

# Zaklady biostatistiky

(S710P09)

akademický rok 2005/2006

Karel Zvára

Karel.Zvara@mff.cuni.cz

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zvara>

poslední úprava 12. května 2006

statistika:

- **popisná** (deskriptivní): data stručně popsat, něco z dat „vydolat“)
- **induktivní** (konfirmatorní): tvrdit něco nového, zobecnit na větší soubor, záleží na interpretaci

příklady dat:

- **výšky**: výška desetiletých chlapců/dívek
- **děti**: pohlaví, porodní hmotnost a délka, hmotnost a délka v jednom roce, věk otce a matky, počet onemocnění otitidou v prvním roce věku
- **kojení**: hmotnost a délka porodní a ve 24. týdnu, věk a výška obou rodičů, zda těhotenství plánováno, zda dudlík, porodnice

## ● cvičení na počítačích

- od čtvrtka 23. února ve Viničné 7, 1. patro B5
- nutno se přihlásit, přednost mají studenti bez zápočtu
- zápočet za aktivní účast (včetně odevzdávání souborů)
- nutno mít aktivní účet v učebnách, znát svoje heslo
- NCSS 2001 (Number Cruncher Statistical System)

## ● zkouška v B5

- jen se zápočtem, přihlašování přes SIS
- kombinace písemného a ústního zkoušení

## ● literatura

- K. Zvára: Biostatistika. Karolinum

- **konzultace** asi čtvrtek 9:50–10:20 ÚAMVT, Albertov 6, II. patro nebo čtvrtek 12:30-13:00, Sokolovská 83, Karlín (případně po dohodě jindy)

2

co měříme (zjišťujeme) a kde

- měříme na mnoha statistických **jednotkách** (osoba, obec, stát, pokusné pole . . .)
- měříme (zjišťujeme) hodnoty **znaků**
- **znak** - vlastnost měřená na objektu (statistické jednotce)
- zjištěnou hodnotu vyjadřujeme ve zvoleném **měřítku** (stupnici)
- na jedné jednotce můžeme měřit několik znaků (možná závislost)
- měříme na skupinách jednotek – **souborech**
- zajímají nás **hromadné** vlastnosti (les, ne jednotlivé stromy)
- můžeme porovnávat vlastnosti znaku mezi soubory

4

## měřítko

- **nula-jedničkové** (muž/žena) pouze dvě možné hodnoty
- **nominální** (porodnice, pohlaví, odrůda) seznam všech rozlišitelných hodnot, **faktor**
- **ordinální** (vzdělání matky, . . . , stupeň bolesti) hodnoty nominálního měřítka uspořádány, **uspořádaný faktor**
- **intervalové** (rok narození, teplota ve °C) stejné vzdálenosti sousedních hodnot, „o kolik je menší?“
- **poměrové** (hmotnost, výška, věk) srovnání se zvolenou jednotkou, „kolikrát je větší?“

5

## veličina

- číselně vyjádřený výsledek měření, pokusu
- možné hodnoty znaků v intervalovém, poměrovém měřítku jsou husté – **spojitá veličina**
- četnosti hodnot znaků v nula-jedničkovém, nominálním (či ordinálním) měřítku – **diskrétní veličina**
- u veličin používáme charakteristiky některých hromadných vlastností (**charakteristiky polohy, variability**)
- **statistika** (též) funkce pozorovaných hodnot

7

## měřítko (2)

- **kvalitativní**: nula-jedničkové, nominální, často i ordinální
- u kvalitativních se zpravidla udávají **četnosti** jednotlivých hodnot (kolikrát která nastala)
- **kvantitativní** (spojité): intervalové, poměrové, někdy ordinální (není spojité)
- hodnoty kvantitativních – čísla

6

## popisné statistiky

$x_1,$	$x_2,$	$\dots,$	$x_n$	zjištěné hodnoty
$x_1^*$ ,	$x_2^*$ ,	$\dots,$	$x_m^*$	možné hodnoty (různé)
$n_1,$	$n_2,$	$\dots,$	$n_m$	<b>četnosti</b> hodnot

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = \sum_{j=1}^m n_j = n$$

$$\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \dots, \frac{n_m}{n} \quad \text{- relativní četnosti}$$

$$N_j = \sum_{i=1}^j n_i \quad \text{kumulativní četnosti}$$

pro kumulativní četnosti nutno aspoň ordinální měřítko

8

**histogram** (histogram, barplot u kvalitativní veličiny)

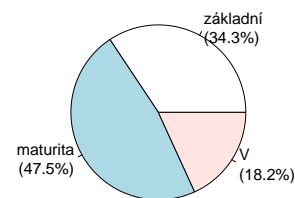
- grafické znázornění četností (počtů hodnot kvalitativní veličiny)
- plocha (výška) obdélníku úměrná četnosti
- relativní četnosti mají jen jiné měřítko svislé osy
- podobně **výsečový diagram** pro relativní četnosti (podíly nějakého celku)

příklad **kojení** (vzdělání 99 matek):

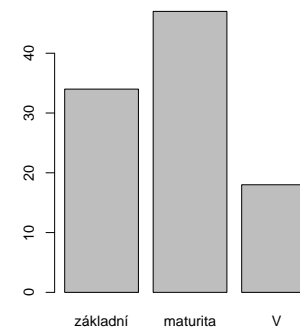
vzděl.	zákl.	maturita	VŠ	celkem	pozn.
$x_j^*$	1	2	3		možné hodnoty
$n_j$	34	47	18	99	absolutní čet.
$n_j/n$	0,343	0,475	0,182	1,000	relativní čet.
$n_j/n$	34,3 %	47,5 %	18,2 %	100 %	relativní čet.
$N_j$	34	81	99		kumulativní čet.

9

výsečový diagram (pie chart)



barplot



10

histogram u **spojité** veličiny – **třídění**: všechny hodnoty z daného intervalu  $(t_{j-1}, t_j)$  nahradíme prostřední hodnotou  $x_j^* = (t_{j-1} + t_j)/2$

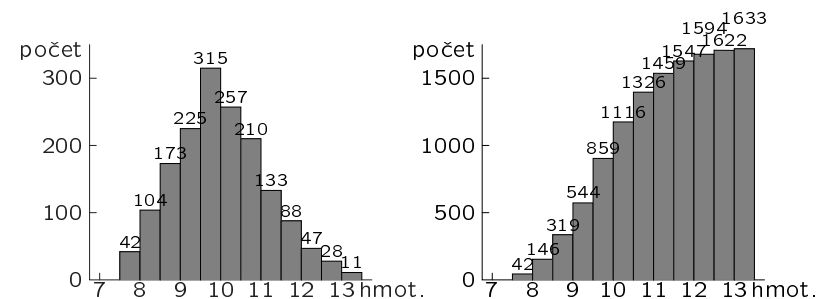
hmotnost dětí (příklad **děti**)

$j$	$x_j^*$	$t_j$	$n_j$	$n_j/n$	$N_j$	$N_j/n$
1	7750	8000	42	0,026	42	0,026
2	8250	8500	104	0,063	146	0,089
3	8750	9000	173	0,106	319	0,195
4	9250	9500	225	0,138	544	0,333
5	9750	10000	315	0,193	859	0,526
6	10250	10500	257	0,157	1116	0,683
7	10750	11000	210	0,129	1326	0,812
8	11250	11500	133	0,081	1459	0,893
9	11750	12000	88	0,054	1547	0,947
10	12250	12500	47	0,029	1594	0,976
11	12750	13000	28	0,017	1622	0,992
12	13250	$\infty$	11	0,007	1633	1,000

11

## absolutní a kumulativní četnosti

**kumulativní** četnost: podíl dětí, jejichž hmotnost ve 12. měsíci je **nejvýše** rovna  $t_j$

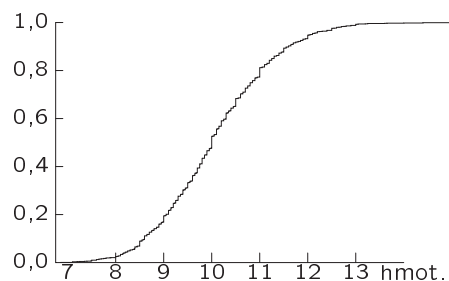


12

### empirická distribuční funkce:

relativní četnost hodnot, které jsou nejvýše  $x$

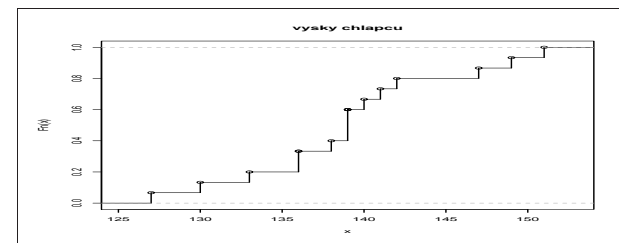
$$F_n(x) = \frac{\text{počet } (x_i \leq x)}{n}$$



13

$x$  – výšky desetiletých hochů

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_{(i)}$	127	130	133	136	136	138	139	139
$i$	9	10	11	12	13	14	15	
$x_{(i)}$	139	140	141	142	147	149	151	



14

### uspořádaný seznam hodnot, variační řada

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

**pořadí:** místo, na které se dané pozorování dostane v uspořádaném seznamu (shodné hodnoty dostanou průměrné pořadí)

### míry polohy

**požadavky na míry polohy:**

$$\mu(a + X) = a + \mu(X)$$

$$\mu(b \cdot X) = b \cdot \mu(X)$$

$$b > 0$$

- přičteme-li ke každé hodnotě  $X$  konstantu  $a$ , přičte se stejná konstanta k míře polohy
- vynásobíme-li každou hodnotu  $X$  kladnou konstantou  $b$ , vynásobí se míra polohy stejnou konstantou

15

### • průměr

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

### • vážený průměr s využitím četností ( $n = \sum_j n_j$ )

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1 x_1^* + n_2 x_2^* + \dots + n_m x_m^*) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j x_j^*$$

### • obecněji s nezápornými vahami $w_j$ hodnot $x_j^*$

$$\bar{x} = \frac{\sum_j w_j x_j^*}{\sum_j w_j}$$

16

**příklad:** vážený průměr známek, váženo kredity

známka	kreditů	součin
$x_j^*$	$w_j$	$x_j^* \cdot w_j$
1	6	6
2	4	8
2	2	4
3	4	12
celkem	16	30

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4}{6 + 4 + 2 + 4} = \frac{30}{16} = 1,875$$

17

- **medián** (prostřední hodnota, NIKOLIV střední hodnota)

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & n \text{ liché} \\ \frac{1}{2} (x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) & n \text{ sudé} \end{cases}$$

- **minimum, maximum**

$$x_{\min} = x_{(1)}$$

$$x_{\max} = x_{(n)}$$

- **variační průměr**

$$\frac{1}{2} (x_{(1)} + x_{(n)}) = \frac{1}{2} (x_{\min} + x_{\max})$$

18

- **p-tý percentil** (číslo, které odděluje dolních 100p % hodnot)  
řada postupů, NCSS používá interpolaci:

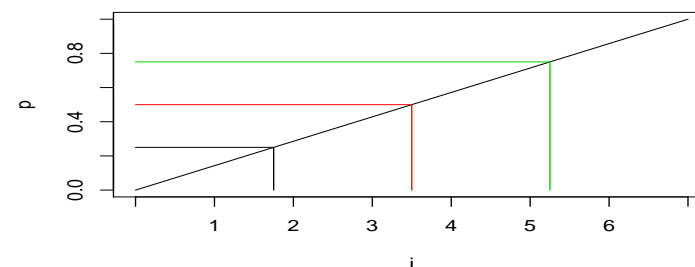
$$r = [(n+1)p] \quad \text{celá část } (n+1)p$$

$$q = (n+1)p - r \quad \text{zlomková část } (n+1)p$$

$$x_p = (1-q)x_{(r)} + qx_{(r+1)}$$

- **dolní kvartil** (hodnota oddělující dolní čtvrtinu):  $Q_1 = x_{1/4}$
- **horní kvartil** (hodnota oddělující dolní tři čtvrtiny):  $Q_3 = x_{3/4}$
- **modus**  $\hat{x}$  nejčastější hodnota (s největší četností)

