Je-li $L = L(\wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ 0,1–svaz, nazývá se $a \in L$ *atomem*, jestliže $a \neq \mathbf{0}$ a z $\mathbf{0} \leq b \leq a$ plyne $b = a$ pro každé $b \in L$. Je-li L konečný svaz a $\mathbf{0} \neq b$, tak jistě existuje alespoň jeden atom $a \in L$ takový, že $\mathbf{0} < a \leq b$.

15.1 Lemma. *Buď $S = S(\wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ')$ a $T = T(\wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ')$ dvě Booleovy algebry. Bijektivní zobrazení $\varphi : S \to T$ je izomorfismem právě když pro všechna $a, b \in S$ platí, že $a \leq_S b$ tehdy a jen tehdy, je-li $\varphi(a) \leq_T \varphi(b)$.*

Důkaz. Připomeňme, že podle 4.4 je $\varphi : S(\wedge, \vee) \to T(\wedge, \vee)$ izomorfismus, pokud $a \leq_S b$ je ekvivalentní $\varphi(a) \leq_T \varphi(b)$ pro $a, b \in S$. Je proto třeba ukázat, že pro izomorfismus $\varphi : S(\wedge, \vee) \to T(\wedge, \vee)$ platí $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ a $\varphi(a') = (\varphi(a))'$ pro všechna $a \in S$. Pro každé $b \in T$ existuje $c \in S$, že $\varphi(c) = b$. Protože $\varphi(\mathbf{0}) \wedge b = \varphi(\mathbf{0} \wedge c) = \varphi(\mathbf{0})$, je $\varphi(\mathbf{0})$ nejmenší prvek $T(\wedge, \vee)$. Ovšem $T(\wedge, \vee)$ může mít jen jeden nejmenší prvek, takže $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Podobně $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Zbývá ukázat, že $\varphi(a')$ je komplement $\varphi(a)$. Ovšem $\varphi(a') \wedge \varphi(a) = \varphi(a' \wedge a) = \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a $\varphi(a') \vee \varphi(a) = \varphi(a' \vee a) = \varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. $\square$

Typickým příkladem Booleových algeber je množina $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin množiny X s operacemi průniku, sjednocení a množinovým doplňkem. Konečné Booleovy algebry jsou dokonce vždy takové algebře izomorfní.

Je-li $M = \{u_1, \dots, u_k\}$ nějaká neprázdná konečná podmnožina Booleovy algebry S, klademe $\bigwedge_M = m_1 \wedge \dots \wedge m_k$ a $\bigvee_M = m_1 \vee \dots \vee m_k$. Definitoricky $\bigwedge_\emptyset = \mathbf{1}$ a $\bigvee_\emptyset = \mathbf{0}$.

15.2 Věta. *Buď $S = S(\wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ')$ konečná Booleova algebra a A ať je množina jejích atomů. Definujme zobrazení $\varphi : \mathcal{P}(A) \to S$ tak, že $\varphi(B) = \bigvee_B$ pro všechna $B \subseteq A$. Potom φ je izomorfismus Booleových algeber.*

Důkaz. Definujme $\psi : S \to \mathcal{P}(A)$ tak, že $\psi(s) = \{a \in A;\ a \leq s\}$. Nejprve ukážeme, že $\varphi\psi(s) = s$. Položme $\psi(s) = T$ a $\varphi\psi(s) = \bigvee_T = t$. Pak $t \leq s$. Předpokládejme, že $t < s$. Pak $s = s \wedge \mathbf{1} = s \wedge (t \vee t') = (s \wedge t) \vee (s \wedge t') = t \vee (s \wedge t')$. Z $s \neq t$ plyne $s \wedge t' \neq \mathbf{0}$. Tudíž existuje $a \in A$ takový, že $a \leq s \wedge t'$. Z $a \leq s$ plyne $a \in T$, takže $a \leq t$. Současně ale $a \leq t'$, takže dostáváme $a \leq t \wedge t' = \mathbf{0}$, a to je spor. Je tedy $s = t$ a $\varphi\psi(s) = s$ pro každé $s \in S$.

