Statistika

(MD360P03Z, MD360P03U)
ak. rok 2007/2008

Karel Zvára

karel.zvara@mff.cuni.cz
http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼zvara

23. října 2007

možné příští úlohy statistické indukce

- na hracích kostkách A a B padala šestka nestejně často:
  na kostce A v 17 ze 100 pokusů
  na kostce B v 41 ze 100 pokusů
- je pravděpodobnost šestky rovna 1/6?
  - teorie pravděpodobnosti odvodí teoretickou hodnotu
  - matematická statistika odhadne, prověří představu teorie
- je kostka symetrická, tj. mají všechny stěny kostky stejnou pravděpodobnost?
- kolik potřebujeme nezávislých hodů, abychom s požadovanou spolehlivostí poznali, že je kostka nesymetrická?
- liší se mezi sebou kostky A a B?
- vše založeno na modelu **populace – výběr** [population, sample]

populace a výběr

- model **populace – výběr** umožňuje zobecnění na celou populaci z hodnot zjištěných na vybraných statistických jednotkách (výběr)
- **populace (základní soubor)** – velký soubor, jehož je zpracovávaný soubor **(výběr)** reprezentativním vzorkem
- **reprezentativnost** – frekvence výskytu důležitých doprovodných znaků ve výběru odpovídá jejich frekvenci v populaci
- reprezentativnosti nejlépe dosáhneme tak, že použijeme **prostý náhodný výběr**, kdy každá n-tice prvků populace má stejnou šanci (pravděpodobnost) do výběru se dostat
- na základě výběru tvrdíme něco o populaci

parametry – odhady, statistiky

- podle toho, jakou roli hraje hodnocený soubor, rozlišujeme **charakteristiky**
  - **populační**: vztažené k populaci, mnohdy jen ideální, námi představované, jsou to **parametry** modelu
  - **výběrové**: vztažené k výběru z nějaké populace, jsou to **statistiky** spočítané z výběru
- **statistika** – z výběru spočítaná hodnota (např. součet napozorovaných hodnot, průměr, Giniho index . . .)
- speciálním případem statistik jsou **odhady** odpovídajících populačních **parametrů**,
- příkladem dvojice odhad – parametr je dvojice relativní četnost – pravděpodobnost (např. 17/100 vers. 1/6)
- statistiky se používají při **statistické indukci** (statistickém rozhodování) [statistical inference (decisions)]

základní pojmy

- **pokus** – dobře definovaná situace (postup), která končí jedním z řady možných výsledků (vržená kostka spadne na zem)
- **náhodný pokus** – pokus, u něhož předem nevíme, který výsledek nastane (která strana kostky padne příště?); předpokládá se stabilita relativních četností možných výsledků
- **náhodný jev** – tvrzení o výsledku náhodného pokusu
- **pravděpodobnost** náhodného jevu A – číselné vyjádření očekávání, že výsledkem náhodného pokusu bude právě A
- racionální představa: při velkém počtu opakování pokusu se relativní četnost jevu blíží k pravděpodobnosti tohoto jevu

klasická pravděpodobnost (Laplace)

- **jistý jev** (nastává vždy) lze rozdělit na M *stejně pravděpodobných* neslučitelných (disjunktních) **elementárních jevů** (symetrie)
- každý jev lze složit z těchto **elementárních jevů**
- je celkem M_A **příznivých** jevu A (je z nich složen)
- **klasická definice pravděpodobnosti** (metoda výpočtu)

$$\mathrm{P}(A) = \frac{M_A}{M}$$

- **klasickou pst lze použít jen někdy!** (Sportka, Sazka)

příklad: hrací kostka

- idealizovaná symetrická hrací kostka
  - homogenní
  - přesná krychle
  - těžiště uprostřed
  - každá strana má stejnou pravděpodobnost
- A – padne šestka, B – padne sudé číslo
- $M = 6$
- $M_A = 1$, tedy $\mathrm{P}(A) = 1/6$
- $M_B = 3$, tedy $\mathrm{P}(B) = 3/6 = 1/2$

faktoriál

[FAKTORIÁL(n)] [factorial(n)]

- **faktoriál** $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \qquad 0! = 1$
- kolika způsoby lze uspořádat za sebou n rozlišitelných prvků
- příklady:
  - $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
  - $1! = 1$
- kolika způsoby lze uspořádat za sebou 14 krajů ČR: $14! = 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdots 2 \cdot 1 = 87\ 178\ 291\ 200 = 8{,}7 \cdot 10^{10}$

počet kombinací

[KOMBINACE(n; k)] [choose(n, k)]