19



**příklad:** výpočet kvartilů pro  $n = 6$

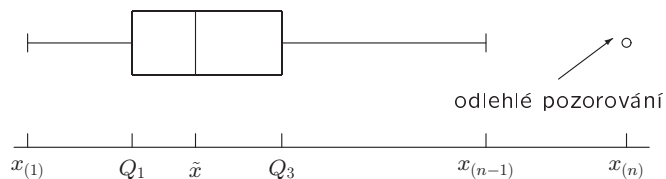
$$p = 1/4 \quad r = [(6+1) * 1/4] = [7/4] = [1 + 3/4] = 1 \quad q = 7/4 - 1 = 3/4$$

$$p = 1/2 \quad r = [(6+1) * 1/2] = [7/2] = [3 + 1/2] = 3 \quad q = 7/2 - 3 = 1/2$$

$$p = 3/4 \quad r = [(6+1) * 3/4] = [21/4] = [5 + 1/4] = 5 \quad q = 21/4 - 5 = 1/4$$

20

krabicový diagram (box-plot, box and whisker plot)



pozorování je **odlehle**, je-li vzdáleno od bližšího kvartilu o více než

$$\frac{3}{2}(Q_3 - Q_1)$$

21

## míry variability

**požadavky na míry variability** (měřítka):

$$\sigma(a + X) = \sigma(X)$$

$$\sigma(b \cdot X) = b \cdot \sigma(X) \quad b > 0$$

- přičtení konstanty míru variability neovlivní
- vynásobení všech hodnot  $X$  kladnou konstantou  $b$  znamená vynásobení míry variability stejnou konstantou

- **směrodatná odchylka**

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

23

příklad **výšky dívek** ( $n=12$ )

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_j^*$	131	132	135	141	142	143	146	151
$n_j$	1	1	1	4	1	1	2	1
pořadí	1	2	3	5,5	8	9	10,5	12

$$\bar{y} = \frac{1}{12} (131 + 132 + \dots + 151) = 140,83$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{2} (y_{(6)} + y_{(7)}) = \frac{1}{2} (141 + 141) = 141$$

$$r = [(12 + 1)/4] = 3 \quad q = (12 + 1)/4 - 3 = 1/4$$

$$Q_1 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) y_{(3)} + \frac{1}{4} y_{(4)} = 0,75 \cdot 135 + 0,25 \cdot 141 = 136,5$$

$$Q_3 = 0,25 \cdot 143 + 0,75 \cdot 146 = 145,25$$

22

- **rozptyl**  $s_x^2$  (nesplňuje druhý požadavek, platí  $s_{b \cdot x}^2 = b^2 s_x^2$ )

- **rozpětí**  $R = x_{\max} - x_{\min}$

- **kvartilové rozpětí**  $R_Q = Q_3 - Q_1$

- **variační koeficient** (nesplňuje ani jeden požadavek) porovnání variability při různých úrovních

$$V_x = \frac{s_x}{\bar{x}}$$

- **entropie** (pro nominální, požadavky nemají smysl)

$$H = - \sum_{j=1}^m \frac{n_j}{n} \ln \frac{n_j}{n}$$

(nezávisí na označení hodnot, jen na jejich relativních četnostech)

24

příklad výšky dívek

$$s_y^2 = \frac{1}{11} \left( (131 - 140,83)^2 + \dots + (151 - 140,83)^2 \right) \doteq 33,788$$

$$s_y = \sqrt{33,788} \doteq 5,813$$

$$R = 151 - 131 = 20$$

$$R_Q = 145,25 - 136,5 = 8,75$$

**z-skór** (normovaná veličina)

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \Rightarrow \bar{z} = 0, \quad s_z = 1$$

hodnocení vlastností nezávislých na poloze a variabilitě

• **šikmost** (průměr 3. mocnin z-skórů)

$$g_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right)^3$$

• **špičatost** (průměr 4. mocnin z-skórů, někdy bez -3)

$$g_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^4 - 3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right)^4 - 3$$

$g_1, g_2$  se používají k posouzení normality

příklad ICHS: **vztah mužů ke kouření** (procenta pro dané vzdělání)

vzděl.	vztah ke kouření								celk.	H
	nekuřák		bývalý		střední		silný			
zákl.	14	12,0 %	11	9,4 %	14	12,0 %	78	66,7 %	117	1,001
odb.	55	18,6 %	28	9,5 %	24	8,1 %	189	63,9 %	296	1,026
stř.	55	18,5 %	44	14,8 %	24	8,1 %	175	63, %	298	1,110
VŠ	73	30,7 %	42	17,6 %	17	7,1 %	106	44,5 %	238	1,217

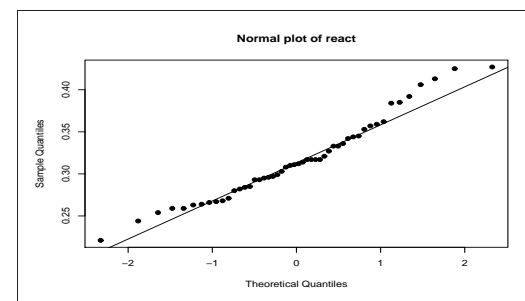
muži se základním vzděláním:

$$H = - \left( \frac{14}{117} \ln \frac{14}{117} + \frac{11}{117} \ln \frac{11}{117} + \frac{14}{177} \ln \frac{14}{177} + \frac{78}{117} \ln \frac{78}{117} \right) = 1,000689$$

větší vyrovnanost  $\Rightarrow$  větší entropie

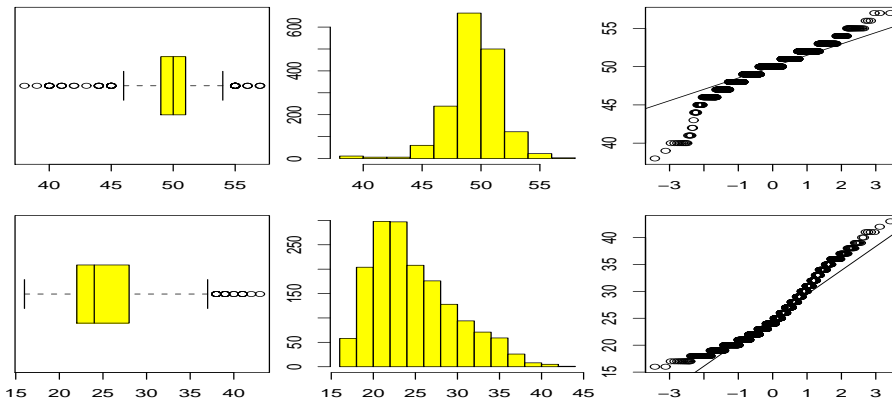
• **normální diagram**

- k ověřování předpokladu **normálního** rozdělení
- pomocí srovnání bodů s přímkou
- reakční doba (policie):  $g_1 = 0,521$ ,  $g_2 = -0,321$



nahoře **porodní délka**:  $g_1 = -0,893, g_2 = 3,511$

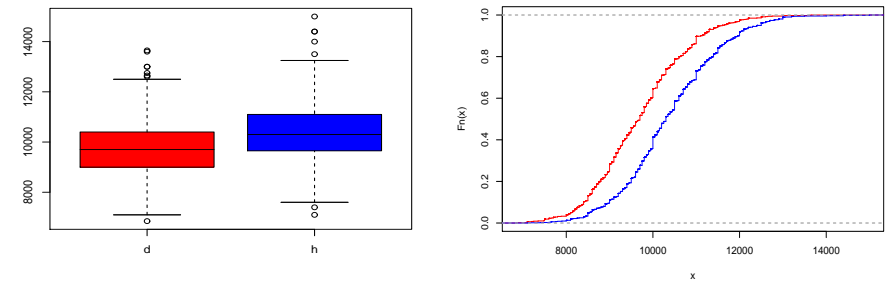
dole **věk matek**:  $g_1 = 0,760, g_2 = 0,013$



29

## srovnání souborů dat (spojitá veličina)

- lze chápat jako závislost spojitě veličiny na nula-jedničkové
- krabicové diagramy resp. empirické distribuční funkce
- příklad: hmotnost chlapců a dívek (vlevo) v jednom roce



30

## závislost dvojice znaků

- **dvojice znaků** – (není totéž co dva znaky!)
  - možnost porovnání chování jednoho znaku při různých hodnotách druhého znaku
  - zkoumání závislosti
- **kontingenční tabulka**
  - (**sružené**) četnosti všech kombinací dvou kvalitativních znaků
  - řádkové/sloupcové **marginální** četnosti – řádkové/sloupcové součty příslušných **sružených** četností
  - v procentech v dané skupině (pro danou hodnotu jednoho znaku) – **podmíněné** relativní četnosti

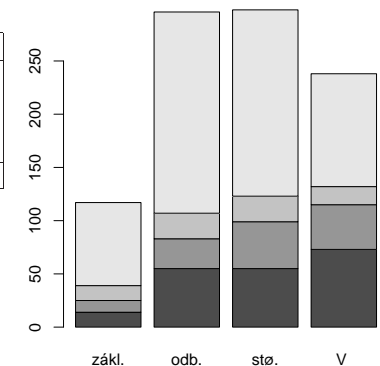
31

## příklad **kouření u mužů**

**sružené** a **marginální** četnosti

vzdělání	zákl.	odb.	mat.	VŠ	celk.
nekuřák	14	55	55	73	197
bývalý kuřák	11	28	44	42	125
kuřák	14	24	24	17	79
silný kuřák	78	189	175	106	548
celkem	117	296	298	238	949

(zdola: nekuřák, bývalý kuřák, kuřák, silný kuřák)



32



příklad **kouření u mužů**

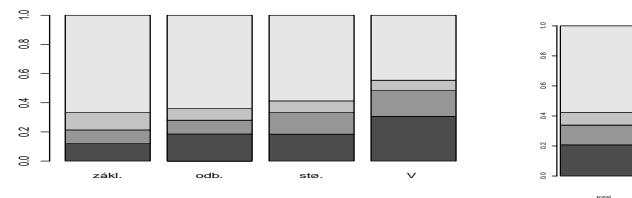
**sdružené** a **marginální relativní četnosti**

vzdělání	zákl.	odb.	mat.	VŠ	celk.
nekuřák	1,5 %	5,8 %	5,8 %	7,7 %	20,8 %
bývalý kuřák	1,2 %	3,0 %	4,6 %	4,4 %	13,2 %
kuřák	1,5 %	2,5 %	2,5 %	1,8 %	8,3 %
silný kuřák	8,2 %	19,9 %	18,4 %	11,2 %	57,7 %
celkem	12,3 %	31,2 %	31,4 %	25,1 %	100,0 %

**marginální** relativní četnosti jsou vždy **součtem** příslušných (v řádku/sloupci) **sdružených** relativních četností

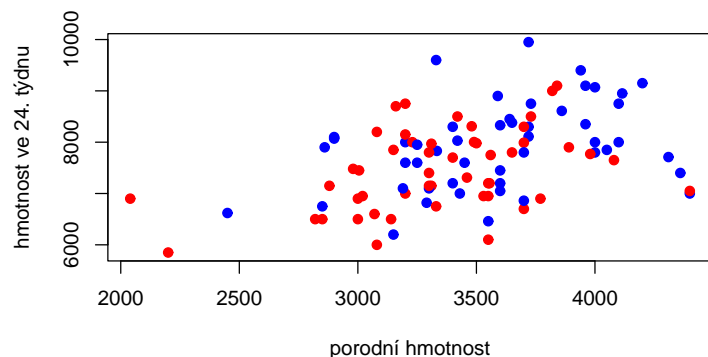
vzdělání	zákl.	odb.	mat.	VŠ	celk.
nekuřák	12,0 %	18,6 %	18,5 %	30,7 %	20,6 %
bývalý kuřák	9,4 %	9,5 %	14,8 %	17,6 %	13,2 %
kuřák	12,0 %	8,1 %	8,1 %	7,1 %	8,3 %
silný kuřák	66,7 %	63,9 %	58,7 %	44,5 %	57,8 %
celkem	100%	100%	100%	100%	100%