Nyní dokážeme, že $\psi\varphi(B) = B$ pro všechna $B \subseteq A$. Položme $b = \bigvee_B$ a $T = \psi(b) = \{a \in A;\ a \leq b\}$. Zjevně $T \supseteq B$. Ať $a \in T \setminus B$. Pak $a = a \wedge b = \bigvee_{c \in B}(a \wedge c)$. Ovšem $a \wedge c \leq c$, takže z $a \neq c$ plyne $a \wedge c = \mathbf{0}$, a tedy $a = \mathbf{0}$. Proto $T = B$.

Pro $B \subseteq C \subseteq A$ jistě $\varphi(B) \leq \varphi(C)$ a pro $s \leq t$ jistě $\psi(s) \subseteq \psi(t)$. Podle 15.1 je ψ izomorfismus Booleových algeber. $\square$

Okruh R se nazývá *idempotentní*, jestliže $a^2 = a$ pro každé $a \in R$.

15.3 Tvrzení. *Buď $B(\wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ')$ Booleova algebra. Definujeme na B operace $+$, $\cdot$ tak, že $a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$ a $a \cdot b = a \wedge b$. Položíme dále $-a = a$ pro každé $a \in B$. Potom je $B(+, \cdot, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ komutativní idempotentní okruh charakteristiky 2. Naopak, je-li $B(+, \cdot, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ komutativní idempotentní okruh charakteristiky 2, tak $B(\wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ')$, kde $a \wedge b = a \cdot b$, $a \vee b = a + b + a \cdot b$, $a' = 1 + a$, je Booleova algebra.*

Důkaz. Buď nejprve $B(\wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ')$ Booleova algebra. Pak zjevně $a + b = b + a$, $a + a = \mathbf{0}$, $a + \mathbf{0} = a$. Zbývá ověřit $a + (b + c) = (a + b) + c$ a $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ pro $a, b, c \in B$. Je $a + (b + c) = a + ((b \wedge c') \vee (c' \wedge b)) = (a \wedge ((b \wedge c') \vee (c' \wedge b))') \vee (a' \wedge ((b \wedge c') \vee (c' \wedge b)) = (a \wedge (b' \vee c) \wedge (c \vee b')) \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge c' \wedge b)$. Ovšem $a \wedge (b' \vee c) \wedge (c \vee b') = ((a \wedge b) \vee (a \wedge c')) \wedge (c \vee b') = (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b' \wedge c')$. Je tedy $a + (b + c) = (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c)$. V tomto výraze lze a, b i c vzájemně zaměnit, aniž by se změnila hodnota tohoto výrazu. Vyměníme-li a a c, dostaneme opačnými úpravami, že $a + (b + c)$ je rovno $c + (a + b) = (a + b) + c$. Dále $a \cdot (b + c) = a \wedge ((b \wedge c') \vee (b' \wedge c)) = (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c)$. Ovšem $(a \wedge b) \wedge (a \wedge c)' = a \wedge b \wedge c'$ a $(a \wedge b)' \wedge (a \wedge c) = a \wedge b' \wedge c$.

Na druhou stranu, ať $B(+, \cdot, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je komutativní idempotentní okruh charakteristiky 2. Pak $a \vee a = a + a + a^2 = a$, $(a \vee b) \vee c = a + b + ab + c + ac + bc + abc = a + b + c + bc + ab + ac + abc = a \vee (b \vee c)$, $a \vee \mathbf{1} = a + \mathbf{1} + a = \mathbf{1}$, $a \vee 0 = a$, $a \wedge (b \vee a) = a + ab + ab = a$, $a \vee (b \wedge a) = a + ba + ba = a$, $a \wedge (b \vee c) = a \cdot (b + c + bc) = ab + ac + a^2bc = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Konečně $(a')' = \mathbf{1} + \mathbf{1} + a = a$, $a \vee a' = a + \mathbf{1} + a + a + a^2 = \mathbf{1}$ a $a \wedge a' = a(\mathbf{1} + a) = a + a = \mathbf{0}$. $\square$