- **kombinační číslo** $\binom{n}{k}$ (čti „n nad k“)
- počet k-prvkových podmnožin množiny o n prvcích nezávisle na jejich pořadí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1}$$

- kolika způsoby si mohu z pěti knížek vybrat dvě na dovolenou:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

- kolika způsoby si z oněch pěti mohu vybrat tři knihy? (10)

příklad: losování otázek (1)

- student *neumí* 5 otázek, *umí* 10 otázek
- losuje se dvojice otázek z oněch 15 otázek
- pravděpodobnost $\mathrm{P}(A)$, že student nezná ani jednu z vylosovaných:
- elementární jevy: první losovaná otázka – 15 možností, druhá jen 14 možností, nezáleží na pořadí, tedy dělit 2 (tedy počet kombinací)

$$M = \binom{5+10}{2} = \binom{15}{2} = \frac{15!}{2!13!} = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 105$$

- příznivé elementární jevy: vylosuje obě z pěti, které neumí

$$M_A = \binom{5}{2}\binom{10}{0} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 1 = 10 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \frac{10}{105} = 9{,}5\ \%$$

příklad: losování otázek (2)

- pravděpodobnost $\mathrm{P}(B)$, že zná *právě* jednu otázku

$$M_B = \binom{5}{1} \cdot \binom{10}{1} = 5 \cdot 10 = 50 \Rightarrow \mathrm{P}(B) = \frac{50}{105} = 47{,}6\ \%$$

- pravděpodobnost $\mathrm{P}(C)$, že zná *obě* otázky (*právě dvě*)

$$M_C = \binom{5}{0} \cdot \binom{10}{2} = 1 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \Rightarrow \mathrm{P}(C) = \frac{45}{105} = 42{,}9\ \%$$

- pravděpodobnost $\mathrm{P}(D)$, že zná *aspoň jednu* otázku

$$M_D = M_B + M_C = 50 + 45 = 95 \Rightarrow \mathrm{P}(D) = \frac{95}{105} = 90{,}5\ \%$$

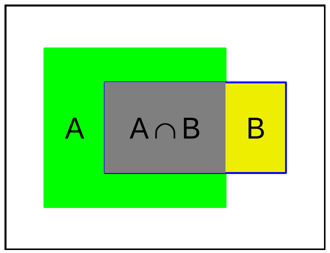
- kontrola: $M_D + M_A = M$

pravidla pro pravděpodobnost (1)

- **sjednocení** jevů $A \cup B$: platí A **nebo** B (aspoň jeden z jevů A, B)
- **průnik** $A \cap B$: platí A a **současně** B (oba jevy A, B současně)

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

- Vennův diagram



$A \cup B$ = celá vybarvená plocha
$\mathrm{P}(A) = 0{,}42$ = zelená + šedivá plocha
$\mathrm{P}(B) = 0{,}24$ = žlutá + šedivá plocha
$\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}16$ = šedivá plocha
$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ = zelená + žlutá + $2 \cdot$ šedivá plocha
$\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}42 + 0{,}24 - 0{,}16 = 0{,}50$

pravidla pro pravděpodobnost (2)

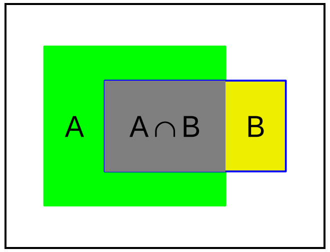
- **neslučitelné jevy**: nemohou nastat nikdy současně, navzájem se vylučují; pro neslučitelné jevy platí

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

- **podmíněná pravděpodobnost** pravděpodobnost jevu A, když už jev B nastal:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

- Vennův diagram



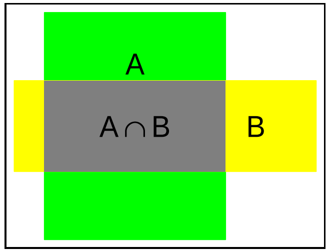
$\mathrm{P}(B) = 0{,}24 =$ žlutá + šedivá plocha
$\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}16 =$ šedivá plocha
$\mathrm{P}(A|B) =$ šedivá vzhledem k (žlutá + šedivá)
$\mathrm{P}(A|B) = 0{,}16/0{,}24 = 0{,}67$, ale $\mathrm{P}(A) = 0{,}42$

nezávislost náhodných jevů

- **nezávislé jevy**: výskyt jednoho jevu **neovlivní** pravděpodobnost výskytu druhého (definice **nezávislosti** náhodných jevů):