**marginální** rel. četnosti **nejsou** průměrem **podmíněných** rel. četností!



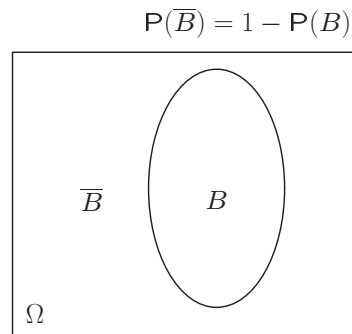
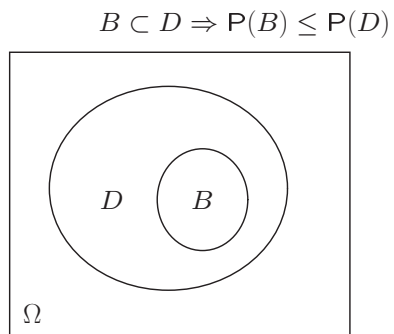
(zdola: nekuřák, bývalý kuřák, kuřák, silný kuřák)

- **závislost spojitých veličin** (bodový diagram)



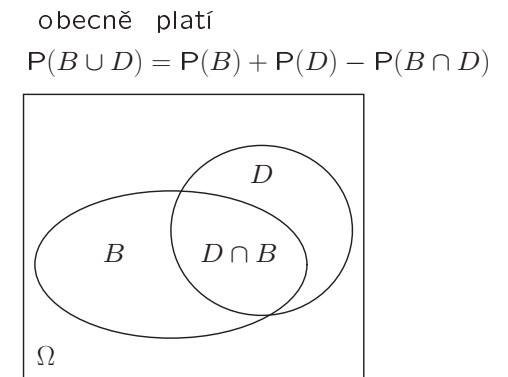
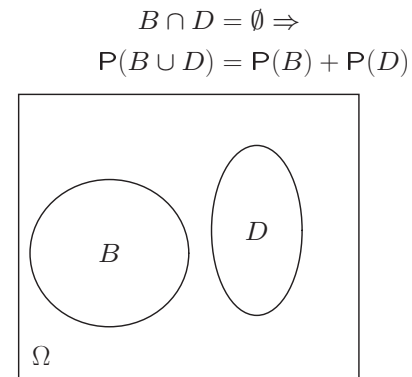
### Náhodné jevy

- **náhodný pokus** výsledek předem neurčitý, s opakováním roste stabilita frekvence možných výsledků
- **náhodný jev** tvrzení o výsledku náhodného pokusu (podmnožina množiny  $\Omega$ )
- **jistý jev**  $\Omega$  nastává vždy
- **nemožný jev**  $\emptyset$  nenastává nikdy
- **podjev**:  $B \subset D$  znamená  $B \Rightarrow D$
- **jev opačný**:  $\bar{D} \Leftrightarrow$  neplatí  $D$
- **průnik jevů**  $B \cap D$  nastaly oba jevy
- **sjednocení jevů**  $D \cup B$  nastal aspoň jeden
- **neslučitelné jevy**  $B \cap D = \emptyset$



velikost plochy odpovídá pravděpodobnosti

37



velikost plochy odpovídá pravděpodobnosti

38

### Pravděpodobnost $P(B)$

- objektivní číselné vyjádření „naděje“, že nastane  $B$
- modelový protějšek relativní četnosti
- vlastnosti psti

- $0 \leq P(B) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$
- $B \cap D = \emptyset \Rightarrow P(B \cup D) = P(B) + P(D)$  (sčítání pravděpodobností)
- $P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D)$
- $B \subset D \Rightarrow P(B) \leq P(D)$
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

39

### • klasická definice psti

- $m$  **stejně pravděpodobných** elementárních jevů  $\omega_1, \dots, \omega_m$
- $m_B$  elementárních jevů **příznivých jevu**  $B$  (tj. takových  $\omega_i$ , že  $\omega_i \in B$ , je právě  $m_B$ )

$$P(B) = \frac{m_B}{m}$$

### • příklad

- hází se dvěma kostkami (modrá, zelená)
- $B$  – součet aspoň 10

$$m = 6 \cdot 6 = 36; \quad m_B = 6 \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{6}{36}$$

příznivé možnosti: (6, 4), (6, 5), (6, 6), (5, 5), (5, 6), (4, 6)

40

příklad **rodina**: tři sourozenci, celkem 8 elementárních jevů  $\omega_1, \dots, \omega_8$

$\omega_i$	$D$	$B$	$B \cap D$	$B \cup D$	$C$
$(m, m, m)$					+
$(f, m, m)$	+	+	+	+	+
$(m, f, m)$		+		+	+
$(f, f, m)$	+			+	+
$(f, f, f)$	+			+	
$(m, f, f)$				+	
$(f, m, f)$	+			+	
$(m, m, f)$		+		+	

$D$  nejmladší je dívka,  $P(D) = 4/8 = 1/2$

$B$  v rodině je jediná dívka,  $P(B) = 3/8$

$B \cap D$  jediná dívka je nejmladší,  $P(B \cap D) = 1/8$

$P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D) = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$

$C$  nejstarší je hoch,  $P(C) = 4/8 = 1/2$

41

Když víme, že nejstarší je hoch ( $C$ ), jaká je pak pst, že nejmladší je dívka ( $D$ )? Dva ze čtyř elementárních jevů, tedy

$$m_{D \cap C} / m_C = 2/4 = 1/2 = 4/8 = m_D / m$$

zde pst jevu  $D$  **nezávisí** na tom, zda platí  $C$

**nezávislost**: pst jevu  $D$  nezávisí na tom, zda  $C$  nastal či nenastal

obecná definice: **nezávislost**  $D, C$

$$P(D \cap C) = P(D)P(C) \quad (\text{násobení pravděpodobností})$$

$D, C$  **nezávislé jevy**

**podmíněná pst** (pst  $D$  za podmínky  $B$ )

$$P(D|C) = \frac{m_{D \cap C}}{m_C} = \frac{m_{D \cap C} / m}{m_C / m} = \frac{P(D \cap C)}{P(C)}$$

42

příklad **rodina**: ( $B$  – v rodině je jediná dívka,  $D$  – nejmladší je dívka)

$$P(B \cap D) = \frac{1}{8} \neq \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{8} = P(B) \cdot P(D) \Rightarrow B, D \text{ závislé}$$

$$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4}$$

$$P(B|\bar{D}) = \frac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

$$P(B|D) < P(B) < P(B|\bar{D})$$

43

příklad **HWE** (zákon Hardyův-Weinbergův)

- diploidní populace
- na daném lokusu dvě alely:  $A, a$
- pst dominantní alely  $A$  v populaci:  $p$
- pst recesivní alely  $a$  v populaci:  $q = 1 - p$
- nezávislé sdružování alel znamená

$$P(AA) = P(A) \cdot P(A) = p^2$$

$$P(aa) = P(a) \cdot P(a) = q^2$$

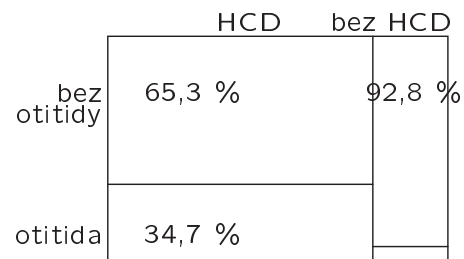
$$P(Aa) = P(A) \cdot P(a) + P(a) \cdot P(A) = 2pq$$

44

## děti (otitidy a záněty HCD)

podmíněno HCD

	HCD	bez HCD	celkem
bez otitidy	5168	2088	7256
otitida	2747	163	2910
celkem	7915	2251	10166
	HCD	bez HCD	celkem
bez otitidy	0,508	0,205	0,714
otitida	0,270	0,016	0,286
celkem	0,779	0,221	1,000
	HCD	bez HCD	celkem
bez otitidy	0,653	0,928	0,714
otitida	0,347	0,072	0,286
celkem	1,000	1,000	1,000

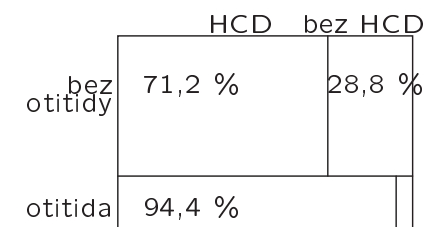


45

## děti (otitidy a záněty HCD)

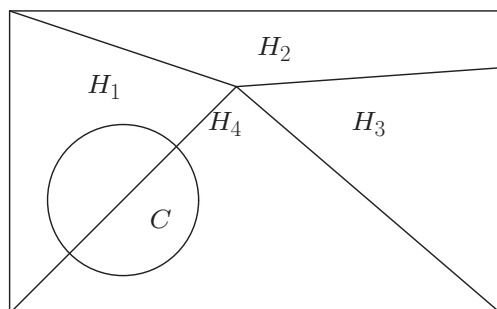
podmíněno otitídou

	HCD	bez HCD	celkem
bez otitidy	5168	2088	7256
otitida	2747	163	2910
celkem	7915	2251	10166
	HCD	bez HCD	celkem
bez otitidy	0,508	0,205	0,714
otitida	0,270	0,016	0,286
celkem	0,779	0,221	1,000
	HCD	bez HCD	celkem
bez otitidy	0,712	0,288	1,000
otitida	0,944	0,056	1,000
celkem	0,779	0,221	1,000



46

## vzorec pro úplnou pst, Bayesův vzorec



$$\begin{aligned}
 P(H_1) &= 0,231 \\
 P(H_2) &= 0,175 \\
 P(H_3) &= 0,219 \\
 P(H_4) &= 0,375 \\
 P(C|H_1) &= 0,262 \\
 P(C|H_4) &= 0,161 \\
 P(C) &= P(C \cap H_1) + P(C \cap H_4) = 0,121
 \end{aligned}$$

$$P(H_1 \cap C) = P(H_1|C)P(C)$$

$$P(H_1|C) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|H_1)P(H_1)}{P(C|H_1)P(H_1) + P(C|H_4)P(H_4)} = \frac{1}{2}$$

47

vzorec **pro úplnou pst**: necht se jev jistý rozpadá na jevy  $H_1, \dots, H_k$ :

- $H_1, \dots, H_k$  jsou neslučitelné (tj.  $H_i \cap H_j = \emptyset$  pro  $i \neq j$ )
- sjednocení  $H_1, \dots, H_k$  dá jev jistý (tj.  $H_1 \cup \dots \cup H_k = \Omega$ )

z definice podmíněné psti je  $P(C \cap H_j) = P(C|H_j) \cdot P(H_j)$

$$\begin{aligned}
 P(C) &= P(C \cap \Omega) = P(C \cap (H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k)) \\
 &= P((C \cap H_1) \cup (C \cap H_2) \cup \dots \cup (C \cap H_k)) \text{ (neslučitelné jevy)} \\
 &= P(C \cap H_1) + P(C \cap H_2) + \dots + P(C \cap H_k) \\
 &= P(C|H_1)P(H_1) + P(C|H_2)P(H_2) + \dots + P(C|H_k)P(H_k)
 \end{aligned}$$

tedy obecně 
$$P(C) = \sum_{j=1}^k P(C|H_j)P(H_j)$$

48

**Bayesův vzorec** (stejně předpoklady)

$$P(H_i|C) = \frac{P(H_i \cap C)}{P(C)}, \quad P(C|H_i) = \frac{P(C \cap H_i)}{P(H_i)}$$

odtud lze  $P(H_i \cap C) = P(C \cap H_i)$  vyjádřit dvěma způsoby:

$$P(H_i \cap C) = P(H_i|C)P(C) \\ = P(C|H_i)P(H_i)$$

proto pro každé  $i, i = 1, \dots, k$  platí

$$P(H_i|C) = \frac{P(C|H_i)P(H_i)}{P(C)} = \frac{P(C|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^k P(C|H_j)P(H_j)}$$

$H_1, \dots, H_k$  – hypotézy

$P(H_1), \dots, P(H_k)$  – apriorní psti (nutně je  $P(H_1) + \dots + P(H_k) = 1$ )

