4. Uspořádané množiny, svazy a Galoisova korespondence

1. Buď $(M, \leq)$ uspořádaná množina a $\lessdot$ příslušná relace pokrytí.

(i) Ukažte, že tranzitivní reflexivní uzávěr $(\lessdot \cup \mathrm{id}_M)^+$ je uspořádání M.
(ii) Je-li M konečná, ukažte, že $\leq$ se rovná $(\lessdot \cup \mathrm{id}_M)^+$.

2. Ať v $\mathbb{N}$ je $a \prec b$ právě když a dělí b. Ukažte, že $\prec$ je uspořádání $\mathbb{N}$. Je to svaz?

3. Konečnou uspořádanou množinu lze zadat relací pokrytí (viz cvičení 1). Relace pokrytí je antisymetrická a antireflexivní. Najděte antisymetrickou a antireflexivní relaci, jejíž tranzitivní reflexivní uzávěr není uspořádání.

4. Buď $M = \{a, b, c\}$. Najděte uspořádání $\leq$ na M tak, že $(M, \leq)$ není svaz. Lze takové uspořádání, jež není svazem, nalézt i na $M' = \{a, b\}$?

5. Najděte svaz, který není izomorfní svazu L^{op}. Kolik musí mít L nejméně prvků?

6. Buď dána množina M. Uvažme množinu $\mathcal{L}(M)$ všech svazů na M. Pro $A, B \in \mathcal{L}(M)$ značí $A \simeq B$, že A a B jsou izomorfní. Ukažte, že $\simeq$ je ekvivalence na $\mathcal{L}(M)$. Určete počet prvků $\mathcal{L}(M)/\simeq$ (tj. počet ekvivalenčních tříd), obsahuje-li M

(i) 1 prvek,
(ii) 2 prvky,
(iii) 3 prvky,
(iv) 4 prvky,
(v) 5 prvků.

7. Uvažte uzávěrový systém $\mathcal{C}$ popsaný v cvičení 1.6 a zkoumejte svaz $(\mathcal{C}, \subseteq)$. Dokažte, že tento svaz není izomorfní opačnému svazu. Najděte všechny množiny $A \in \mathcal{C}$ takové, že

(i) $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ je uzávěrový systém,
(ii) $(\mathcal{C} \setminus \{A\}, \subseteq)$ je navíc svaz, který je izomorfní svému opačnému svazu.

8. Protože všechny ekvivalence na M tvoří uzávěrový systém, je množina všech ekvivalencí na M svaz vzhledem k uspořádání inkluzí. Nakreslete si Hasseův diagram tohoto svazu, má-li M dva, tři a čtyři body. Kolik mají tyto svazy prvků?

9. Buď $f : M \to L$ a $g : L \to T$ antiizomorfismy svazů M, L a T. Ukažte, že $g \circ f : M \to T$ je izomorfismus svazů.

10. Najděte dva svazy L a M a zobrazení $f : L \to M$ takové, že f je monotonní, ale není homomorfismus.

11. Buď ρ kongruence svazu $M = M(\wedge, \vee)$. Dokažte, že každá rozkladová třída ρ tvoří podsvaz.

12. Uvažte svazy L_1 a L_2 na $\{0, a, b, c, d, 1\}$, kde L_1 je určen relacemi pokrytí $0 \lessdot a$, $0 \lessdot b$, $a \lessdot c$, $b \lessdot d$, $c \lessdot 1$, $d \lessdot 1$, a v L_2 platí navíc ještě $a \lessdot d$. Nakreslete si Hasseovy diagramy a rozhodněte, které z následujících rozkladů určují kongruenci svazu.

(a) $\{\{0, a, b\}, \{1, c, d\}\}$,
(b) $\{\{0\}, \{1\}, \{b, d\}, \{a, c\}\}$,

(c) $\{\{0,b,d\},\{1,c\}\,\{a\}\}$,
(d) $\{\{0,b\},\{a,c,d,1\}\}$,
(e) $\{\{0,b\},\{1,c\},\{a,d\}\}$,
(f) $\{\{0,a,c\},\{1,b,d\}\}$.

Řešení

1. (i) Označme $(\lessdot \cup \mathrm{id}_M)^+$ symbolem $\preccurlyeq$. Pro $k > 1$ z $a_1 \lessdot a_2 \lessdot \cdots \lessdot a_k$ plyne $a_1 < a_k$, proto z $a \preccurlyeq b$ plyne $a \leq b$. Je-li $a \preccurlyeq b$ a $b \preccurlyeq a$, je $a \leq b$ a $b \leq a$, a tedy $a = b$. (ii) Pro $a \leq b$ hledejme největší k, že existují $c_1, \ldots, c_k \in M$ takové, že $a = c_1 < \cdots < c_k = b$. Protože M je konečná, tak takové největší k existuje, a navíc $c_i \lessdot c_{i+1}$ pro každé $1 \leq i < k$.

2. Je to svaz.

3. Například $\rho = \{(a,b),(b,c),(c,a)\}$.

4. Například uspořádání s pokrytím $\{(a,b),(a,c)\}$. Na M' lze nalézt právě jedno takové uspořádání, a to $\mathrm{id}_{M'}$.

5. 5.

6. (i) 1, (ii) 1, (iii) 1, (iv) 2, (v) 5.

7. (i) $\{a\}$ nebo $\{a,b\}$ nebo $\{a,b,c\}$ nebo $\{c,d\}$.
(ii) $\{a\}$ nebo $\{a,b\}$ nebo $\{a,b,c\}$.

8. 2, 5 a 15.

9. Jsou-li $a, b \in M$, tak $gf(a \wedge b) = g(f(a) \vee f(b)) = (gf(a)) \wedge (gf(b))$.

10. Například ať L na $\{a,b,c,d\}$ je dán pokrytím $a \lessdot b$, $a \lessdot c$, $b \lessdot d$, $c \lessdot d$, a M na $\{a',b',d'\}$ je dán pokrytím $a' \lessdot b' \lessdot d'$. Ať $f(x) = x'$ pro $x \in \{a,b,d\}$ a $f(c) = b'$.

11. Buď $a,b,c \in M$ a ať je $\{b,c\} \subseteq [a]_\rho$. Pak z $a\rho b$, $a\rho c$, $a \vee a = a = a \wedge a$ a z $(b \vee c, a \vee a) \in \rho$, $(b \wedge c, a \wedge a) \in \rho$ dostáváme $b \vee c \in [a]_\rho$ a $b \wedge c \in [a]_\rho$.

12. V případě L_1 určují kongruence pouze rozklady (b) a (f), zatímco v případě L_2 to jsou kongruence (d), (e) a (f).