = \{a \in \mathbf{Q}; a < 1\}$, $\mathsf{A}' = \{a' \in \mathbf{Q}; a' \geq 1\}$;
   A/A' je řez v $\mathbf{Q}$, A nemá největší prvek, A' má nejmenší prvek.
2. $\mathsf{A} = \{a \in \mathbf{Q}; a \leq 1\}$, $\mathsf{A}' = \{a' \in \mathbf{Q}; a' > 1\}$;
   A/A' je řez v $\mathbf{Q}$, A má největší prvek, A' nemá nejmenší prvek.
3. $\mathsf{A} = \{a \in \mathbf{Q}; a \leq 0 \vee (a > 0 \wedge a^2 < 2)\}$, $\mathsf{A}' = \{a' \in \mathbf{Q}; a' > 0 \wedge a'^2 > 2\}$;
   A/A' je řez v $\mathbf{Q}$, ukážeme, že A nemá největší prvek a A' nemá nejmenší prvek.
   A nemá největší prvek: stačí se omezit na $a > 0$. Nechť tedy $a > 0 \wedge a^2 < 2$. Hledáme aspoň jedno racionální číslo r, pro které platí $a < r \wedge r^2 < 2$. Toto číslo r budeme hledat ve tvaru $a + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$. Pro $n > 1$ platí

   $$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < a^2 + \frac{2a+1}{n}.$$

   Předpokládejme, že $a^2 + \frac{2a+1}{n} < 2$, pak i $(a + \frac{1}{n})^2 < 2$. Úpravou

   $$a^2 + \frac{2a+1}{n} < 2$$

   dostaneme

   $$n > \frac{2a+1}{2-a^2}.$$

   Existence takového $n \in \mathbf{N}$ je zajištěna platností Archimedova axiomu 1.6 1°, neboť číslo $\frac{2a+1}{2-a^2}$ je kladné racionální číslo. Protože $a \in \mathsf{A}$, $a > 0$, bylo libovolné, nemá množina A největší prvek.
   Analogicky: A' nemá nejmenší prvek. Dokažte!

4. $\mathsf{A} = \{a \in \mathbf{Q};\ a < 1\}$, $\mathsf{A}' = \{a' \in \mathbf{Q};\ a' > 1\}$ nebo
   $\mathsf{A} = \{a \in \mathbf{Q};\ a \leq 1\}$, $\mathsf{A}' = \{a' \in \mathbf{Q};\ a' \geq 1\}$;
   A/A' nejsou řezy v $\mathbf{Q}$, protože není splněn předpoklad 2° v definici 1.7.

1.10 Věta. *V množině* $\mathbf{Q}$ *neexistuje řez* A/A' *tak, aby* A *měla největší a* A' *měla nejmenší prvek.*

Důkaz: (sporem) Nechť A/A' je řez v $\mathbf{Q}$. Předpokládejme, že $a_0 = \max \mathsf{A}$, $a'_0 = \min \mathsf{A}'$. Protože $a_0, a'_0 \in \mathbf{Q}$, pak podle axiomu o hustotě množiny $\mathbf{Q}$ 1.1 3° existuje $c \in \mathbf{Q}$ tak, že $a_0 < c < a'_0$, což je spor s předpokladem 2° v definici 1.7. ∎

1.11 Poznámka. Příklady 1.9 ukazují 3 druhy řezů A/A' v $\mathbf{Q}$:
1. druh — A nemá největší prvek, A' má nejmenší prvek;
2. druh — A má největší prvek, A' nemá nejmenší prvek;
3. druh — A nemá největší prvek, A' nemá nejmenší prvek.

V prvních dvou případech se říká, že řezu A/A' je přiřazeno racionální číslo r, nebo, že řez A/A' definuje racionální číslo r; značí se $r = (\mathsf{A}/\mathsf{A}')$. Toto číslo r je „hraničním" prvkem řezu A/A'; je buď největším prvkem množiny A nebo nejmenším prvkem množiny A'.

Ve třetím případě se říká, že řezu A/A' je přiřazeno číslo α, které se nazývá iracionální, nebo že řez A/A' definuje iracionální číslo α; značí se $\alpha = (\mathsf{A}/\mathsf{A}')$. Toto číslo α nahrazuje „hraniční" prvek řezů 1. a 2. druhu, je jakoby postaveno mezi racionální čísla množiny A a racionální čísla množiny A'. Např. v příkladu 1.9 bod 3. jde o iracionální číslo $\sqrt{2}$.

V příkladu 1.9. bod 3. jsme dokázali následující tvrzení:

1.12 Věta. *V množině* $\mathbf{Q}$ *existuje aspoň jeden řez 3. druhu.*

1.13 Úmluva. Pro každé racionální číslo existují dva řezy, které ho definují. Budeme nadále uvažovat jen řezy 2. druhu (stejně jako v [1]), tj. r patří do dolní skupiny řezu.

1.14 Definice. Racionální a iracionální čísla se společně nazývají *reálná* čísla. Množina všech reálných čísel se značí $\mathbf{R}$. Označení $\gamma = (\mathsf{A}/\mathsf{A}')$ znamená, že řez A/A' definuje reálné číslo γ (racionální nebo iracionální).