$P(H_1|C), \dots, P(H_k|C)$  – aposteriorní psti

49

**primitivní příklad: zkoušení**

$H_j$	$P(H_j)$	$P(C H_j)$	$P(H_j)P(C H_j)$	$P(H_j C)$	$P(H_j C_2)$	$P(H_j C_3)$
1	0,20	1,00	0,2000	0,2694	0,3451	0,4230
2	0,35	0,80	0,2800	0,3771	0,3865	0,3790
3	0,25	0,65	0,1625	0,2189	0,1822	0,1452
4	0,20	0,50	0,1000	0,1347	0,0863	0,0529
suma	1,00		0,7425	1,0000	1,0000	1,0000

$C$  – správná odpověď na známku,  $P(C) = 0,7425$

podobně  $C_2, C_3$  správné odpovědi na další stejně obtížné otázky, když použijeme předchozí aposteriorní psti jako apriorní

50

příklad **děti**  $C$  – otitida

$H_j$  – výskyt zánětu HCD

$H_j$	$P(H_j)$	$P(C H_j)$	součin
$H_1$ bez HCD	0,221	0,072	0,016
$H_2$ jednou HCD	0,223	0,276	0,061
$H_3$ opakovaně HCD	0,555	0,376	0,208
součet	1,000		0,286

$$P(C) = 0,286 \quad P(H_3|C) = \frac{0,376 \cdot 0,555}{0,286} = 0,728$$

pst opakovaného zánětu HCD u otitid    $P(H_3|C) = 0,728$

pst opakovaného zánětu HCD u všech    $P(H_3) = 0,555$

pst opak. zánětu HCD u NEotitid    $P(H_3|\bar{C}) = 0,485$

51

**příklad:** senzitivita, specificita testu

$D, \bar{D}$  – nemocná/zdravá osoba

$P, \bar{P}$  – pozitivní/negativní výsledek testu

$P(P|D)$  – **senzitivita** testu (0,98)

$P(\bar{P}|\bar{D})$  – **specificita** testu (0,99)

$P(D)$  – **prevalence** nemoci (apriorní pst) (0,001)

$$P(D|P) = \frac{P(P|D)P(D)}{P(P|D)P(D) + P(P|\bar{D})P(\bar{D})} = \frac{P(P|D)P(D)}{P(P)}$$

$$= \frac{0,98 \cdot 0,001}{0,98 \cdot 0,001 + 0,01 \cdot 0,999} = \frac{0,00098}{0,01097} = 0,089$$

$$P(\bar{D}|\bar{P}) = \frac{0,99 \cdot 0,999}{0,99 \cdot 0,999 + 0,02 \cdot 0,001} = 0,99998$$

52

## náhodná veličina

- číselně vyjádřený výsledek náhodného pokusu (předem nevíme, co vyjde, známe jen možné hodnoty a jejich pravděpodobnosti)
- každému elementárnímu jevu přiřadíme reálné číslo
- **diskrétní rozdělení** náhodné veličiny  $X$ 
  - model pro počty případů (četnosti)
  - možné hodnoty  $x_1^*, x_2^*, \dots$
  - psti hodnot  $P(X = x_1^*), P(X = x_2^*), \dots$  (psti funkce)
- **spojité rozdělení** náhodné veličiny  $X$ 
  - model pro spojitou veličiny (délka, váha, koncentrace ...)
  - obor (množina) možných hodnot  $X$
  - hustota  $f(x)$

53

Příklad **rodina**: náhodná veličina  $X$  – počet děvčat

rozdělení  $X$  dáno hodnotami  $x_j^*$  a pstmí těchto hodnot  $P(X = x_j^*)$

$\omega_i$	$x_i$	$x_j^*$
$(m, m, m)$	0	0
$(m, m, f)$	1	
$(m, f, m)$	1	1
$(f, m, m)$	1	
$(f, f, m)$	2	
$(f, m, f)$	2	2
$(m, f, f)$	2	
$(f, f, f)$	3	3

$j$	$x_j^*$	$m_j$	$P(X = x_j^*)$
1	0	1	1/8
2	1	3	3/8
3	2	3	3/8
4	3	1	1/8
součet		8	8/8

$$m = \sum_{j=1}^4 m_j = 8$$

54

**distribuční funkce**  $F_X(x) = P(X \leq x)$

- diskrétní rozdělení  $F(x) = \sum_{t \leq x} P(X = t)$

- spojité rozdělení  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  zřejmě pak:  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

- vlastnosti distribuční funkce

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

neklesající:  $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$P(X \leq x_2) = P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

55

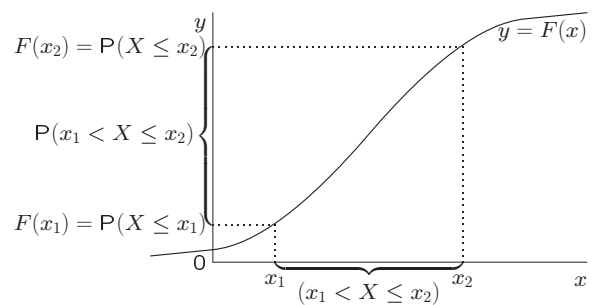
příklad **diskrétního** rozdělení: rozdělení počtu děvčat  $X$

$j$	$x_j^*$	$P(X = x_j^*)$	$F_X(x_j^*)$
1	0	1/8	1/8
2	1	3/8	4/8
3	2	3/8	7/8
4	3	1/8	8/8
součet		8/8	



56

geometrický význam **distribuční funkce**



$$P(X \leq x_2) = P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

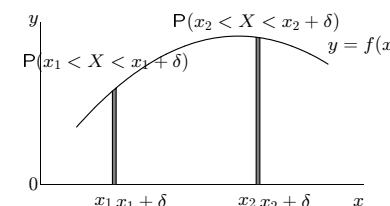
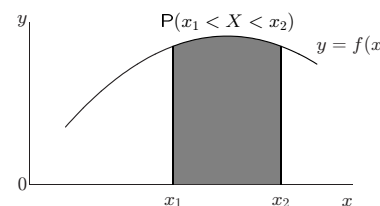
$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

$$\boxed{P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)}$$

57

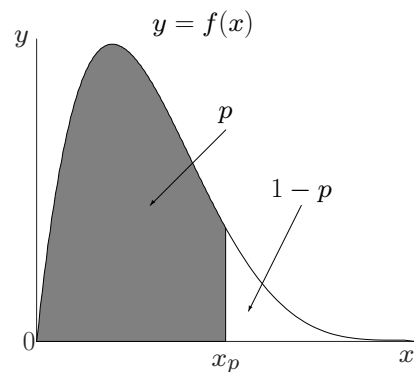
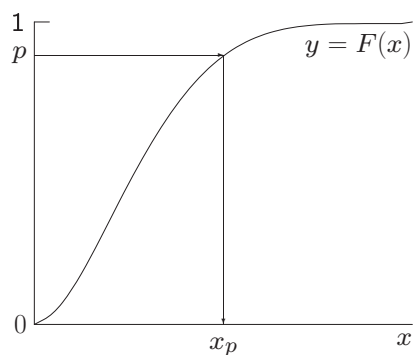
význam **hustoty spojitého** rozdělení:

$$f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$



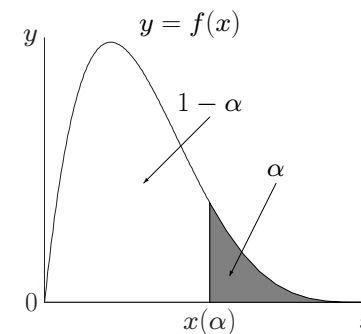
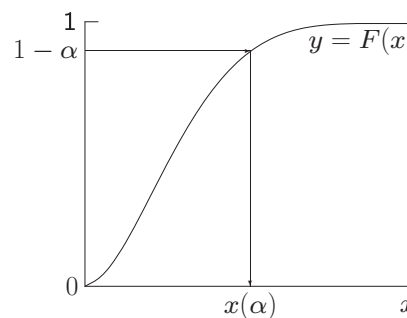
58

**p-quantil**  $x_p$  je určen požadavkem  $\boxed{P(X \leq x_p) = p}$



59

**kritická hodnota**  $x(\alpha)$  je určena požadavkem  $\boxed{P(X \geq x(\alpha)) = \alpha}$



$$x_{1-\alpha} = x(\alpha), \quad x_p = x(1-p)$$

60

## střední hodnota $\mu$ náhodné veličiny $X$

- míra polohy, **populační průměr**
- metoda výpočtu se značí  $E X$
- vypočtená hodnota se značí  $\mu$  nebo úplněji  $\mu_X$
- **vážený průměr možných hodnot**
- diskrétní rozdělení: vahami jsou pravděpodobnosti

$$\mu_X = \sum_j x_j^* P(X = x_j^*)$$

- spojité rozdělení: místo vah je hustota  $f_X(x)$

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

61

## rozptyl $\sigma^2$ náhodné veličiny $X$ (směrodatná odchylka $\sigma$ )

- míra variability, **populační rozptyl, popul. směr. odchylka**
- udává velikost kolísání (variabilitu) kolem střední hodnoty
- metoda výpočtu se značí  $\text{var } X$
- vypočtená hodnota  $\sigma^2$ , úplněji  $\sigma_X^2$
- pomocí střední hodnoty

$$\sigma_X^2 = E (X - \mu_X)^2 = E (X^2) - (\mu_X)^2$$

- diskrétní rozdělení  $\sigma_X^2 = \sum_j (x_j^* - \mu_X)^2 P(X = x_j^*)$

- spojité rozdělení  $\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx$

63

příklad **rodina**,  $X$  – počet děvčat

$j$	$x_j^*$	$P(X = x_j^*)$	$x_j^* \cdot P(X = x_j^*)$
1	0	0,125	0,000
2	1	0,375	0,375
3	2	0,375	0,750
4	3	0,125	0,375
součet		1,000	1,500

$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} \\ &= 0 \cdot 0,125 + 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0,125 \\ &= 1,5 \end{aligned}$$

62

$j$	$x_j^*$	$p_j$	$x_j^* - \mu_X$	$(x_j^* - \mu_X)^2$	$(x_j^* - \mu_X)^2 p_j$
1	0	0,125	-1,5	2,25	0,28125
2	1	0,375	-0,5	0,25	0,09375
3	2	0,375	0,5	0,25	0,09375
4	3	0,125	1,5	2,25	0,28125
$\Sigma$		1,000	0,0		0,75000

$$\begin{aligned} \mu_X &= 1,5 \\ \sigma_X^2 &= \sum_j (x_j^* - \mu_X)^2 p_j \\ &= (0 - 1,5)^2 \cdot 0,125 + (1 - 1,5)^2 \cdot 0,375 \\ &\quad + (2 - 1,5)^2 \cdot 0,375 + (3 - 1,5)^2 \cdot 0,125 \\ &= 0,75 \\ \sigma_X &= \sqrt{0,75} = 0,866025 \end{aligned}$$

64



### sdrúžené rozdělení:

abychom mohli popsat **závislost** náhodných veličin, zajímáme se o **společné** chování dvojice (trojice, ...) náhodných veličin, tedy chování **náhodného vektoru**

#### Příklad rodina

$X$  – počet děvčat v rodině s třemi dětmi

$Y$  – počet děvčat mezi dvěma staršími dětmi

$Z$  – počet hochů v rodině s třemi dětmi

rozdělení náhodného vektoru  $(X, Y)$

proč nemá smysl vyšetřovat **vektor**  $(X, Z)$ ?

