1. Uzávěrové systémy, relace a ekvivalence

1. Buď $A = \{a, b, c, d\}$. Jsou

(i) $\{\{a,b\},\{c,d\},\emptyset,\{b,d\},\{b\},\{d\}\}$,
(ii) $\{\{a,b,c,d\},\emptyset\}$,
(iii) $\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,c,d\}\}$,
(iv) $\{\{a,b,c\},\{a,b,c,d\},\{b\},\{d\}\}$

uzávěrové systémy nad A?

2. Buď $A = \{a, b\}$. Pak existuje právě jeden systém $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ takový, že

(i) $A \in \mathcal{C}$ a
(ii) $\mathcal{C}$ není uzávěrový systém nad A.

Najděte jej!

3. Buď $A = \{a, b, c\}$. Nalezněte alespoň jeden uzávěrový systém $\mathcal{C}$ nad A takový, že pro některá $B, C \in \mathcal{C}$ není $B \cup C \in \mathcal{C}$.

4. Postupným zobecňováním se dostáváme od přímky, roviny a trojrozměrného prostoru k n–rozměrnému eukleidovskému prostoru, od n–rozměrného eukleidovského prostoru k metrickým prostorům, a od metrických prostorů k prostorům topologickým. Všude jsou definovány tzv. uzavřené množiny. Systém uzavřených množin je vždy uzávěrový systém. Přitom sjednocení konečného počtu uzavřených množin je opět uzavřená množina. Tuto vlastnost ale obecně uzávěrové systémy nemají – viz cvičení 3 nebo 5.

5. Uzavřeným intervalem zde rozumíme každou konvexní uzavřenou podmnožinu reálné přímky $\mathbb{R}$. Buď $n \geq 1$. Ukažte, že

(i) všechny konvexní množiny v $\mathbb{R}^n$ tvoří uzávěrový systém, a že
(ii) všechny množiny tvaru $I_1 \times \cdots \times I_n$, kde $I_1, \ldots, I_n$ jsou uzavřené intervaly, tvoří spolu s prázdnou množinou také uzávěrový systém.

6. Ověřte nejprve, že $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$ je uzávěrový systém nad $\{a,b,c,d\}$. Určete pak $\mathrm{cl}_{\mathcal{C}}(B)$, jestliže

(i) $B = \{a,b,c\}$,
(ii) $B = \{b\}$,
(iii) $B = \{b,d\}$.

7. Všechny uzávěrové systémy nad množinou A tvoří uzávěrový systém nad $\mathcal{P}(A)$ – označme ho například $\mathcal{B}$. Buď $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Dokažte, že $\mathrm{cl}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) = \{\cap(C; C \in \mathcal{F})$, kde $\mathcal{F}$ probíhá všechny neprázdné podmnožiny $\mathcal{E}\} \cup \{A\}$. Ukažte pak, že $\mathrm{cl}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(A)$ právě když pro každé $a \in A$ obsahuje $\mathcal{E}$ množinu $A \setminus \{a\}$.

8. Tvoří antireflexivní (resp. antisymetrické) relace na A uzávěrový systém nad A^2?

9. K relaci $\rho = \{(a,b),(b,c),(d,e)\}$ na $\{a,b,c,d,e\}$ najděte reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr. Jaké jsou ekvivalenční třídy ekvivalence generované ρ?

10. Jaké je jádro zobrazení $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

11. Buď A a B stejně velké konečné množiny a ať $\mathbb{N}_0$ označuje množinu celých čísel $\{0, 1, 2, \dots\}$. Dokažte, že zobrazení $f : A \to B$ je injektivní právě když je surjektivní právě když je bijektivní. Najděte nějaké příklady jednoduchých zobrazení $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, které jsou injektivní a nejsou surjektivní, a naopak které jsou surjektivní a nejsou injektivní.

Odpovědi

1. (i) ne, chybí A; (ii) ano; (iii) ano; (iv) ne, neboť například $\{b\} \cap \{d\} = \emptyset$ v systému neleží.

2. $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

3. Například $\{\{a, b, c\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$.

6. (i) $\{a, b, c\}$; (ii) $\{a, b\}$; (iii) $\{a, b, c, d\}$.

7. $\mathcal{E}$ je systém podmožin A, a $\mathrm{cl}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})$ obsahuje $\mathcal{E}$ spolu se všemi množinami, které leží v každém uzávěrovém systému, jehož je $\mathcal{E}$ podsystémem. Ovšem $\cap C$, $C \in \mathcal{F}$, padne pro $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ do každého takového uzávěrového systému. Současně je $\{\cap C;\ C \in \mathcal{F}$ a $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}\} \cup \{A\}$ uzávěrovým systémem, takže je to nejmenší uzávěrový systém, který obsahuje $\mathcal{F}$, a tedy je roven $\mathrm{cl}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})$.

Žádná množina typu $A \backslash \{a\}$, $a \in A$, nemůže být rovna průniku dvou množin, které by byly obě od ní různé. Proto, je-li $\mathrm{cl}_{\mathcal{B}}\, \mathcal{E} = \mathcal{P}(A)$, musí $\mathcal{E}$ obsahovat všechny takové množiny. Naopak, jejich průnikem se zjevně dostane každá množina různá od A.

8. Ne – jsou sice uzavřené na průniky, ale neobsahují A^2.

9. Reflexivní uzávěr ρ je $\{(a, b), (b, c), (d, c), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$, symetrický $\{a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (d, e), (e, d)\}$ a tranzitivní $\{(a, b), (a, c), (b, c), (d, e)\}$. Třídy ekvivalence generované ρ jsou $\{a, b, c\}$ a $\{d, e\}$.

10. $(a, b) \in \ker \sin$ právě když $a' = b'$ nebo $\frac{a'+b'}{2} \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, kde a', b' jsou ta jednoznačně určená reálná čísla z polouzavřeného intervalu $\langle 0, 2\pi)$, jež se liší od a, resp. b o celočíselný násobek 2π.

11. Označme k společný počet prvků množin A i B. Injektivní zobrazení $f : A \to B$ posílá různé prvky na různé prvky, takže $\mathrm{Im}\, f$ má k prvků, a tedy platí $\mathrm{Im}\, f = B$. Není-li f injektivní, tak $\mathrm{Im}\, f$ naopak má méně než k prvků a $\mathrm{Im}\, f$ je vlastní částí B. Dokázali jsme, že f je injektivní právě když je surjektivní. Příkladem zobrazení $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, které je injektivní, ale není surjektivní, je $x \mapsto x + 1$. Naopak $x \mapsto |x - 1|$ je surjektivní, ale není injektivní.