Pojem reálného čísla je jedním ze základních pojmů matematické analýzy.

Uspořádání v $\mathbf{R}$

Rovnost „="

Dvě iracionální čísla $\alpha = (A/A')$, $\beta = (B/B')$ jsou si *rovna*, právě když řezy A/A' a B/B' jsou *shodné*. Ke shodnosti řezů stačí rovnost dolních skupin nebo rovnost horních skupin řezů.

Poznámka. Takto lze definovat rovnost i v případě, že řezy A/A' a B/B' definují racionální čísla.

Větší než „>"

— Pro racionální čísla význam znaku známe.

— Nechť $r \in \mathbf{Q}$, $\alpha = (A/A')$ je iracionální číslo, pak

$$r > \alpha \iff r \in A',$$
$$\alpha > r \iff r \in A.$$

— Nechť $\alpha = (A/A')$, $\beta = (B/B')$ jsou dvě iracionální čísla, pak

(1) $\alpha > \beta \iff B \subseteq A \wedge B \neq A$ nebo $\alpha > \beta \iff A' \subset B' \wedge A' \neq B'$.

Poznámka. Vztahy (1) lze definovat znak „>" i v případě, že řezy A/A', B/B' definují racionální čísla nebo jedno racionální a jedno iracionální.

1.15 Definice. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha = (A/A')$, $\beta = (B/B')$. Pak

$$\alpha = \beta \iff A = B \quad (\alpha = \beta \iff A' = B'),$$
$$\alpha > \beta \iff B \subset A \wedge B \neq A \quad (\alpha > \beta \iff A' \subset B' \wedge A' \neq B').$$

1.16 Věta. *Nechť $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$. Pak platí*

I. 1° Pro každé $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ platí právě jeden ze vztahů $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, $\beta > \alpha$;

I. 2° $\alpha > \beta \wedge \beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$.

Důkaz: Nechť $\alpha = (A/A')$, $\beta = (B/B')$, $\gamma = (C/C')$.

1° Pro množiny A, B nastane právě jedna z možností

$A = B$, $A \neq B \wedge B \subset A$, $A \neq B \wedge A \subset B$.

2° $B \subset A \wedge C \subset B \Rightarrow C \subset A$, přičemž $B \neq A \wedge C \neq B \Rightarrow C \neq A$. ∎

Poznámka. Znak menší než „<": $\alpha < \beta \iff \beta > \alpha$.

1.17 Definice. Řekneme, že *množina* A *je hustá v množině* B, jestliže $A \subset B$ a mezi každými dvěma prvky množiny B leží aspoň jeden prvek z množiny A.

1.18 Věta. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha > \beta$. Pak existuje $r \in \mathbf{Q}$, pro které platí $\alpha > r > \beta$.*

Důkaz: Nechť $\alpha = (\mathsf{A}/\mathsf{A}')$, $\beta = (\mathsf{B}/\mathsf{B}')$. Z předpokladu $\mathsf{B} \subset \mathsf{A} \wedge \mathsf{B} \neq \mathsf{A}$ plyne, že existuje $r' \in \mathbf{Q}$ tak, že $\beta < r' \leq \alpha$ (rovnost by mohla nastat pro $\alpha \in \mathbf{Q}$). Je zřejmé, že $r' \in \mathsf{B}'$, a protože B' nemá nejmenší prvek (viz úmluvu 1.13), existuje $r \in \mathbf{Q}$ tak, že $r \in \mathsf{B}'$ a $\beta < r < r'$, tedy i $\beta < r < r' \leq \alpha$. ■

Důsledek. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha > \beta$. Pak existuje nekonečně mnoho racionálních čísel r tak, že $\alpha > r > \beta$.

1.19 Poznámky.

1) Z věty 1.18 plyne, že $\mathbf{Q}$ je hustá v $\mathbf{R}$. Dále také platí, že $\mathbf{R}$ je hustá, protože racionální číslo je reálné číslo, takže $\mathbf{R}$ splňuje definici 1.2. Může nás samozřejmě zajímat, jestli mezi dvěma reálnými čísly leží vždy také iracionální číslo. Důkaz je analogický důkazu 1.1 3° pro množinu $\mathbf{Q}$ (viz 1.5), zatím jsme ale nedefinovali součet a součin reálných čísel.

2) $\mathbf{R}$ není hustá v $\mathbf{Q}$, protože $\mathbf{R} \not\subset \mathbf{Q}$.