65

#### Příklad rodina

$X$  počet děvčat v rodině s třemi dětmi

$Y$  počet děvčat mezi dvěma staršími dětmi

$\omega_i$	$x_i$	$y_i$
$(m, m, m)$	0	0
$(m, m, f)$	1	1
$(m, f, m)$	1	1
$(f, m, m)$	1	0
$(f, f, m)$	2	1
$(f, m, f)$	2	1
$(m, f, f)$	2	2
$(f, f, f)$	3	2

$x_i^*$	$y_j^*$			celkem
	0	1	2	
0	1/8	0	0	1/8
1	1/8	2/8	0	3/8
2	0	2/8	1/8	3/8
3	0	0	1/8	1/8
celkem	2/8	4/8	2/8	1

$x_i^*$	$y_j^*$			celkem
	0	1	2	
0	1	0	0	1
1	1/3	2/3	0	1
2	0	2/3	1/3	1
3	0	0	1	1

pravděpodobnosti: **sdrúžené**, **marginální**, **podmíněné**  $P(Y|X = x)$

67

**sdrúžené rozdělení** – popisuje **společné chování**  $X, Y$

$$P(X = x_i^*, Y = y_j^*) \text{ resp. } f_{X,Y}(x, y)$$

**marginální rozdělení:** chování jedné bez ohledu na hodnotu druhé

$$P(X = x_i^*) = \sum_j P(X = x_i^*, Y = y_j^*) \quad \forall x_i^*$$

$$P(Y = y_j^*) = \sum_i P(X = x_i^*, Y = y_j^*) \quad \forall y_j^*$$

**podmíněné rozdělení:** chování jedné při **dané** hodnotě druhé

$$P(X = x_i^* | Y = y_j^*) = \frac{P(X = x_i^*, Y = y_j^*)}{P(Y = y_j^*)}$$

66

**kovariance** vyjadřuje vzájemnou závislost náhodných veličin:

$$\sigma_{X,Y} = E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$$

$$\sigma_{X,Y} = \sum_i \sum_j (x_i^* - \mu_X)(y_j^* - \mu_Y)P(X = x_i^*, Y = y_j^*)$$

označení metody výpočtu:  $\text{cov}(X, Y)$

zřejmě platí  $\text{cov}(X, X) = \text{var } X$  tj.  $\sigma_{X,X} = \sigma_X^2$

pro **nezávislé** náhodné veličiny platí

$$P(X = x_i^*, Y = y_j^*) = P(X = x_i^*) \cdot P(Y = y_j^*), \quad \forall (x_i^*, y_j^*)$$

jsou-li  $X, Y$  – **nezávislé**  $\Rightarrow \sigma_{X,Y} = 0$  (nikoliv obrácená implikace)

68

příklad **děti**: výpočet střední hodnoty, rozptylu a kovariance

$x_i^*$	$y_j^*$			celkem
	0	1	2	
0	0,125	0	0	0,125
1	0,125	0,250	0	0,375
2	0	0,250	0,125	0,375
3	0	0	0,125	0,125
celkem	0,250	0,500	0,250	1,000

$$\mu_X = 0 \cdot 0,125 + 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0,125 = 1,5$$

$$\mu_Y = 0 \cdot 0,250 + 1 \cdot 0,500 + 2 \cdot 0,250 = 1$$

$$\sigma_X^2 = (0 - 1,5)^2 \cdot 0,125 + \dots + (3 - 1,5)^2 \cdot 0,125 = 0,75$$

$$\sigma_Y^2 = (0 - 1)^2 \cdot 0,25 + (1 - 1)^2 \cdot 0,5 + (2 - 1)^2 \cdot 0,25 = 0,5$$

$$\sigma_{XY} = (0 - 1,5) \cdot (0 - 1) \cdot 0,125 + (1 - 1,5) \cdot (1 - 1) \cdot 0,250 + \dots = 0,5$$

$X, Y$  jsou závislé, neboť např.  $0,25 \cdot 0,125 \neq 0,125$

69

### vlastnosti populačního průměru a rozptylu

(srovnej s požadavky na míry polohy a míry variability)

$$\mu_{\alpha+X} = \alpha + \mu_X,$$

$$\sigma_{\alpha+X}^2 = \sigma_X^2,$$

$$\sigma_{\alpha+X} = \sigma_X,$$

$$\mu_{\beta X} = \beta \cdot \mu_X,$$

$$\sigma_{\beta X}^2 = \beta^2 \cdot \sigma_X^2,$$

$$\sigma_{\beta X} = |\beta| \cdot \sigma_X,$$

pro součet náhodných veličin  $X + Y$  platí

$$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y$$

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY}$$

$$\sigma_{X,Y} = 0$$

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

obecně

pro nezávislé  $X, Y$

pro nezávislé  $X, Y$

70

ukázka důkazu:

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha+\beta X} &= \mathbf{E}(\alpha + \beta X) \\ &= \sum_i (\alpha + \beta x_i^*) \mathbf{P}(X = x_i^*) \\ &= \sum_i \alpha \mathbf{P}(X = x_i^*) + \sum_i \beta x_i^* \mathbf{P}(X = x_i^*) \\ &= \alpha \sum_i \mathbf{P}(X = x_i^*) + \beta \sum_i x_i^* \mathbf{P}(X = x_i^*) \\ &= \alpha + \beta \cdot \mathbf{E} X = \alpha + \beta \cdot \mu_X \end{aligned}$$

**normování** náhodné veličiny  $X$  (populační obdoba  $z$ -skórů)

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (\text{bezrozměrný!})$$

$$\Rightarrow \mu_Z = 0, \quad \sigma_Z = 1$$

71

normovaná verze veličiny umožňuje vyšetřovat vlastnosti nezávislé na poloze  $\mu_X$  a variabilitě (měřítka)  $\sigma_X^2$ :

(populační) **korelační koeficient** (correlation coefficient)

$$\rho_{XY} = \text{cov} \left( \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

(populační) **šikmost** náhodné veličiny  $X$  (skewness)

$$\gamma_1 = \mathbf{E} \left( \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right)^3 = \frac{\mathbf{E}(X - \mu_X)^3}{\sigma_X^3}$$

(populační) **špicatost** náhodné veličiny  $X$  (kurtosis, někdy se neodečítá 3)

$$\gamma_2 = \mathbf{E} \left( \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right)^4 - 3 = \frac{\mathbf{E}(X - \mu_X)^4}{\sigma_X^4} - 3$$

72

## Důležitá diskrétní rozdělení

- **alternativní** (nula-jedničkové) **rozdělení**  $X \sim \text{alt}(\pi)$

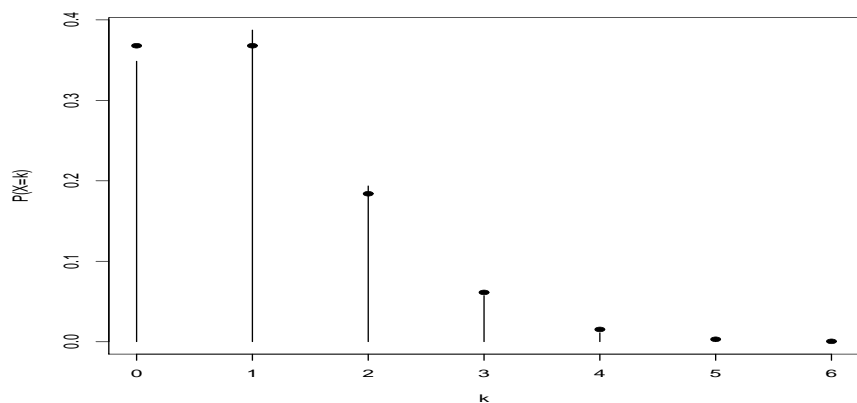
- *zdar* nebo *nezdar* (pouze dvě možné hodnoty: 0 a 1)
- $P(X = 1) = \pi$ ,  $P(X = 0) = 1 - \pi$ , ( $0 < \pi < 1$ )
- $\mu_X = 1 \cdot \pi + 0 \cdot (1 - \pi) = \pi$
- $\sigma_X^2 = (1 - \pi)^2 \cdot \pi + (0 - \pi)^2 \cdot (1 - \pi) = \pi(1 - \pi)$

- **binomické rozdělení**  $Y \sim \text{bi}(n, \pi)$

- $n$  **nezávislých** pokusů takových, že
- $P(\text{zdar}) = \pi$ ,  $P(\text{nezdar}) = 1 - \pi$ , ( $0 < \pi < 1$ )
- $Y$  je **počet zdarů** v těchto pokusech

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

73



$\text{bi}(10, 0,1)$  (úsečky) aproximované pomocí  $\text{Po}(1)$  (tečky)

75

- vyjádření binomického rozdělení pomocí alternativního

- $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $X_i \sim \text{alt}(\pi)$  (počet zdarů v  $i$ -tém pokusu)
- $\mu_Y = \mu(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mu_{X_i} = n\pi$
- $\sigma_Y^2 = \sigma^2(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 = n\pi(1 - \pi)$  (nezávislost  $X_i$ !)

- **Poissonovo rozdělení**  $X \sim \text{Po}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$

- zákon vzácných (řídkých) jevů
- kolikrát nastal jev během jednotkového časového intervalu, na jednotkové ploše, v jednotkovém objemu ...

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\mu_X = \lambda, \quad \sigma_X^2 = \lambda$$

- pro velké  $n$  a malé  $\pi$  lze rozdělení  $\text{bi}(n, \pi)$  aproximovat pomocí rozdělení  $\text{Po}(n\pi)$

74

### příklad: kouření

- víme, že mezi dvacetiletými muži je (řekněme) 35 % kuřáků
- je-li dvacetiletých 70 tisíc, pak je kuřáků asi  $0,35 \cdot 70\,000 = 24\,500$ , ale nevíme, kteří to jsou
- vyberme náhodně 60 dvacetiletých mužů, označme jako  $X$  počet kuřáků mezi nimi, je tedy  $X \sim \text{bi}(60, 0,35)$

- 

$$\mu_X = 60 \cdot 0,35 = 21 \quad \sigma_X^2 = 60 \cdot 0,35 \cdot 0,65 = 13,65 \doteq (3,7)^2$$

- ukázky pravděpodobností možných hodnot

$k$	15	17	19	21	23	25
$P(X = k)$	0,029	0,062	0,095	0,107	0,091	0,059

76

### příklad Poissonova rozdělení

- do pasti padá za noc v průměru 8 brouků ( $\lambda = 8$ )
- s jakou pravděpodobností jich tam ráno najdeme 10 (resp. 8)?

$$P(Y = 10) = \frac{8^{10}}{10!}e^{-8} = 0,099, \quad P(Y = 8) = \frac{8^8}{8!}e^{-8} = 0,140$$

- vezmeme-li past s polovičním obvodem, očekáváme poloviční průměr za noc ( $\lambda = 4$ )

$$P(Y = 10) = \frac{4^{10}}{10!}e^{-4} = 0,005$$

$$P(Y = 5) = \frac{4^5}{5!}e^{-4} = 0,156$$

77

- **normální** (Gaussovo) rozdělení  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- $\mu_X = \mu, \sigma_X^2 = \sigma^2$
- $N(0, 1): \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t)dt$  (hustota, distr. fce)
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , pak  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

- $V$  (musí být  $P(V > 0) = 1!!$ ) má rozdělení **logaritmicko-normální**, platí-li  $\ln V \sim N(\mu, \sigma^2)$
- **aproximace binomického rozdělení**  $bi(n, \pi)$  **normálním**  $N(n\pi, n\pi(1-\pi))$  (použitelné, pokud  $n\pi(1-\pi) > 9$ )

79

### příklady

- s jakou pravděpodobností **neudělá** 12 z 50 stejně připravených studentů zkoušku, když je pst neúspěchu = 0,2?