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$$

- Vennův diagram



$\mathrm{P}(A) = 0{,}60 =$ zelená + šedivá
$\mathrm{P}(B) = 0{,}40 =$ žlutá + šedivá plocha
$\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}24 =$ šedivá plocha
$\mathrm{P}(A|B) =$ šedivá vzhledem k (žlutá + šedivá)
$\mathrm{P}(A|B) = 0{,}24/0{,}40 = 0{,}60$
$\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B)$
$\Rightarrow$ A a B jsou nezávislé

idealizovaný příklad

- A – jednička ze statistiky, $\mathrm{P}(A) = 0{,}3$
- B – jednička z matematiky, $\mathrm{P}(B) = 0{,}2$
- $A \cap B$ – jednička z obou předmětů, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}1$
- jsou jevy A, B nezávislé? (jsou jedničky ze dvou předmětů nezávislé?) NE, protože $0{,}3 \cdot 0{,}2 \neq 0{,}1$
- jaká je pst jedničky ze statistiky, když už je z matematiky?

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5$$

- pst jedničky z matematiky, když už je ze statistiky: $\mathrm{P}(B|A) = 0{,}1/0{,}3 = 1/3$
- pravděpodobnost, že aspoň jedna jednička:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}4$$

rozdělení náhodné veličiny

- **náhodná veličina** – číselně vyjádřený výsledek náhodného pokusu
- **diskrétní rozdělení** (pro četnosti) určeno seznamem možných hodnot a jejich pravděpodobnostmi:

$$x_1, x_2, \ldots$$
$$\mathrm{P}(X = x_1), \mathrm{P}(X = x_2), \ldots$$

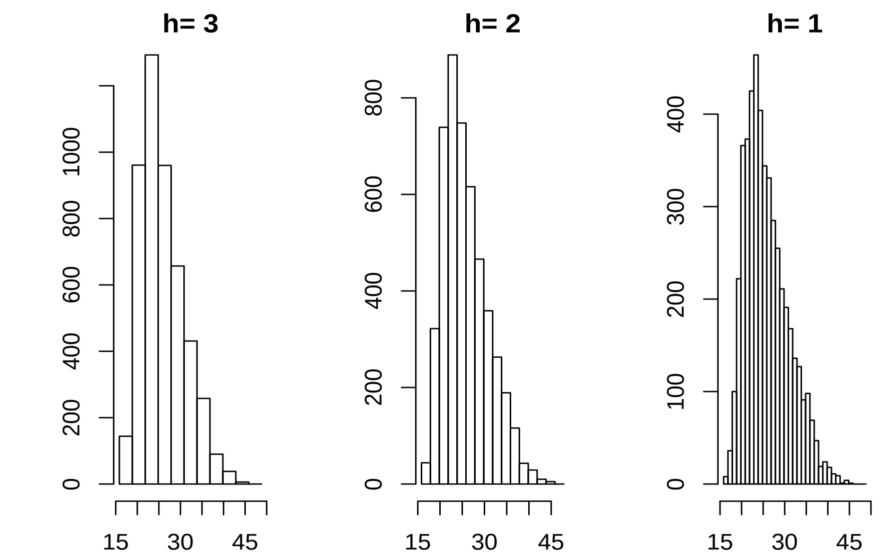
- **spojité rozdělení** (pro spojité měřítko) určeno **distribuční funkcí**

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$$

nebo **hustotou**

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x), \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

věk matek (n=4838)



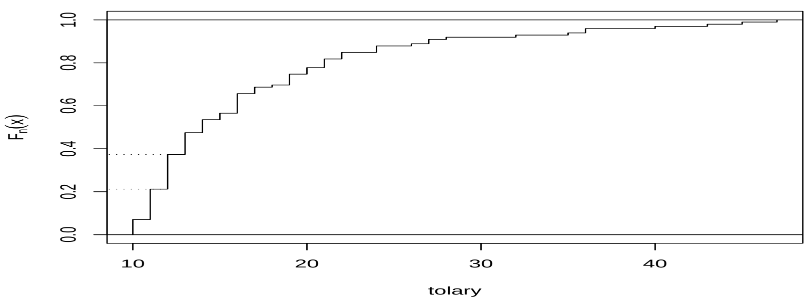
- velká populace, spojitá veličina – intervaly pro třídění mohou být krátké, obálce histogramu relativních četností odpovídá **hustota** $f_X(x)$ [density]
- podobně kumulativním relativním četnostem odpovídá **distribuční funkce** [distribution function]
- bezprostředním výběrovým protějškem distribuční funkce je **empirická distribuční funkce**