1.20 Lemma. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ a pro každé $e \in \mathbf{Q}$, $e > 0$, existují $s, s' \in \mathbf{Q}$, $0 < s' - s < e$, tak, že $s < \alpha < s'$, $s < \beta < s'$. Pak $\alpha = \beta$.*

Důkaz: (sporem) Nechť např. $\alpha > \beta$. Podle důsledku věty 1.18 existují $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$, pro která $\alpha > r_1 > r_2 > \beta$. Pak pro libovolná $s, s' \in \mathbf{Q}$, která splňují předpoklady lemmatu, platí

$$s' > \alpha > r_1 > r_2 > \beta > s \Rightarrow s' > r_1 > r_2 > s \Rightarrow s' - s > r_1 - r_2 > 0,$$

a tedy rozdíl $s' - s$ není menší než libovolné $e > 0$, např. $e = r_1 - r_2$. To je ovšem spor s předpokladem lemmatu. ■

Poznámka. Z lemmatu 1.20 vyplývá důležitý výsledek, že každé reálné číslo lze s libovolnou přesností aproximovat racionálními čísly, tj. je-li možné čísla α, β současně „uzavřít" mezi racionální čísla, jejichž vzdálenost je libovolně malá, pak je nutně $\alpha = \beta$.

Úplnost R

Dokážeme důležitou vlastnost množiny reálných čísel, kterou se tato množina liší od množiny racionálních čísel. V množině racionálních čísel existují řezy, které nemají „hraniční číslo", tj. existují řezy v $\mathbf{Q}$, které definují čísla nepatřící do $\mathbf{Q}$. Říkáme jim čísla iracionální. Tuto vlastnost množiny racionálních čísel, která vede k definici iracionálního čísla, nazýváme neúplnost množiny racionálních čísel.

Uvažujme nyní řezy v množině reálných čísel.

1.21 Definice. Dvojice množin $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \subset \mathbf{R}$ se nazývá *řez v množině* $\mathbf{R}$, značí se $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$, jestliže platí:

1° $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $\mathcal{A}' \neq \emptyset$,

2° *každé* reálné číslo patří právě do jedné z množin $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$,

3° $\alpha \in \mathcal{A}, \alpha' \in \mathcal{A}' \Rightarrow \alpha < \alpha'$.

Množina $\mathcal{A}$ se nazývá *dolní* skupina řezu $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$, množina $\mathcal{A}'$ *horní* skupina řezu $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$.

Vzniká otázka: Má každý řez $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ v $\mathbf{R}$ hraniční prvek? Nebo: Existují v $\mathbf{R}$ také „mezery“ jako v $\mathbf{Q}$?

Odpověď dává tzv. „Základní věta Dedekindova“:

1.22 Věta (Dedekindova). *Ke každému řezu $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ v množině $\mathbf{R}$ existuje vždy reálné číslo γ, které je tímto řezem definováno. Přitom je γ buď největší prvek množiny $\mathcal{A}$ nebo nejmenší prvek množiny $\mathcal{A}'$.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ je řez v $\mathbf{R}$. Označme A množinu všech racionálních čísel v $\mathcal{A}$ a A' množinu všech racionálních čísel v $\mathcal{A}'$. Pak A/A' je řez v $\mathbf{Q}$ a definuje nějaké reálné číslo γ (viz 1.11). Podle definice 1.21 řezu $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ musí γ ležet v jedné z množin $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$. Předpokládejme, že $\gamma \in \mathcal{A}$, a dokážeme, že $\gamma = \max \mathcal{A}$.

(Sporem) Nechť $\gamma \neq \max \mathcal{A}$, pak existuje $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, $\alpha_0 > \gamma$. Podle věty 1.18 existuje $r \in \mathbf{Q}$ tak, že $\gamma < r < \alpha_0$. Z toho plyne, že $r \in \mathcal{A}$ a tedy i $r \in \mathsf{A}$, což je ale spor s tím, že řez A/A' definuje číslo γ, neboť musí platit, že $r \leq \gamma$.

Analogicky se dokáže, že je-li $\gamma \in \mathcal{A}'$, pak $\gamma = \min \mathcal{A}'$.

Podle věty 1.18 není možné, aby měla množina $\mathcal{A}$ největší prvek a množina $\mathcal{A}'$ nejmenší prvek, protože by existovalo $r \in \mathbf{Q}$ tak, že $\max \mathcal{A} < r < \min \mathcal{A}'$, což je ve sporu s definicí řezů $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ i A/A'. ∎

1.23 Úplnost R. Vlastnost množiny $\mathbf{R}$, která je dokázána Dedekindovou větou se nazývá *úplnost množiny* $\mathbf{R}$. S ohledem na označení druhů řezů v 1.11 lze vyslovit Dedekindovu větu ve tvaru:

V množině $\mathbf{R}$ *neexistuje řez 3. druhu.*

Supremum a infimum množiny

1.24 Definice. Množina $\mathsf{M} \subset \mathbf{R}$ se nazývá *omezená shora*, jestliže existuje $k \in \mathbf{R}$ tak, že pro každé $x \in \mathsf{M}$ platí $x \leq k$. Číslo k se nazývá *horní závora* množiny M.

Množina, která není omezená shora, se nazývá *neomezená shora*.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} M \subset \mathbf{R} \text{ je omezená shora} & \Longleftrightarrow & \exists k \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathsf{M} : x \leq k \\ M \subset \mathbf{R} \text{ je neomezená shora} & \Longleftrightarrow & \forall k \in \mathbf{R}\ \exists x \in \mathsf{M} : x > k \end{array}}$$

1.25 Příklady.

1. $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ je neomezená shora, nemá horní závoru.
2. $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R}; 0 < x \leq 1\}$ je omezená shora, horní závory jsou všechna reálná čísla ≥ 1, např. $1, 2, 100$, přičemž $1 \in \mathsf{M}$.
3. $\mathsf{M} = \{1 - \frac{1}{n}\,; n \in \mathbf{N}\}$ je omezená shora, horní závory jsou všechna čísla ≥ 1, přičemž žádná horní závora nepatří do M.
4. $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R}; \sin x = \frac{1}{2}\}$ je neomezená shora, nemá horní závoru.