- binomické rozdělení  $bi(50, 0,2)$

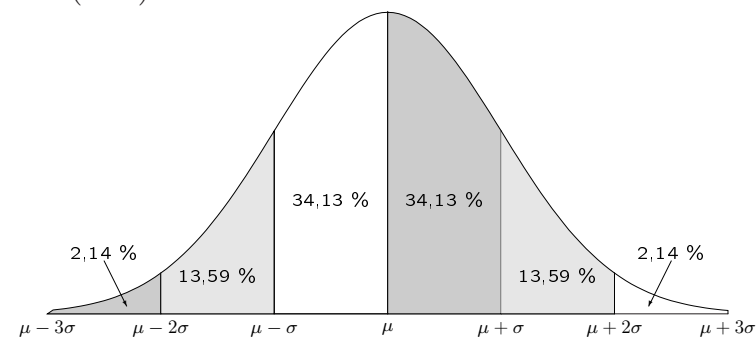
$$P(X = 12) = \binom{50}{12} \cdot 0,2^{12} \cdot 0,8^{38} = 0,103$$

- aproximace pomocí Poissonova rozdělení  $Po(50 \cdot 0,2) = Po(10)$

$$P(Y = 12) = \frac{10^{12}}{12!}e^{-10} = 0,095$$

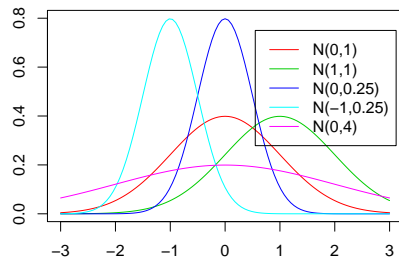
78

### hustota $N(\mu, \sigma^2)$



80

## normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$



- spojité rozdělení, symetrické okolo střední hodnoty  $\mu$
- maximální hodnota hustoty úměrná  $1/\sigma$
- model vzniku: součet velkého počtu nepatrných příspěvků

81

## výpočet pstí tvrzení o $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

**příklad:**  $X \sim N(136,1, 6,4^2)$  (výšky 10letých hochů v roce 1951)

$$P(134,5 < X < 140,5) = \Phi\left(\frac{140,5 - 136,1}{6,4}\right) - \Phi\left(\frac{134,5 - 136,1}{6,4}\right) = 0,754 - 0,401 = 0,353$$

tedy v rozmezí 135 cm až 140 cm včetně bylo asi 35,3 % hochů

82

## kritické hodnoty

- normální rozdělení  $N(0, 1)$

$$Z \sim N(0, 1) : \quad P(Z > z(\alpha)) = \alpha$$

ze symetrie platí  $P(|Z| > z(\alpha/2)) = \alpha$

- Studentovo  $t$ -rozdělení  $t_k$  (podobné normálnímu, ale používá odhad  $s$  parametru  $\sigma$ , proto má větší rozptyl)

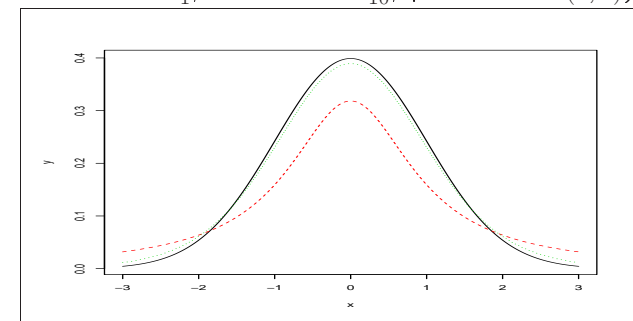
$$T \sim t_k : P(|T| > t_k(\alpha)) = \alpha$$

$\alpha$	0,10	0,05	0,01
$z(\alpha/2)$	1,645	1,960	2,576
$t_{100}(\alpha)$	1,660	1,984	2,626
$t_{20}(\alpha)$	1,725	2,086	2,845
$t_5(\alpha)$	2,015	2,571	4,032

83

srovnání normálního a Studentova  $t$ -rozdělení:

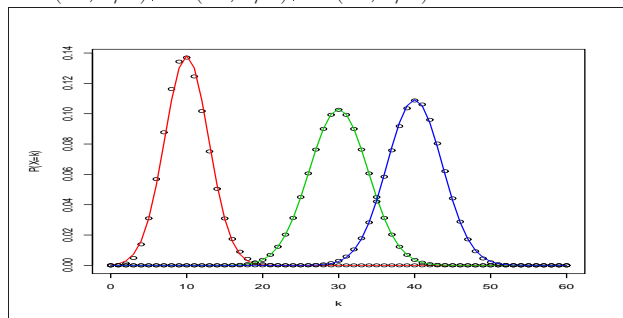
čárkovaně  $t_1$ , tečkovaně  $t_{10}$ , plná čára  $N(0, 1)$



84

porovnání binomického rozdělení  $bi(n, \pi)$  a jeho aproximace normálním rozdělením  $N(n\pi, n\pi(1 - \pi))$

bi(60, 1/6), bi(60, 3/6), bi(60, 4/6)



85

### populace – výběr (základ pro statistickou indukci)

- **populace (základní soubor)** soubor jednotek, o jejichž hromadných vlastnostech chceme vypovídat (všechny možné výsledky pokusu, všichni hoši zvoleného věku, všichni čolci v rybníčku)  $\Rightarrow$  rozdělení náhodné veličiny
- **výběr** náhodně vybraná vyšetřovaná část populace (vzorek)
- **reprezentativní** výběr obráží poměry v populaci (nutná vlastnost výběru, aby mohl vypovídat o populaci)
- **náhodný výběr** nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením (model pro měření na výběru)
- **parametr** neznámé číslo popisující nějaký rys populace, charakteristika rozdělení náhodné veličiny
- **statistika** funkce náhodného výběru (pozorování)
- **odhad** statistika použitá k odhadu parametru

87

### další rozdělení související s normálním

- **Fisherovo  $F$ -rozdělení  $F_{k,m}$**

$$F \sim F_{k,m} : P(F > F_{k,m}(\alpha)) = \alpha$$

- **rozdělení chí-kvadrát  $\chi_k^2$**

$$X^2 \sim \chi_k^2 : P(X^2 > \chi_k^2(\alpha)) = \alpha$$

speciálně platí:

- $\chi_1^2(0,05) = 1,960^2 = 3,841$  (viz  $z(0,025) = 1,960$ )
- $F_{1,m}(\alpha) = (t_m(\alpha))^2$

86

### vlastnosti výběrového průměru

- $X_1, \dots, X_n$  **nezávislé**, stejné rozdělení  
 $\mu_{X_i} = \mu$   
 $\sigma_{X_i}^2 = \sigma^2$ 

<b>náhodný výběr</b>
populační průměr
populační rozptyl
- $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 

výběrový průměr
-----------------
- $\mu_{\bar{X}} = E \bar{X} = \mu$ 
  - výběrový průměr je **nestranným** odhadem (unbiased estimator) populačního průměru
  - když pořizujeme výběry opakovaně, průměry kolísají kolem skutečné hodnoty populačního průměru

88

- $\sigma_{\bar{X}}^2 = \text{var } \bar{X} = \frac{\sigma^2}{n} = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 = (\text{S.E.}(\bar{X}))^2$

- S.E.(\bar{X}) – **střední chyba průměru** (standard error of mean)
- variabilita průměrů (měřená rozptylem) z výběrů rozsahu  $n$  je  $n$ -krát menší, než variabilita jednotlivých pozorování  $\sigma^2$
- střední chyba průměru je  $\sqrt{n}$ -krát menší než  $\sigma$
- čím jsou rozsahy výběru větší, tím méně výběrové průměry kolísají (kolem populačního průměru)

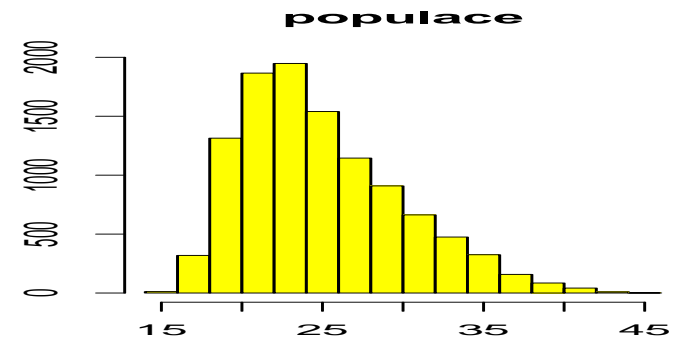
- pro **normální** rozdělení, kde  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ , platí  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ ; normování průměru vede k normovanému normálnímu rozdělení

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0,1)$$

89

### příklad: věk matek

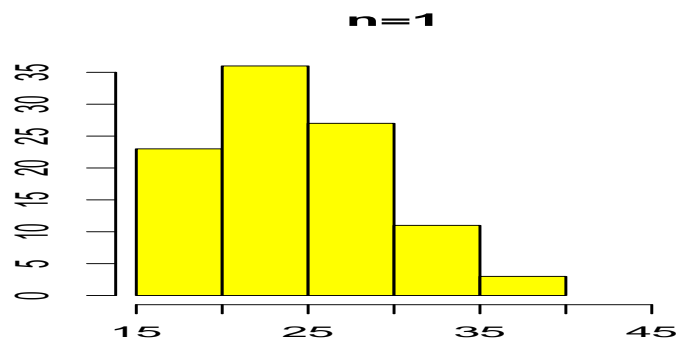
- velká populace rodičů (11 tisíc)



90

### příklad: věk matek

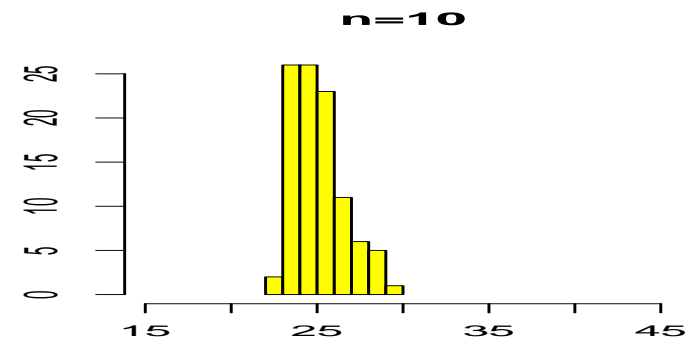
- náhodně vybráno 100 matek (průměry rozsahu  $n = 1$ )



91

### příklad: věk matek

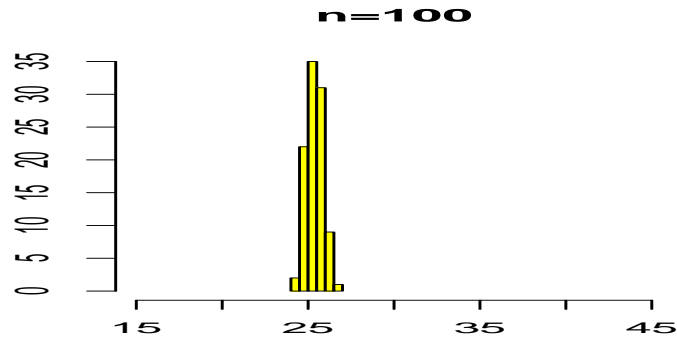
- náhodně vybráno 100 krát po  $n = 10$  matkách, 100 průměrů:



92

## příklad: věk matek

- náhodně vybráno 100 krát po  $n = 100$  matkách, 100 průměrů:

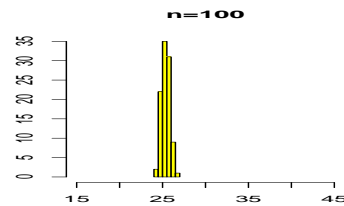
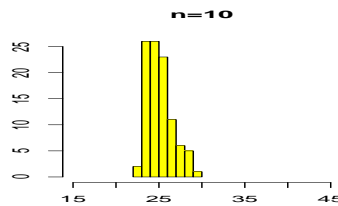
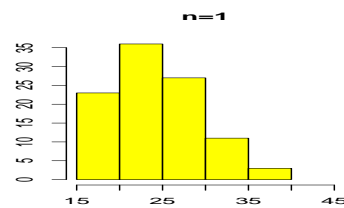
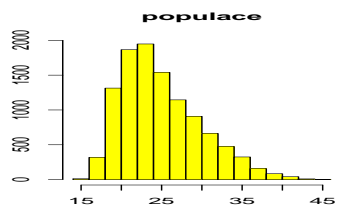


93

## příklad: věk matek – shrnutí

- velká populace rodičů (11 tisíc)
- náhodně vybráno 100 matek (vlastně průměry výběrů rozsahu  $n = 1$ ), nakreslen histogram
- 100 krát náhodně vybráno vždy  $n = 10$  matek, spočítán průměr, nakreslen histogram průměrů
- 100 krát náhodně vybráno vždy  $n = 100$  matek, spočítán průměr, nakreslen histogram průměrů
- podle teorie by každý další rozptyl ze 100 průměrů měl být 10 krát menší
- skutečnost (odhady ze 100 realizací): 23,5; 2,20; 0,21

