6. Grupy a jejich podgrupy

1. V grupě S_3 uvažte podgrupu $H = \{(1)(2\ 3), (1)(2)(3)\}$. Určete levé a pravé rozkladové třídy H. Je H normální podgrupa S_3?

2. Buď a, b prvky grupy G a H podgrupa G. Ověřte, že $Ha = Hb$ právě když $a^{-1}H = b^{-1}H$.

3. Zjistěte, zda grupa A_7 obsahuje podgrupu řádu 16.

4. Dokažte, že $B \subseteq G$ je levá rozkladová třída podgrupy H v G právě když $B^{-1} = \{b^{-1};\ b \in B\}$ je pravá rozkladová třída H v G.

5. Dokažte, že permutace $\varphi \in S_n$ je sudá právě když obsahuje sudý počet cyklů liché délky.

6. Nakreslete si Hasseův diagram všech podgrup A_4. Kolik jich je? Které z nich jsou normální?

7. Buď G grupa. Dokažte, že pro každé $a \in G$ je zobrazení $\varphi_a : g \to aga^{-1}$ automorfismus grupy G.

8. Buď G grupa. Množina $\mathbf{Z}(G) = \{a \in G;\ ga = ag\}$ se nazývá centrum grupy G. Dokažte, že $\mathbf{Z}(G)$ je normální podgrupa G. Dokažte, že $a \in \mathbf{Z}(G)$ právě když a není konjugováno s žádným jiným prvkem.

9. Automorfismy φ_a (viz cvičení 6) se nazývají vnitřní. Dokažte, že všechny vnitřní automorfismy tvoří normální podgrupu grupy G. Dokažte, že zobrazení $a \to \varphi_a$ je homomorfismus, jehož jádro je centrem $\mathbf{Z}(G)$.

10. Uvažte permutace $(1\ 2\ 3)(4)$ a $(1\ 3\ 2)(4)$. Rozhodněte, zda jsou konjugovány v S_4 a zda jsou konjugovány v A_4.

11. Grupa G se nazývá komutativní, jestliže $ab = ba$ pro každé $a, b \in G$. Ověřte, že v komutativní grupě jsou všechny podgrupy normální.

12. Množina $\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\} \subset \mathbb{C}$ je komutativní podgrupa $\mathbb{C}^*(\cdot, ^{-1}, 1)$. Ověřte, že tato podgrupa je cyklická.

13. Z lineární algebry víte, že množina všech transpozic $(i\ j)$ generuje grupu S_n. Ukažte, že množina všech trojcyklů $(i\ j\ k)$ generuje A_n. Ke generaci S_n stačí $n-1$ transpozic. Jakého minimálního počtu trojcyklů je třeba ke generaci A_n?

14*. Podobně jako komplexní čísla rozšiřují čísla reálná, kvaterniony rozšiřují čísla komplexní. Množinou kvaternionů $\mathbb{H}$ se obvykle rozumí čísla tvaru $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$, kde a, b, c, d jsou reálná. Přitom sčítání se definuje po složkách a násobení tak, že $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$ a $\mathrm{ij} = \mathrm{k}$, $\mathrm{jk} = \mathrm{i}$, $\mathrm{ki} = \mathrm{j}$, $\mathrm{ji} = -\mathrm{k}$, $\mathrm{kj} = -\mathrm{i}$ a $\mathrm{ik} = -\mathrm{j}$. Položme $(a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k})^{-1} = \frac{a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ a $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Ukažte, že $\mathbb{H}^*(\cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa. Ukažte, že množina $\{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}, -1, -\mathrm{i}, -\mathrm{j}, -\mathrm{k}\}$ tvoří podgrupu $\mathbb{H}^*$. O této podgrupě dokažte, že není komutativní, avšak splňuje vlastnost, že každá podgrupa je normální.

15*. Grupa se nazývá jednoduchá, jestliže neobsahuje žádné vlastní normální podgrupy. Ukažte, že A_5 je jednoduchá a A_4 jednoduchá není. Lze dokonce dokázat, že A_n je jednoduchá pro každé $n \geq 5$.

Řešení

1. Levé: $\{(1)(2\ 3),(1)(2)(3)\}$, $\{(1\ 2)(3),(1\ 2\ 3)\}$ a $\{(1\ 3)(2),(1\ 3\ 2)\}$. Pravé: $\{(1)(2\ 3),(1)(2)(3)\}$, $\{(1\ 2)(3),(1\ 3\ 2)\}$ a $\{(1\ 3)(2),(1\ 2\ 3)\}$. H není normální podgrupa.

2. $ab^{-1}=(a^{-1})^{-1}b^{-1}$, takže $a\equiv b \operatorname{rmod} H$ právě když $a^{-1}\equiv b^{-1} \operatorname{lmod} H$.