1.26 Poznámky.

1) Pro shora omezenou (shora neomezenou) množinu se užívá též název shora ohraničená (shora neohraničená) množina. Pro horní závoru se též užívá název horní hranice.
2) Definici shora omezené množiny lze vyslovit také ve tvaru: $\mathsf{M} \subset \mathbf{R}$ se nazývá omezená shora, jestliže existuje $k \in \mathbf{R}$ tak, že žádné číslo množiny M není větší než k.
3) V definici shora omezené množiny lze místo $x \leq k$ uvést $x < k$, protože $x < k \Rightarrow x \leq k$.
4) Je-li M omezená shora, má nekonečně mnoho horních závor, přičemž některá může patřit do M (viz 1.25 2.).
5) Nesmíme si plést pojmy množina konečná a množina omezená shora (spíš se pletou pojmy množina konečná a množina omezená, kterou budeme definovat později). Každá konečná množina je omezená shora, např. $\mathsf{M} = \{1, 2, 3, 4\}$, ale i nekonečná množina může být omezená shora (viz 1.25 body 2. a 3.).
6) $\emptyset$ je omezená shora (viz 1.26 2)).

Analogicky definujeme pojmy omezená zdola a dolní závora. Platí zde analogické poznámky k poznámkám 1.26.

1.27 Definice. Množina $\mathsf{M} \subset \mathbf{R}$ se nazývá *omezená zdola*, jestliže existuje $k \in \mathbf{R}$ tak, že pro každé $x \in \mathsf{M}$ platí $x \geq k$. Číslo k se nazývá *dolní závora* množiny M.

Množina, která není omezená zdola, se nazývá *neomezená zdola*.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} M \subset \mathbf{R} \text{ je omezená zdola} & \Longleftrightarrow & \exists k \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathsf{M} : x \geq k \\ M \subset \mathbf{R} \text{ je neomezená zdola} & \Longleftrightarrow & \forall k \in \mathbf{R}\ \exists x \in \mathsf{M} : x < k \end{array}}$$

Množiny v příkladu 1.25 body 1., 2., 3. jsou omezené zdola; množina v bodě 4. je neomezená zdola.

1.28 Definice. Množina $\mathsf{M} \subset \mathbf{R}$, která je omezená shora i zdola, se nazývá *omezená*. Množina, která není omezená, se nazývá *neomezená*.

1.29 Poznámky.

1) Z definic 1.24 a 1.27 plyne, že nezáleží na čísle $k \in \mathbf{R}$, kterým je množina omezená shora nebo zdola, proto použijeme-li stejné číslo:

$$\boxed{\mathsf{M} \subset \mathbf{R} \text{ je omezená } \iff \exists k \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathsf{M} : |x| \leq k}$$

2) Neomezená množina může být omezená shora a neomezená zdola nebo neomezená shora a omezená zdola nebo neomezená shora i zdola.

$$\boxed{\mathsf{M} \subset \mathbf{R} \text{ je neomezená } \iff \forall k \in \mathbf{R}\ \exists x \in \mathsf{M} : |x| > k}$$

1.30 Věta (o supremu). *Nechť* M *je neprázdná shora omezená množina reálných čísel. Pak existuje mezi všemi horními závorami množiny* M *jedna, která je nejmenší.*

Důkaz: 1) Nechť M má největší prvek, označme $\overline{x} = \max \mathsf{M}$. Z definic 1.8 a 1.24 plyne, že $\overline{x}$ je horní závora M. Protože $\overline{x} \in \mathsf{M}$, tak pro libovolnou horní závoru k množiny M platí $\overline{x} \leq k$, tedy $\overline{x}$ je nejmenší horní závora.

2) Nechť M nemá největší prvek. Definujeme řez $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ v $\mathbf{R}$ takto: $\mathcal{A}'$ obsahuje všechny horní závory M a $\mathcal{A}$ obsahuje všechna ostatní reálná čísla. Všechna $x \in \mathsf{M}$ patří do $\mathcal{A}$, protože M nemá největší prvek, tedy $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ jsou neprázdné a $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ je skutečně řez v $\mathbf{R}$. Podle Dedekindovy věty 1.22 existuje číslo $\gamma \in \mathbf{R}$, které je tímto řezem definováno. Protože žádné číslo $\alpha \in \mathcal{A}$ není větší než γ, je γ horní závora množiny $\mathcal{A}$ a tím i množiny M, tedy $\gamma \in \mathcal{A}'$. Podle definice řezu $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ je γ nejmenší číslo množiny $\mathcal{A}'$. ■

Analogicky můžeme vyslovit a dokázat větu:

1.31 Věta (o infimu). *Nechť* M *je neprázdná zdola omezená množina reálných čísel. Pak existuje mezi všemi dolními závorami množiny* M *jedna, která je největší.*

1.32 Definice. Nechť M je neprázdná shora (zdola) omezená množina reálných čísel. Nejmenší (největší) prvek množiny všech horních (dolních) závor množiny M se nazývá *supremum* (*infimum*) množiny M a značí se sup M (inf M).