94



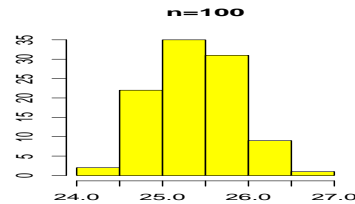
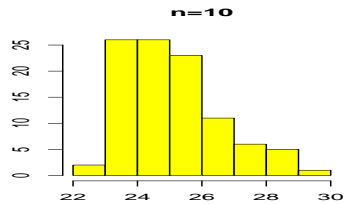
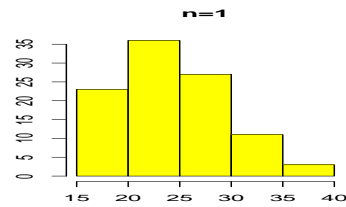
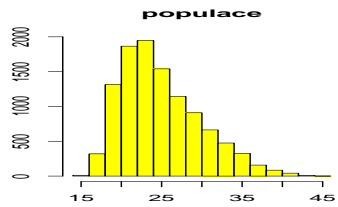
95

## centrální limitní věta (CLT)

- Necht  $X_1, X_2, \dots, X_n$  jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, se střední hodnotou  $\mu$  a rozptylem  $\sigma^2 > 0$  (nemusí mít normální rozdělení). Potom **pro velké  $n$**  má průměr z nich přibližně rozdělení  $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ , jejich součet pak rozdělení  $N(n\mu, n\sigma^2)$ .
- prakticky: pro dost velká  $n$  má **průměr normální rozdělení** s rozptylem  $n$ -krát menším než jednotlivá pozorování, a to bez ohledu na výchozí rozdělení jednotlivých pozorování
- CLT vysvětluje, proč se často s normálním rozdělením: výsledná hodnota je ovlivněna součtem velkého počtu nahodilých malých vlivů
- příklad: průměrný věk matek z velkých výběrů má už (téměř) normální rozdělení

96





průměrný věk matek v opakovaných výběrech:

rozsah výběru $n$	průměr průměrů	směr. odch. průměrů	šikmost průměrů	špičatost průměrů
1	24,74	4,848	0,682	-0,040
10	25,14	1,482	0,743	-0,199
100	25,40	0,455	0,087	-0,076
1000	25,40	0,146	0,156	-0,212
populace	$\mu = 25,41$	$\sigma = 4,932$	$\gamma_1 = 0,771$	$\gamma_2 = 0,189$

97

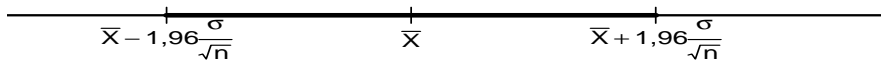
98

### interval spolehlivosti pro výběr z $N(\mu, \sigma^2)$

víme, že platí  $\bar{X} \sim N(\mu, (\sigma/\sqrt{n})^2)$ , tedy po normování

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < 1,96\right) = 0,95$$

což je totéž, jako  $P\left(\bar{X} - 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$   
dostali jsme **95% interval spolehlivosti** pro  $\mu$



### interval spolehlivosti (2)

- **základní vlastnost:** 95% interval spolehlivosti **překryje** s pravděpodobností 95 % **neznámé  $\mu$  (odhadovaný parametr)**
- kdybychom postup prováděli opakovaně, pak asi v 95 % případů interval překryje skutečnou hodnotu  $\mu$ , ve zbylých asi 5 % zůstane skutečné  $\mu$  mimo interval spolehlivosti
- pro velké  $n$  lze neznámé  $\sigma$  nahradit odhadem  $S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$
- pro obecné  $\alpha$  (spolehlivost  $1 - \alpha$ ):

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(\alpha/2) < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(\alpha/2)\right) = 1 - \alpha$$

99

100

### interval spolehlivosti (3)

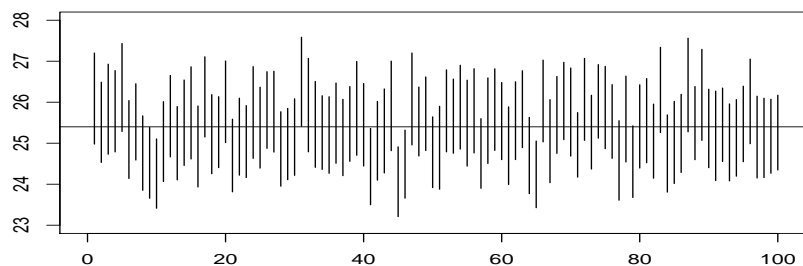
- pro malé  $n$  (asi do 50) a pro  $X_i$  s normálním rozdělením lépe použít kritické hodnoty Studentova  $t$ -rozdělení (pozor na **jinak značené** kritické hodnoty Studentova  $t$ -rozdělení)

$$P\left(\bar{X} - \frac{S_x}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha) < \mu < \bar{X} + \frac{S_x}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha)\right) = 1 - \alpha$$

- interval spolehlivosti lze počítat i pro jiné parametry
- je to interval, který s požadovanou pravděpodobností překryje odhadovaný parametr – **intervalový odhad**

101

příklad: **simulované výběry pro  $n = 100$**  (věk matek)



znázorněno celkem 100 95% intervalů spolehlivosti pro  $\mu$  (ve skutečnosti mimořádně víme, že  $\mu = 25,4$ ), v 7 případech  $\mu$  nepřekryto

103

**příklad: věk matek** (normální rozdělení dáno CLT)

- 95% interval spolehlivosti pro populační průměr věku *všech* matek na základě výběru 99 matek

$$\left(25,7 - 1,98 \cdot \frac{4,1}{\sqrt{99}}; 25,7 + 1,98 \cdot \frac{4,1}{\sqrt{99}}\right) = (24,9; 26,5)$$

- 99% interval spolehlivosti pro populační průměr věku *všech* matek na základě výběru 99 matek (bude užší nebo širší?)

$$\left(25,7 - 2,63 \cdot \frac{4,1}{\sqrt{99}}; 25,7 + 2,63 \cdot \frac{4,1}{\sqrt{99}}\right) = (24,6; 26,8)$$

- větší jistota způsobí delší interval spolehlivosti (méně vypovídající tvrzení)

102

### statistické rozhodování

- **nulová hypotéza**  $H_0$  tvrzení o populaci (parametru), o jehož platnosti chceme rozhodnout (**není rozdíl**, **nezávisí** . . .)
- **alternativní hypotéza**  $H_1$  (alternativa) zbývající možnost (k  $H_0$ ) často „vědecká hypotéza“
- **kritický obor** možné výsledky pokusu, kdy  $H_0$  zamítáme; zpravidla popsán pomocí statistiky (např.  $|Z| \geq z(\alpha/2)$ )
- **obor přijetí** možné výsledky pokusu, kdy  $H_0$  nezamítáme
- **chyba prvního druhu** rozhodnutí zamítnout  $H_0$ , když platí  $H_0$  falešně prokázat „vědeckou hypotézu“
- **chyba druhého druhu** rozhodnutí nezamítnout  $H_0$ , když platí  $H_1$
- **hladina testu**  $\alpha$  (zpravidla 5 %, 1 %) maximální dovolená pst chyby prvního druhu; volí před pokusem, nezávisle na výsledku

104

- **síla testu**  $1 - \beta$  pravděpodobnost zamítnutí neplatné  $H_0$  pst, s jakou prokážeme platnou „vědeckou hypotézu“
- **dosazená hladina testu**  $p$  ( $p$ -hodnota) za platnosti  $H_0$  určená pst, že dostaneme statistiku, která stejně nebo ještě méně podporuje  $H_0$  (nejmenší hladina  $\alpha$ , na které lze ještě  $H_0$  zamítnout), např.  $p = P(|T| \geq t)$ , kde  $t$  je skutečně realizovaná hodnota statistiky  $T$
- $H_0$  se **zamítá**, když  $p \leq \alpha$

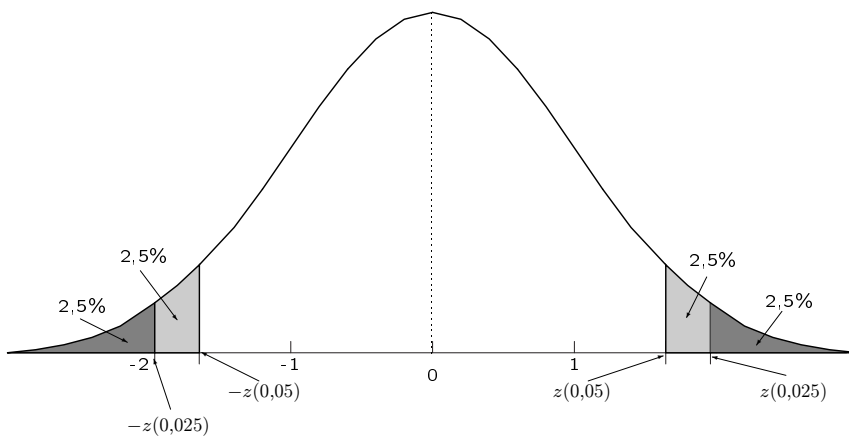
rozhodnutí	skutečnost	
	$H_0$ platí	$H_0$ neplatí
$H_0$ zamítnout (reject)	<b>chyba 1. druhu</b> ( $\leq \alpha$ )	správné rozhodnutí ( $1 - \beta$ )
$H_0$ nezamítnout (accept)	správné rozhodnutí ( $\geq 1 - \alpha$ )	<b>chyba 2. druhu</b> ( $\beta$ )

105

rozhodování o populačním průměru normálního rozdělení,  $\sigma$  známé

- $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$  **nezávislé**;  $\sigma > 0$  známe
- $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ , tedy S.E. ( $\bar{X}$ ) =  $\sigma/\sqrt{n}$
- $H_0 : \mu = \mu_0$  (dané číslo, jiný zápis  $H_0 : \mu - \mu_0 = 0$ )
- platí-li  $H_0$ , pak  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$
- $H_1 : \mu \neq \mu_0 \Rightarrow$  kritický obor:  $|Z|$  velké, tj.  $|Z| \geq z(\alpha/2)$
- $H_1 : \mu > \mu_0$ : zamítnout pro  $Z \geq z(\alpha)$
- $H_1 : \mu < \mu_0$ : zamítnout pro  $Z \leq -z(\alpha)$

106



Hustota  $Z$  za platnosti  $H_0$

107

příklad: **výšky** desetiletých hochů ([cm]) měřené v roce 1961

$\sigma = 6,4$  cm (známo z dřívějších),  $\alpha = 0,05$ ,

$H_0 : \mu = 136,1$  cm (před 10 lety, v roce 1951),  $H_1 : \mu \neq 136,1$  cm

130	140	136	141	139	133	149	151
138	142	127	139	147	139	136	

$$\bar{x} = \frac{1}{15} (130 + 140 + \dots + 147) = 139,133$$

$$z = \frac{139,133 - 136,1}{6,4} \sqrt{15} = 1,835$$

$|z| = 1,835 < z(0,05/2) = 1,960 \Rightarrow H_0$  nelze na 5% hladině zamítnout

ale  $|z| \geq z(0,10/2) = 1,645 \Rightarrow H_0$  se na 10% hladině zamítá

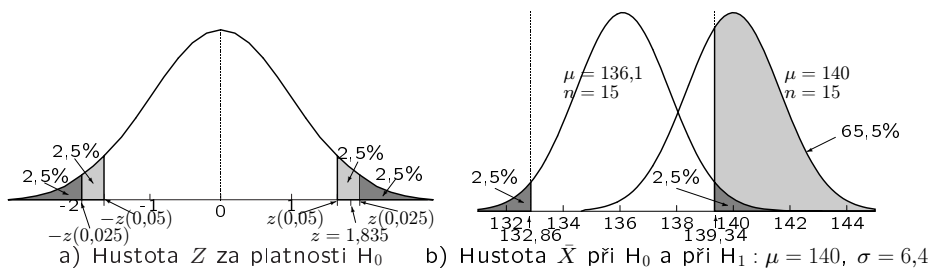
$\Rightarrow p$ -hodnota mezi 5 % a 10 %