$$\boxed{F_n(x) = \frac{\#(x_i \le x)}{n}}$$

- $x_1^* < x_2^* < \ldots < x_m^*$ existující různé hodnoty
  $n_1, n_2, \ldots, n_m$ jejich četnosti $(n = \sum_j n_j)$
  $F_n(x)$ je schodovitá funkce, v bodě x_j^* má skok n_j/n

kumulativní distribuční funkce (tolary)

skoky odpovídají četnostem, např. ve 12 je skok z 0,21 na 0,37 o 16/99=0,16



x_j^*	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
n_j	7	14	16	10	6	3	9	3	1	5	3	
N_j	7	21	37	47	53	56	65	68	69	74	77	
x_j^*	21	22	24	26	27	28	32	35	36	40	43	45	47
n_j	4	3	3	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1
N_j	81	84	87	88	90	91	92	93	95	96	97	98	99

příklad diskrétního rozdělení: známky u zkoušky

X, Y známky ze dvou předmětů

známka k	1	2	3	4
P($X = k$)	0,3	0,4	0,2	0,1
P($Y = k$)	0,3	0,3	0,2	0,2

- z tabulky *nic* nepoznáme o případné závislosti X, Y
- jak jedním číslem charakterizovat úroveň známek?
- obyčejný průměr možných hodnot by X, Y nerozlišil
- použijme **vážený průměr**, kde vahami známek jsou **pravděpodobnosti možných hodnot**
- dostaneme tak **střední hodnoty** X a Y (**populační průměry**)

$$\mu_X = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 = 2{,}1$$
$$\mu_Y = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}2 = 2{,}3$$

charakteristiky rozdělení náhodné veličiny (1)

- **střední hodnota** náhodné veličiny X (populační průměr)
- je to **vážený průměr možných hodnot**
- vahami jsou pravděpodobnosti hodnot

$$\mu_X = \mathrm{E}\,X = x_1 \cdot \mathrm{P}(X = x_1) + x_2 \cdot \mathrm{P}(X = x_2) + \ldots = \sum_j x_j \cdot \mathrm{P}(X = x_j)$$

- operátor E (expectation) aplikovaný na náhodnou veličinu X spočítá vážený průměr jejích hodnot, vahami jsou u diskrétního rozdělení pravděpodobnosti těchto hodnot
- pro spojité rozdělení

$$\mu_X = \mathrm{E}\,X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$$

- **střední hodnota funkce** $Y = g(X)$ náhodné veličiny X vážený průměr **funkčních hodnot**

$$\mathrm{E}\,Y = \mathrm{E}\,g(X) = \sum_k g(x_k)\mathrm{P}(X = x_k)$$

resp. pro spojité rozdělení

$$\mathrm{E}\,Y = \mathrm{E}\,g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

- **populační medián** $\tilde{\mu}$ spojitého rozdělení

$$F_X(\tilde{\mu}) = \mathrm{P}(X \leq \tilde{\mu}) = 0{,}5$$

$\tilde{x}$ číslo, které dělí možné hodnoty náhodné veličiny na dva stejně pravděpodobné intervaly hodnot větších a menších

příklad diskrétního rozdělení: známka u zkoušky

známka k	1	2	3	4	μ	σ^2	σ
$\mathrm{P}(X = k)$	0,3	0,4	0,2	0,1	2,1	0,89	0,943
$\mathrm{P}(Y = k)$	0,3	0,3	0,2	0,2	2,3	1,21	1,100

- jedním číslem charakterizovat kolísání známek (**variabilitu**)
- **(populační) rozptyl** = **vážený průměr čtverců** vzdáleností od střední hodnoty
- vahami jsou pravděpodobnosti

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= (1-2{,}1)^2 \cdot 0{,}3 + (2-2{,}1)^2 \cdot 0{,}4 \\ &\quad + (3-2{,}1)^2 \cdot 0{,}2 + (4-2{,}1)^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}89 = 0{,}943^2 \\ \sigma_Y^2 &= (1-2{,}3)^2 \cdot 0{,}3 + (2-2{,}3)^2 \cdot 0{,}3 \\ &\quad + (3-2{,}3)^2 \cdot 0{,}2 + (4-2{,}3)^2 \cdot 0{,}2 = 1{,}21 = 1{,}1^2\end{aligned}$$