Definici sup M a inf M lze vyslovit také ve tvaru:

1.33 Definice. Nechť M je neprázdná shora omezená množina reálných čísel. Číslo $G \in \mathbf{R}$ se nazývá *supremum* množiny M, značí se $G = \sup \mathsf{M}$, jestliže má následující vlastnosti:

1° $\forall x \in \mathsf{M} : x \leq G$,

2° $\forall G' \in \mathbf{R},\ G' < G, \exists x' \in \mathsf{M} : x' > G'$.

(2′ $\forall \varepsilon \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0, \exists x' \in \mathsf{M} : x' > G - \varepsilon$.)

Nechť M je neprázdná zdola omezená množina reálných čísel. Číslo $g \in \mathbf{R}$ se nazývá *infimum* množiny M, značí se $g = \inf \mathsf{M}$, jestliže má následující vlastnosti:

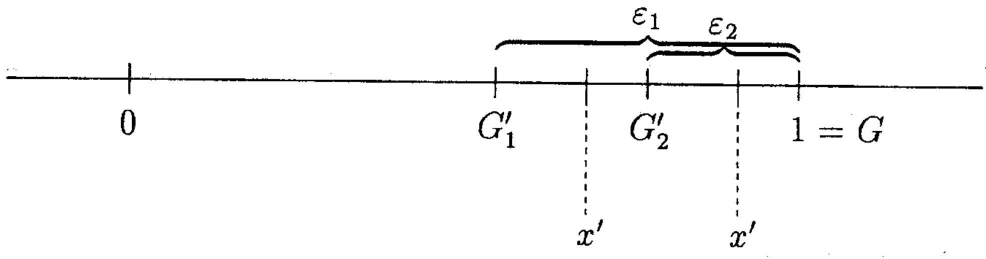
1° $\forall x \in \mathsf{M} : x \geq g$,

2° $\forall g' \in \mathbf{R},\ g' > g,\ \exists x' \in \mathsf{M} : x' < g'$.

(2′ $\forall \varepsilon \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0,\ \exists x' \in \mathsf{M} : x' < g + \varepsilon$.)

1.34 Poznámky.

1) Definice 1.32 a 1.33 jsou ekvivalentní:
Vlastnost 1° z definice 1.33 vyjadřuje, že G je horní závora množiny M. Vlastnost 2° vyjadřuje, že G je nejmenší prvek z množiny všech horních závor množiny M. Je to vyjádřeno tím, že jakékoliv číslo G', pro které platí $G' < G$, už není horní závorou množiny M, neboť není splněno pro všechna $x \in \mathsf{M}$, že $x \leq G'$. Ve 2′ je číslo G' vyjádřeno pomocí G a kladného $\varepsilon \in \mathbf{R} : G' = G - \varepsilon$.
Např. $\mathsf{M} = \langle 0, 1 \rangle$, $\sup \mathsf{M} = 1$



Doporučujeme čtenáři, aby si provedl analogické úvahy pro inf M.

2) Definice 1.33 s vlastnostmi 1°, 2′ je vhodnější pro důkazy. Chceme-li dokázat, že množina má supremum a které číslo to je, postupujeme většinou tak, že uhodneme číslo, které asi bude supremem (pokud existuje) a pak dokážeme, že toto číslo splňuje definici 1.33.
Např. $\mathsf{M} = \{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\}$; $\sup \mathsf{M} = 1$:
   1° $1 - \frac{1}{n} \leq 1$ je zřejmé,
   2′ $\forall \varepsilon > 0\ \exists 1 - \frac{1}{n} : 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$, tato nerovnost je splněna pro $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Takové $n \in \mathbf{N}$ existuje podle Archimedova axiomu pro reálná čísla, který má analogické znění jako 1.6, přičemž jsme ovšem prováděli s reálnými čísly operace, které jsme zatím nedefinovali.

3) Rozdíl mezi sup M a max M: max M je vždy prvkem množiny M, sup M může být prvkem M anebo nemusí být prvkem M. Např.
$\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R}; 0 < x \leq 1\}$ — $\sup \mathsf{M} = \max \mathsf{M} = 1$,
$\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R}; 0 < x < 1\}$ — $\sup \mathsf{M} = 1$, max M neexistuje.
Platí: $\exists \max \mathsf{M} \Rightarrow \exists \sup \mathsf{M}$ a $\sup \mathsf{M} = \max \mathsf{M}$ ($\sup \mathsf{M} \in \mathsf{M}$), ale naopak, z existence sup M neplyne existence max M. Jestliže neexistuje max M, pak pokud existuje sup M (a to existuje pro každou číselnou neprázdnou množinu omezenou shora), platí $\sup \mathsf{M} \notin \mathsf{M}$.

