9. Podílová tělesa

1. Dokažte, že každý netriviální podokruh komutativního tělesa je vždy obor integrity.

2. Buď $n > 0$ celé číslo. Ukažte, že $\{a + b\sqrt{n};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ je obor integrity, jehož podílové těleso je izomorfní $\{c + d\sqrt{n};\ c, d \in \mathbb{Q}\}$.

3. Komplexní čísla s racionálními koeficienty tvoří podtěleso $\mathbb{C}$, označme ho $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$. Nalezněte vlastní podokruh $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ takový, že jeho podílové těleso je s ním izomorfní.

4. Charakterizujte podílové těleso okruhu tvořeného komplexními čísly tvaru $\{a + 2b\mathrm{i};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

5. Buď R komutativní okruh a G podmonoid $R(\cdot)$, který neobsahuje 0_R. Položte $F = R \times G$, a na F definujte operace $+$ a $\cdot$ tak, že $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$ pro libovolná (a, b) a (c, d) z F. Na F definujte ekvivalenci $\sim$ tak, že $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow$ existuje $u \in G$ takové, že $uad = ubc$. Doplňte definici unární a nulárních operací, a ukažte, že lemmata 9.2—9.5 platí i v tomto obecnějším případě. Okruh $F/\sim$ se nazývá *podílovým okruhem okruhu R vzhledem ke G*, označme ho třeba S. Ukažte, že $r \to \frac{r}{1}$ je homomorfismus R do S a že G se takto zobrazí na invertibilní prvky S.

6. Proveďte konstrukci z cvičení 5 pro $R = \mathbb{Z}_6$ a $G = \{1, 2, 4\}$. Kolik bude mít vzniklý podílový okruh prvků?

7. Uvažte opět konstrukci z cvičení 5. Ukažte, že $r \to \frac{r}{1}$ je vnoření R do S právě když zobrazení $R \to R$, $r \to g \cdot r$, je prosté pro každé $g \in G$ (čili když všemi prvky z G lze krátit).

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Řešení

1. Takový podokruh nemá dělitele nuly.

2. Obor integrity to je podle cvičení 1. Jeho podílové těleso je podle 9.10 izomorfní množině všech $(a + b\sqrt{n}) \cdot (c + d\sqrt{n})^{-1}$, přičemž odmocninu lze z jmenovatele odstranit běžnými úpravami.

3. Nejjednodušším příkladem je okruh Gaussových celých čísel $a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

4. Daný okruh je podokruhem $\mathbb{C}[\mathrm{i}]$ a $\mathbb{C}[\mathrm{i}]$ je nejmenší těleso, které ho obsahuje. Proto je podílové těleso izomorfní $\mathbb{C}[\mathrm{i}]$.

5. 9.2—9.5 lze prakticky beze změny zopakovat. Homomorfismus se ověří stejně jako v 9.7. Přitom $\frac{g}{1} \cdot \frac{1}{g} = \mathbf{1}$ pro každé $g \in G$.

6. Bude mít pouze tři prvky, a to $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$ (z $2 \cdot 3 = 2 \cdot 0$ plyne $\frac{3}{1} = \frac{0}{1}$).