3. Neobsahuje, neboť 16 nedělí $|A_7|$.

4. $B=Ha \Leftrightarrow B^{-1}=a^{-1}H^{-1}$, ovšem $H^{-1}=H$.

5. Ať $\varphi=\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_k$ je úplná dekompozice permutace $\varphi\in S_n$. Pak $\operatorname{sgn}(\varphi)=\prod\operatorname{sgn}(\varphi_i)$ a $\operatorname{sgn}(\varphi_i)=1$ pro cykly sudé délky a $\operatorname{sgn}(\varphi_i)=-1$ pro cykly liché délky.

6. 10 podgrup, z toho 3 normální.

7. $\varphi_a(gh)=agha^{-1}=aga^{-1}aha^{-1}=\varphi_a(g)\varphi_a(h)$.

8. $ga=ag$ právě když $g^{-1}ag=g$. Tudíž $g^{-1}ag\in\mathbf{Z}(G)$ pro každé $a\in\mathbf{Z}(G)$. Je-li $a,b\in\mathbf{Z}(G)$ a $g\in G$, tak $gab=agb=abg$ a $ga^{-1}=(ag^{-1})^{-1}=(g^{-1}a)^{-1}=a^{-1}g$. $\mathbf{Z}(G)$ je tedy normální podgrupa.

9. $\varphi_a\varphi_b=\varphi_{ab}$ pro všechna $a,b\in\mathbf{Z}(G)$, $\varphi_a=\mathrm{id}_G$ právě pro $a\in\mathbf{Z}(G)$.

10. V S_n ano, v A_n ne.

11. Je-li H podgrupa G, tak $aHa^{-1}=aa^{-1}H=1\cdot H=H$ pro každé $a\in G$.

12. $\mathrm{i}^0=1$, $\mathrm{i}^{-1}=\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^2=-1$, $\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$.

13. Toto tvrzení lze dokázat mnoha různými způsoby. Nejjednodušší důkaz, že trojcykly generují A_n, je pravděpodobně tento: Zobrazení $\varphi\in S_n$ patří do A_n právě když jej lze vyjádřit jako složení sudého počtu transpozic. Stačí tedy ukázat, že každé složení dvou transpozic lze vyjádřit jako složení trojcyklů. Buď $(a\ b)$ a $(c\ d)$ dvě transpozice. Je-li $\{a,b\}=\{c,d\}$, vznikne složením identita. Má-li $\{a,b\}\cap\{c,d\}$ právě jeden bod, je $(a\ b)\circ(c\ d)$ trojcyklus. Jsou-li $\{a,b\}$ a $\{c,d\}$ disjunktní množiny, vyjádříme $(a\ b)\circ(c\ d)$ jako $(a\ b)\circ(a\ c)\circ(a\ c)\circ(c\ d)$.

Minimální nutný počet trojcyklů je $n-2$ (předpokládáme $n\geq 3$) – mohou to například být $(1\ 2\ 3),(1\ 2\ 4),\dots,(1\ 2\ n)$.

15. A_4 není jednoduchá, neboť Kleinova grupa je její vlastní normální podgrupa. Ať N je netriviální normální podgrupa A_5. Každá neidentická sudá permutace na pěti bodech je jednoho z typů (3,1,1), (2,2,1) a (5).

1) N obsahuje trojcyklus — například trojcyklus $\alpha=(1\ 2\ 3)$. Je-li $\beta=(a\ b\ c)$ jiný trojcyklus v A_5, tak jistě $\beta=\varphi\alpha\varphi^{-1}$ pro nějaké $\varphi\in S_5$. Položíme-li $\varphi_1=\varphi\circ(4\ 5)$, tak také platí $\beta=\varphi_1\alpha\varphi_1^{-1}$. Protože φ i φ_1 mají opačné znaménko, můžeme předpokládat, že $\beta=\varphi\alpha\varphi^{-1}$ pro $\varphi\in A_5$, takže $\beta\in N$ a $N=A_5$ dle cvičení 13.
2) Ať N obsahuje permutaci typu $(2,2,1)$, například permutaci $\gamma=(1\ 2)(3\ 4)(5)$. Položme $\delta=(1\ 2)(4\ 5)$. Pak $\delta\gamma\delta=\delta\gamma\delta^{-1}$ je rovno $(1\ 2)(3\ 5)$ a leží v N, takže $\delta\gamma\delta\gamma$ je trojcyklus z N, a proto lze použít (1).
3) N obsahuje pěticyklus, například $\epsilon=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$. Pak $\eta=(3\ 4\ 5)\circ\epsilon\circ(3\ 5\ 4)$ je rovno $(1\ 2\ 4\ 5\ 3)$ a leží v N. Tudíž i $\epsilon\circ\eta^{-1}=(4\ 3\ 1)$ leží v N, takže lze opět použít (1).