4) Věta o supremu (infimu) neplatí v **Q**; důkaz viz [1].

5) Předpoklady ve větách 1.30 a 1.31 a tedy i v definicích 1.32 a 1.33, že $\mathsf{M} \neq \emptyset$ a M je omezená shora (zdola), nelze vynechat.

   Není-li např. M omezená shora, nemá nejmenší horní závoru, protože nemá vůbec horní závoru. Je-li $\mathsf{M} = \emptyset$, pak každé reálné číslo je její horní závora. Vidíme tedy, že v množině reálných čísel nelze ani definitoricky zavést pojmy supremum množiny neomezené shora a $\sup \emptyset$. Jestliže přidáme k množině **R** ještě prvky $+\infty$ a $-\infty$, pak lze definovat supremum množiny neomezené shora rovno $+\infty$ a $\sup \emptyset = -\infty$ (viz poznámky 1.71).

Větou 1.30 jsme dokázali existenci čísla, které definicí 1.32 (1.33) nazveme supremum. Budeme-li postupovat obráceně a nejdříve toto číslo nadefinujeme, pak větu o jeho existenci — větu o supremu — lze vyslovit ve tvaru:

1.35 Věta (o supremu). *Každá neprázdná shora omezená množina reálných čísel má supremum.*

Analogicky můžeme vyslovit větu o infimu: *Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.*

Aritmetické operace v **R**

1.36 Věta. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Nechť dále $a, a', b, b' \in \mathbf{Q}$, vyhovující nerovnostem

$$a < \alpha < a', \qquad b < \beta < b', \tag{2}$$

jsou libovolná. Pak existuje právě jedno $\gamma \in \mathbf{R}$, které je omezené zdola všemi součty tvaru $a + b$ a shora $a' + b'$ a platí

$$a + b < \gamma < a' + b'. \tag{3}$$

Důkaz: 1) Existence. Uvažujme množinu všech součtů $a + b$. Tato množina je omezená shora, např. libovolným součtem $a' + b'$, tedy má supremum. Označme

$$\gamma = \sup\{a + b\}.$$

Zřejmě je

$$a + b \leq \gamma, \qquad \gamma \leq a' + b'. \tag{4}$$

Dále, vezmeme-li jakákoliv $a, a', b, b' \in \mathbf{Q}$ vyhovující nerovnostem (2), pak vzhledem k hustotě **Q** v **R** existují vždy $a_1, a_1', b_1, b_1' \in \mathbf{Q}$, pro která platí

$$a < a_1 < \alpha < a_1' < a', \qquad b < b_1 < \beta < b_1' < b_1.$$

Z toho plyne, že množina všech součtů $a + b$ nemá největší prvek a stejně tak množina všech součtů $a' + b'$ nemá nejmenší prvek, takže v (4) nemůže nastat rovnost. Číslo γ tedy vyhovuje (3).

2) Jednoznačnost. Zvolme libovolně $e \in \mathbf{Q}$, $e > 0$. K němu existují $a, a', b, b' \in \mathbf{Q}$ splňující (2) tak, že

$$0 < a' - a < e, \qquad 0 < b' - b < e.$$

Odtud

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) < 2e.$$

Protože jsme e volili libovolně, je rozdíl $(a' + b') - (a + b)$ libovolně malý. Podle lemmatu 1.20 existuje právě jediné $\gamma \in \mathbf{R}$, které leží mezi $a + b$ a $a' + b'$, tj. vyhovuje (3). ∎

1.37 Definice. Číslo γ z věty 1.36 se nazývá *součet* čísel α a β a značí se $\alpha + \beta$.

1.38 Poznámky.

1) Z důkazu věty 1.36 plyne, že součet $\alpha + \beta$ je definován jako $\sup\{a + b\}$, kde $a, b \in \mathbf{Q}$, $a < \alpha$, $b < \beta$. Tato definice je korektní i pro součet racionálních čísel, neboť si stačí uvědomit, že $\sup\{x \in \mathbf{Q}; x < r\} = r$ pro $r \in \mathbf{Q}$.

2) Součet reálných čísel má vlastnosti 1.3, důkazy jsou analogické důkazu věty 1.36 (viz [3]); přenecháváme je čtenáři.

3) *Absolutní hodnota* čísla $\gamma \in \mathbf{R}$ je reálné číslo

$$|\gamma| = \max\{\gamma, -\gamma\}.$$

4) *Součin* dvou reálných čísel lze definovat podobně jako jejich součet. V tomto případě je však třeba rozlišit čísla kladná, záporná a nulu. Definitoricky zavedeme $\gamma \,.\, 0 = 0 \,.\, \gamma = 0$ pro libovolné $\gamma \in \mathbf{R}$.

   Součin čísel $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ je $\sup\{a \,.\, b\}$, kde $a, b \in \mathbf{Q}$, $0 < a < \alpha$, $0 < b < \beta$. Důkaz je analogický důkazu věty 1.36 (viz [3]). Jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, libovolná, pak využijeme absolutní hodnoty:

   $\alpha \,.\, \beta = |\alpha| \,.\, |\beta|$ — jsou-li α, β stejného znaménka,

   $\alpha \,.\, \beta = -(|\alpha| \,.\, |\beta|)$ — jsou-li α, β různých znamének,

   a převedeme definici součinu $\alpha \,.\, \beta$ na případ součinu kladných čísel $|\alpha| \,.\, |\beta|$.

