2. Operace, algebry, homomorfismy a kongruence

Na množinách $P_1 = \{0,1\}$, $P_2 = \{0,1,2,3\}$ a $P_3 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ je dána operace $*$ následujícími tabulkami.

$*$	0	1
0	0	1
1	0	0

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	0	2	0	2
2	0	3	0	3
3	0	0	0	0

$*$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	2	4	6	0	2	4	6
2	0	3	4	7	0	3	4	7
3	0	4	0	4	0	4	0	4
4	0	5	6	7	0	5	6	7
5	0	6	0	6	0	6	0	6
6	0	7	0	7	0	7	0	7
7	0	0	0	0	0	0	0	0

1. Uvažte $*$ na P_2. Vypište všechny podmnožiny uzavřené na $*$.

2. Uvažte $*$ na P_3. Rozhodněte, které následující podmnožiny jsou uzavřené na $*$:

(i) $\{0\}$,
(ii) $\{0,3,4,7\}$,
(iii) $\{0,2,3,4,5,6,7\}$,
(iv) $\{0,2,4\}$.

3. U následujících zobrazení $\varphi : P_i \to P_j$, kde $1 \le i,j \le 3$, rozhodněte, zda jsou slučitelná s $*$.

(i) $\varphi : P_2 \to P_1$ a $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$, $\varphi(1) = \varphi(3) = 1$.
(ii) $\varphi : P_3 \to P_3$ a $\varphi(0) = \varphi(4) = 0$, $\varphi(1) = \varphi(5) = 2$, $\varphi(2) = \varphi(6) = 4$, $\varphi(3) = \varphi(7) = 6$.
(iii) $\varphi : P_2 \to P_3$ a $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 3$, $\varphi(2) = 4$, $\varphi(3) = 6$.
(iv) $\varphi : P_1 \to P_3$ a $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 7$.

4. (i) Nalezněte všechny ekvivalence P_2, které jsou slučitelné s $*$.
(ii) Nalezněte alespoň jednu relaci na P_2, která není ekvivalencí, ale je slučitelná s $*$.

5. Na P_2 definujte operaci $\circ$ tak, aby $(a \circ b) * 1 = a * (b * 1)$ pro všechna $a, b \in P_2$. Dokažte, že $P_2(\circ)$ je pologrupa.

6. Na *Bool* definujte operaci odpovídající logickému 'OR'. Bude to monoid? Bude mít neutrální prvek?

7. Buď $\mathbb{A}$ abeceda a ať pro každé slovo $a \in \mathbb{A}$ je definováno slovo $t_a \in \mathbb{A}^*$. Ukažte, že existuje právě jeden endomorfismus $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{A}^*)$ takový, že $\varphi(a) = t_a$ pro všechna $a \in A$.

8. Najděte všechny podalgebry monoidu S_3.

9. Dokažte, že zobrazení τ definované v D není homomorfismem, je-li Ω nekonečná množina.

10. Určete $\mathrm{Aut}(C_\Omega)$, kde C_Ω je podpologrupa konstantních zobrazení transformačního monoidu T_Ω.

11. Buď $\varphi : S \to T$ surjektivní homomorfismus pologrup. Je-li $e \in S$ neutrální prvek, dokažte, že $\varphi(e)$ je neutrální v T. Na příkladu ukažte, že není-li homomorfismus φ surjektivní, nemusí toto tvrzení platit.

12. V transformačním monoidu T_Ω charakterizujte transformace, jež jsou zleva invertibilní, a transformace, jež jsou zprava invertibilní.

Odpovědi

1. $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0,2\}$, $\{0,3\}$, $\{0,2,3\}$, $\{0,1,2,3\}$.

2. (i–iii) uzavřené, (iv) neuzavřená.

3. (i) ano, (ii) ano, (iii) ne (uvaž $2 * 1$), (iv) ano.

4. (i) Ekvivalence id_{P_2}, P_2^2 a ekvivalence daná rozkladem $\{\{0,2\},\{1,3\}\}$.
(ii) Například $\{\{0,0\},\{1,2\},\{2,0\},\{3,2\}\}$.

5. Sestrojením tabulky $\circ$ se zjistí, že 0 je neutrální prvek a že $a \circ 3 = 3 = 3 \circ a$ pro každé $a \in P_2$. Proto $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ kdykoliv alespoň jeden z prvků a, b, c je roven 0 nebo 3. Asociativní zákon pak stačí ověřit ve zbývajících 8 případech. (Jsou samozřejmě možné i jiné důkazy, uvedený však nevyžaduje žádné znalosti navíc.)

6. Monoid s neutrálním prvkem F.

7. $\varphi(a_1 \dots a_n) = t_{a_1} \dots t_{a_n}$.

8. $\{\mathrm{id}\}$, $\{\mathrm{id}, (0\ 1)\}$, $\{\mathrm{id}, (0\ 2)\}$, $\{\mathrm{id}, (1\ 2)\}$, $\{\mathrm{id}, (0\ 1\ 2), (0\ 2\ 1)\}$, S_3.

9. Je-li ω permutace nekonečné množiny Ω, tak jistě existují takové transformace f a g množiny Ω, že $\omega = f \circ g$ a že ani f ani g nejsou permutace. Potom ovšem platí $\tau(f \circ g) = \tau(\omega) = T$ a $\tau(f) \cdot \tau(g) = F \cdot F = F$.

10. S_{C_Ω}.

11. Ať je φ surjektivní homomorfismus a ať $e \in S$ je neutrální. Je-li $t \in T$ a $t = \varphi(s)$, tak $\varphi(e) \cdot t = \varphi(e) \cdot \varphi(s) = \varphi(e \cdot s) = \varphi(s) = t$. Jako protipříklad stačí zvolit T tak, aby obsahoval takový prvek $a \in T$, který není neutrální, ale splňuje $a \cdot a = a$, a pak položit $\varphi(s) = a$ pro každé $s \in S$. Například, je-li $T = T_\Omega$, tak za a lze zvolit libovolné konstatní zobrazení.

12. Transformace $f \in T_\Omega$ je zleva invertibilní právě když se jedná o injektivní zobrazení, a zprava invertibilní právě když se jedná o surjektivní zobrazení.