(populační) rozptyl náhodné veličiny X

- vážený průměr čtverců vzdáleností možných hodnot od střední hodnoty

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \mathrm{E}\,(X-\mu_X)^2 \\ &= (x_1-\mu_X)^2\mathrm{P}(X = x_1) + (x_2-\mu_X)^2\mathrm{P}(X = x_2) + \ldots \\ &= \sum_j (x_j-\mu_X)^2\mathrm{P}(X = x_j)\end{aligned}$$

$$\sigma_X^2 = \mathrm{E}\,(X-\mu_X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)\mathrm{d}x$$

- **(populační) směrodatná odchylka** odmocnina z (populačního) rozptylu

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

vlastnosti střední hodnoty a rozptylu

X, Y – náhodné veličiny, a, b konstanty, $b > 0$

$$\mu_{a+X} = \mathrm{E}\,(a+X) = a + \mathrm{E}\,X = a + \mu_X$$
$$\mu_{b\cdot X} = \mathrm{E}\,(b\cdot X) = b\cdot \mathrm{E}\,X = b\cdot \mu_X$$
$$\mu_{X+Y} = \mathrm{E}\,(X+Y) = \mathrm{E}\,X + \mathrm{E}\,Y = \mu_X + \mu_Y$$

Návrat k průměru

$$\sigma^2_{a+X} = \sigma^2_X, \qquad \sigma_{a+X} = \sigma_X$$
$$\sigma^2_{b\cdot X} = b^2\sigma^2_X, \qquad \sigma_{b\cdot X} = |b|\sigma_X$$
$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y + 2\sigma_{X,Y}$$

Návrat k rozptylu

$$\sigma_{X,Y} = \mathrm{E}\,(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) \quad \textbf{kovariance } X, Y$$
$$= (x_1-\mu_X)(y_1-\mu_Y)\mathrm{P}(X=x_1, Y=y_1)$$
$$+ (x_1-\mu_X)(y_2-\mu_Y)\mathrm{P}(X=x_1, Y=y_2) + \dots$$

(sčítá se přes všechny možné dvojice)

nezávislé náhodné veličiny

- připomeňme: náhodné jevy A, B jsou nezávislé, když
$$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\cdot \mathrm{P}(B)$$
- náhodné veličiny X, Y jsou **nezávislé**, když pro **všechny dvojice** možných hodnot (x_i, y_j) platí
$$\mathrm{P}(X=x_i, Y=y_j) = \mathrm{P}(X=x_i)\cdot \mathrm{P}(Y=y_j)$$
- X a Y jsou tedy nezávislé, jsou-li nezávislé jevy $A = \{\text{tvrzení o } X\}$ a $B = \{\text{tvrzení o } Y\}$
- jsou-li X, Y nezávislé, pak
$$\sigma_{X,Y} = 0, \quad \text{tedy} \quad \sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$$
- pro nezávislé náhodné veličiny platí: rozptyl součtu = součet rozptylů

(populační) korelační koeficient

- Pearsonův korelační koeficient
$$r_{x,y} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$
- výběrová kovariance dána vztahem (str. 59)
$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$
- **populační protějšek**
$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$
- ρ_{XY} má stejné vlastnosti jako r_{xy}, zejména platí $|\rho_{XY}| \le 1$
- pro **nezávislé** náhodné veličiny X, Y je vždy $\rho_{XY} = 0$

idealizovaný příklad: známky u zkoušky

sdružené a marginální pravděpodobnosti

	Y				
X	1	2	3	4	$\mathrm{P}(X=k)$
1	0,15	0,10	0,05	0,00	0,3
2	0,10	0,15	0,10	0,05	0,4
3	0,05	0,05	0,05	0,05	0,2
4	0,00	0,00	0,00	0,10	0,1
	0,3	0,3	0,2	0,2	1,0

$$\sigma_{X,Y} = (1-2{,}1)(1-2{,}3)\cdot 0{,}15 + (1-2{,}1)(2-2{,}3)\cdot 0{,}10 + \dots$$
$$+ (4-2{,}1)(3-2{,}3)\cdot 0{,}00 + (4-2{,}1)(4-2{,}3)\cdot 0{,}10 = 0{,}57$$
$$\rho_{X,Y} = \frac{0{,}57}{0{,}943\cdot 1{,}1} = 0{,}55 \qquad \Rightarrow \qquad X \text{ a } Y \text{ jsou závislé}$$