5) Součin reálných čísel má vlastnosti 1.4, důkazy jsou analogické důkazu věty 1.36 (viz [3]); přenecháváme je čtenáři.

6) Upozorňujeme, že součet a součin reálných čísel lze pochopitelně definovat i jiným způsobem, např. jako součet a součin řezů v $\mathbf{Q}$ (viz [1]).

1.39 Věta (Archimedův axiom). $\forall \gamma \in \mathbf{R}\ \exists n \in \mathbf{N} : n > \gamma$.

Důkaz: Pro $\gamma \leq 0$ je tvrzení zřejmé. Je-li $\gamma > 0$, označme $\gamma = (\mathsf{A}/\mathsf{A}')$, kde A/A' je řez v množině $\mathbf{Q}$. Pak v horní skupině A' existuje $r \in \mathbf{Q}$ tak, že $r > \gamma$. A pro racionální čísla Archimedův axiom platí (viz 1.6). ∎

1.40 Věta. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Pak platí*

I. 3°
$$\alpha > \beta \implies \exists \gamma \in \mathbf{R} : \alpha > \gamma > \beta,$$

tj. množina $\mathbf{R}$ je hustá.

Důkaz: Můžeme vzít například $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. ∎

Závěrem této části uvedeme pro reálná čísla ještě další pojmy.

1.41 Definice.

1° *Signum* (znaménko) čísla $\gamma \in \mathbf{R}$ je reálné číslo $\operatorname{sgn} \gamma$:

$$\operatorname{sgn} \gamma = \begin{cases} 1 \text{ pro } \gamma > 0, \\ 0 \text{ pro } \gamma = 0, \\ -1 \text{ pro } \gamma < 0. \end{cases}$$

2° *Celá část* čísla $\gamma \in \mathbf{R}$ je celé číslo k:

$$k \leq \gamma < k + 1.$$

Celá část čísla γ se značí $[\gamma]$.
Reálné číslo $\gamma - [\gamma]$ se nazývá *lomená část* čísla $\gamma \in \mathbf{R}$.

1.42 Poznámky.

1) Existence a jednoznačnost $[\gamma]$ plyne z Archimedova axiomu. Nechť $\gamma \geq 0$, položme $\mathsf{P} = \{n \in \mathbf{N}; n > \gamma\}$. Podle Archimedova axiomu 1.39 je $\mathsf{P} \neq \emptyset$ a protože $\mathsf{P} \subset \mathbf{N}$, existuje $n_0 = \min \mathsf{P}$. Pak $k = n_0 - 1$.

   Je-li $\gamma < 0$, existuje $m_0 = \min\{n \in \mathbf{N}; 1 - \gamma \leq n\}$; pak $k = 1 - m_0$.

2) Platí $0 \leq \gamma - [\gamma] < 1$. Dokažte!

Topologie číselné osy

Topologie dané množiny určuje jisté polohové vztahy mezi body a podmnožinami této množiny. Slovo topologie vzniklo z řeckých slov topos (místo) a logos (slovo, zákon) a bylo zavedeno v polovině 19. století. Základním topologickým pojmem je otevřená množina. Na reálné ose jsou otevřenými množinami např. otevřené intervaly. Intervaly mají význačné postavení mezi podmnožinami $\mathbf{R}$.

Co je to vlastně interval? Nejprve pro $a, b \in \mathbf{R}$ zavedeme označení

(5) $$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbf{R};\ a \le x \le b\}.$$

Pak definujeme:

1.43 Definice. Množina $\mathsf{J} \subset \mathbf{R}$ se nazývá *interval*, jestliže pro každé dva prvky $\alpha, \beta \in \mathsf{J}, \alpha < \beta$, platí $\langle \alpha, \beta\rangle \subset \mathsf{J}$.

Poznámky.

1) Nechť $a, b, \in \mathbf{R}$, $a < b$. Pak J může být následujících typů, které označujeme, případně nazýváme, takto:

$\mathsf{J} = \{x \in \mathbf{R}; a \le x \le b\} = \langle a, b\rangle$ — uzavřený,
$\mathsf{J} = \{x \in \mathbf{R}; a < x < b\} = (a, b)$ — otevřený,
$\mathsf{J} = \{x \in \mathbf{R}; a \le x < b\} = \langle a, b)$ — polouzavřený nebo polootevřený,
$\mathsf{J} = \{x \in \mathbf{R}; a < x \le b\} = (a, b\rangle$ — polouzavřený nebo polootevřený,

$\mathsf{J} = \{x \in \mathbf{R}; x \ge a\} = \langle a, +\infty)$, $\quad \mathsf{J} = \{x \in \mathbf{R}; x > a\} = (a, +\infty)$,
$\mathsf{J} = \{x \in \mathbf{R}; x \le a\} = (-\infty, a\rangle$, $\quad \mathsf{J} = \{x \in \mathbf{R}; x < a\} = (-\infty, a)$,
$\mathsf{J} = \{x \in \mathbf{R}\} = (-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$ — číselná (reálná) osa,

$\mathsf{J} = \{x \in \mathbf{R}; a \le x \le a\} = \langle a, a\rangle = \{a\}$ — jednobodová množina,
$\mathsf{J} = \emptyset$, např. $\mathsf{J} = \{x \in \mathbf{R}; b < x < a\}$ apod.

2) Pozor na zápis intervalů, např. $2 \in (1, 3)$, ale $2 \notin (3, 1)$, protože $(3, 1) = \emptyset$!

1.44 Definice. Nechť $c, \delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$. Otevřený interval $(c - \delta, c + \delta)$ se nazývá *δ-okolí bodu* c; značí se $\mathcal{U}_\delta(c)$. Číslo δ se nazývá poloměr tohoto okolí.

1.45 Poznámky.

1) Nechť $c, x \in \mathbf{R}$. Jejich eukleidovská vzdálenost je $d(c, x) = |c - x|$. Pak δ-okolí bodu c je množina všech bodů $x \in \mathbf{R}$, jejichž vzdálenost od bodu c je menší než δ, tj.

$$\mathcal{U}_\delta(c) = \{x \in \mathbf{R};\ d(c, x) < \delta\}.$$

2) Ekvivalentní zápisy pro $x \in \mathcal{U}_\delta(c)$:

1° $x \in (c - \delta, c + \delta)$,

2° $c - \delta < x < c + \delta$,

3° $|c - x| < \delta$.

1.46 Definice. Nechť $c, \delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$. Sjednocení otevřených intervalů

$$(c - \delta, c) \cup (c, c + \delta)$$

se nazývá *redukované δ-okolí* bodu c; značí se $\mathcal{P}_\delta(c)$. $\mathcal{U}^*_\delta(c)$

1.47 Poznámky.

1) Pro redukované okolí se užívá též název *prstencové* okolí.
2) Redukované okolí bodu c vznikne vyjmutím bodu c z intervalu $(c-\delta, c+\delta)$.
3) $\mathcal{P}_\delta(c) = \{x \in \mathbf{R}\,; 0 < d(c,x) < \delta\}$.
4) Ekvivalentní zápisy pro $x \in \mathcal{P}_\delta(c)$:

   1° $x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$,

   2° $x \in (c-\delta, c+\delta)$, $x \neq c$,

   3° $0 < |c-x| < \delta$.

1.48 Definice. Nechť $c, \delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$.

1° $\langle c, c+\delta) = \mathcal{U}_\delta^+(c)$ — pravé δ-okolí bodu c,

2° $(c-\delta, c\rangle = \mathcal{U}_\delta^-(c)$ — levé δ-okolí bodu c,

3° $(c, c+\delta) = \mathcal{P}_\delta^+(c)$ — pravé redukované δ-okolí bodu c,

4° $(c-\delta, c) = \mathcal{P}_\delta^-(c)$ — levé redukované δ-okolí bodu c.

1.49 Poznámky.

1) V případě, že nezáleží na velikosti poloměru okolí, vynecháme ho v označení. Jedná se pak o okolí, které má nějaký kladný poloměr:
   $\mathcal{U}(c)$ — okolí bodu c, $\mathcal{P}(c)$ — redukované okolí bodu c,
   $\mathcal{U}^+(c)$, $\mathcal{U}^-(c)$ — pravé, levé okolí bodu c,
   $\mathcal{P}^+(c)$, $\mathcal{P}^-(c)$ — pravé, levé redukované okolí bodu c.
2) Zatím jsme definovali okolí bodu $c \in \mathbf{R}$ jako symetrický otevřený interval délky $2\delta, \delta > 0$, kde c je střed tohoto intervalu. Obecněji lze definovat:

Okolí bodu $c \in \mathbf{R}$ je každý otevřený interval, který tento bod obsahuje.

   V našich úvahách se omezíme většinou na definici 1.44. Navíc platí, že každý otevřený interval, který obsahuje bod c, obsahuje s ním i jeho symetrické okolí (viz 1.52).

1.50 Definice. Nechť X je množina a $\mathcal{T}$ je systém všech podmnožin množiny X, který má následující vlastnosti:

1° $\emptyset \in \mathcal{T}, \mathsf{X} \in \mathcal{T}$;

2° $\mathsf{M}_i \subset \mathcal{T}, i = 1, \dots, n \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n \mathsf{M}_i \in \mathcal{T}$;

3° $\{\mathsf{M}_\alpha\} \subset \mathcal{T}$ je libovolný systém množin $\mathsf{M}_\alpha \in \mathcal{T}$, pak $\bigcup_\alpha \mathsf{M}_\alpha \in \mathcal{T}$.

Pak $\mathcal{T}$ se nazývá *topologie* na X, množina X s topologií $\mathcal{T}$ se nazývá *topologický prostor* a prvky systému $\mathcal{T}$ se nazývají *otevřené* množiny.

Poznámka. Systém $\{\mathsf{M}_\alpha\} \subset \mathcal{T}$ z 1.50 3° může být konečný nebo nekonečný.