**výpočet  $p$ -hodnoty:**

$$p = P(|Z| \geq 1,835) = 2 \cdot P(Z \geq 1,835) = 0,067, \text{ tedy } p = 6,7 \%$$

108

výšky desetiletých hochů (rozdělení  $Z$  a  $\bar{X}$ )



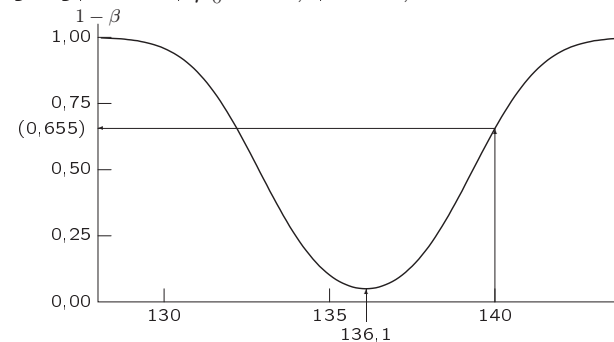
$$\text{S.E.}(\bar{X}) = \sqrt{\frac{6,4^2}{15}} = 1,6525 \Rightarrow 136,1 - 1,6525 \cdot 1,96 = 132,86$$

$$\Rightarrow 136,1 + 1,6525 \cdot 1,96 = 139,34$$

109

**síla testu**  $1 - \beta$  jako funkce skutečné hodnoty  $\mu$   
 pravděpodobnost, že zamítneme nulovou hypotézu, když testovaný  
 parametr je roven  $\mu$  (závisí na skutečné hodnotě parametru)

příklad **výšky**,  $n = 15$ ,  $\mu_0 = 136,1$ ,  $\sigma = 6,4$



110

**volba rozsahu výběru:**

pro zvolenou hodnotu  $\mu_1$  požadujeme sílu  $1 - \beta$  (pravděpodobnost, s jakou odhalíme neplatnost  $H_0$ , je-li skutečnost  $\mu = \mu_1$ ):

$$n \geq \left( \frac{z(\alpha/2) + z(\beta)}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2 \sigma^2$$

aby pro  $\mu_1 = 140$  byla síla 90 % (tj.  $1 - \beta = 0,9$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $z(0,1) = 1,282$ ), bude třeba aspoň

$$n \geq \left( \frac{1,96 + 1,282}{140 - 136,1} \right)^2 6,4^2 = 28,3$$

(místo 15 pozorování jich potřebujeme aspoň 29)

111

**výpočet p-hodnoty:**

vyšlo nám  $z = 1,835$ , proto  $p = P(|Z| \geq 1,835) = 2 \cdot P(Z \geq 1,835) = 0,067$ , tedy  $p = 6,7 \%$

v naší úloze je rozumnější předem zvolená **jednostranná alternativa** (víme totiž, že po nějakou dobu platí, že každá následující generace je větší než ta předcházející; pokoušíme se toto tvrzení dokázat i z těchto dat):

$H_1 : \mu > 136,1$ :  $z = 1,835 \geq 1,645 = z(0,05)$  tedy na 5 % zamítnout  
 $p = P(Z \geq 1,835) = 0,033 (< 0,05)$ , tedy  $p = 3,3 \%$

112

### jednovýběrový $t$ -test ( $\sigma$ neznáme)

- $n$  nezávislých pozorování  $X_1, \dots, X_n$  z normálního rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$
- $H_0 : \mu = \mu_0$  (populační průměr roven dané konstantě)
- nutno odhadnout neznámý rozptyl  $\sigma^2$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

- statistika (místo  $\sigma$  použijeme  $S$ )

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\text{S.E.}(\bar{X})}$$

- $H_1 : \mu \neq \mu_0$  zamítnat při  $|T| \geq t_{n-1}(\alpha)$
- $H_1 : \mu > \mu_0$  zamítnat při  $T \geq t_{n-1}(2\alpha)$
- $H_1 : \mu < \mu_0$  zamítnat při  $T \leq -t_{n-1}(2\alpha)$

113

95% interval spolehlivosti ( $t_{14}(0,05) = 2,145$ ):

$$\left( 139,133 - \frac{6,556}{\sqrt{15}} \cdot 2,145, 139,133 + \frac{6,556}{\sqrt{15}} \cdot 2,145 \right)$$

(135,5, 142,8)

interval obsahuje  $\mu_0 = 136,1 \Rightarrow H_0$  se na 5% hladině **nezamítá**

**jednostranná alternativa**  $H_1 : \mu > 136,1$ :

$$\begin{aligned} t &\geq t_{14}(2 \cdot 0,05) = 1,761 &\Rightarrow & \text{zamítnout } H_0 (\alpha = 5\%) \\ t &< t_{14}(2 \cdot 0,01) = 2,624 &\Rightarrow & \text{nezamítnout } H_0 (\alpha = 1\%) \\ p &= P(T > t) = 0,0474 &\text{ tj. } & p = 4,74 \% \end{aligned}$$

115

### interval spolehlivosti pro $\mu$

$$\left( \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha) \right)$$

příklad **výšky hochů** pro případ neznámého rozptylu ( $H_1 : \mu \neq 136,1$ )

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 = 130^2 + \dots + 147^2 - 15 \cdot 139,133^2 = 601,733$$

$$s^2 = \frac{601,733}{15-1} = 42,981 = 6,556^2$$

$$t = \frac{139,133 - 136,1}{6,556} \sqrt{15} = 1,792 < 2,145 = t_{14}(0,05)$$

$$p = P(|T| \geq 1,792) = 0,0948 \quad (\text{ tj. } 9,48 \%)$$

$H_0$  se na 5% hladině **nezamítá**

114

### párové testy

- $(U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n)$  – párová pozorování **nezávislé** dvojice (možná) závislých náhodných veličin
- výhodná je těsná závislost uvnitř dvojic
- $X_i = U_i - V_i$  (označení rozdílů)  
 $X_1, \dots, X_n$  mají **stejně** rozdělení (předpoklad)
- $U_i, V_i$  – dvojice měření na stejných jedincích (např. hodnota před ošetřením a po něm)
- věk otce a věk matky
- výška otce a výška syna

116

• párový *t*-test

- normální rozdělení:  $X_i = U_i - V_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  **nezávislé**
- $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
- $T = \frac{\bar{X}}{\text{S.E.}(\bar{X})} = \frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n} = \frac{\bar{U} - \bar{V}}{\text{S.E.}(\bar{U} - \bar{V})}$
- $H_0 : \mu = 0$  (pak je  $\mu_U = \mu_V$ )
- ve prospěch  $H_1 : \mu \neq 0$ , když  $|T| \geq t_{n-1}(\alpha)$
- ve prospěch  $H_1 : \mu < 0$ , když  $T \leq -t_{n-1}(2\alpha)$
- ve prospěch  $H_1 : \mu > 0$ , když  $T \geq t_{n-1}(2\alpha)$
- vlastně jednovýběrový *t*-test pro  $X_i = U_i - V_i$

117

• znaménkový test

- stačí znát znaménka rozdílů  $X_i = U_i - V_i$
- pozorování s  $U_i = V_i$  (tj.  $X_i = 0$ ) se vynechají, upraví se  $n$
- $Y$  – počet kladných znamének  $X_i = U_i - V_i$
- $H_0$  : rozdělení  $U$  a  $V$  jsou stejná, pak je nutně  $P(X_i > 0) = 1/2$ , tedy  $Y \sim \text{bi}(n, 1/2)$
- $H_0$  zamítáme pro velká nebo malá  $Y$ :

$$Z = \frac{Y - n/2}{\sqrt{n/4}}, \quad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

- $H_0$  zamítáme pro velká nebo malá  $Y$  (Yatesova korekce):

$$Z = \frac{|Y - n/2| - 0,5}{\sqrt{n/4}}, \quad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

119

**příklad:** výšky rodičů (párová pozorování!)

- $U$  – výška otce,  $V$  – výška matky
- $\alpha = 0,05$ ,  $H_0 : \mu_U - 10 = \mu_V$  resp.  $\mu_U - \mu_V = 10$
- $n = 99$ ,  $\bar{u} = 179,267$ ,  $\bar{v} = 166,970$
- $\bar{x} = \bar{u} - \bar{v} - 10 = 2,293$ ,  $s_X = s_{U-10-V} = s_{U-V} = 8,144$
- $t = \frac{2,293}{8,144} \sqrt{99} = 2,801$ , tedy  $|t| > t_{98}(0,05) = 1,9845 \Rightarrow$  zamítnout  $H_0$
- $p = P(|T| \geq t) = 0,0061$  (0,61 %)
- 95% interval spolehlivosti pro  $\mu_U - \mu_V$ :
 
$$\left( 12,293 - \frac{8,144}{\sqrt{99}} 1,9845 ; 12,293 + \frac{8,144}{\sqrt{99}} 1,9845 \right) = (10,67; 13,92)$$
- 99% interval spolehlivosti: (10,14; 14,44)

118

• párový Wilcoxonův test

- nutné **symetrické** rozdělení  $X_i = U_i - V_i$
- opět vyloučíme případy  $U_i = V_i$  (tj.  $X_i = 0$ )
- určíme pořadí  $R_i^+$  hodnot  $|X_i| = |U_i - V_i|$
- $W$  součet pořadí, kde bylo  $U_i > V_i$  (tj.  $X_i > 0$ )

$$Z = \frac{W - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

- někdy pod odmocninou ještě oprava na výskyt shodných pořadí
- někdy (nové verze NCSS) poněkud jinak s nulovými  $X_i$

120

**příklad** porovnání dvou metod učení nazpaměť, zjištěné rozdíly:

5, -1, 2, 3, -1, 4, 3, -3

- $H_0$  : populační medián rozdílů = 0
- znaménkový test:  $y = 5$ ;  $n = 8$ ;  $z = \frac{|5-8/2|-0,5}{\sqrt{8/4}} = 0,3536$ ;  $p = 0,7237$

- Wilcoxonův test (předpokládáme symetrii)

$u_i - v_i$	5	-1	2	3	-1	4	3	-3
$r_i^+$	8	1,5	3	5	1,5	7	5	5

$$w = 8 + 3 + 5 + 7 + 5 = 28$$

$$z = \frac{28 - 8 \cdot 9/4}{\sqrt{8 \cdot 9 \cdot 17/24}} = \frac{10}{\sqrt{51}} = 1,4$$

$$p = 0,1614 \quad p = 16,1 \%$$

121

### interval spolehlivosti pro podíl (1)

- populace: **podíl**  $\pi$  prvků s danou vlastností
- $\pi$  – **pravděpodobnost**, že vlastnost má náhodně vybraný prvek
- výběr: **relativní četnost** ve výběru  $\hat{\pi} = \frac{Y}{n}$
- relativní četnost je průměr nula-jedničkové veličiny – pro velké  $n$  má přibližně normální rozdělení
- nula-jedničková veličina má rozptyl  $\pi(1 - \pi)$
- relativní četnost (= průměr) má rozptyl  $\frac{\pi(1-\pi)}{n}$

123

### centrální limitní věta pro četnosti

- (CLT obecně:) Nechť  $X_1, X_2, \dots, X_n$  jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, se střední hodnotou  $\mu$  a rozptylem  $\sigma^2 > 0$ . Potom pro velké  $n$  má průměr z nich rozdělení  $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ , jejich součet rozdělení  $N(n\mu, n\sigma^2)$ .
- absolutní četnost  $Y$  výskytu jevu s pstí  $\pi$  v  $n$  nezáv. pokusech
  - $Y$  – součet veličin s alternativním rozdělením  $\text{alt}(\pi)$
  - $Y \sim \text{bi}(n, \pi)$ , proto přibližně  $Y \sim N(n\pi, n\pi(1 - \pi))$
- relativní četnost  $\hat{\pi} = Y/n$ 
  - $\hat{\pi}$  – průměr veličin s alternativním rozdělením
  - $\hat{\pi} \sim N(\pi, \pi(1 - \pi)/n)$

122

### interval spolehlivosti pro podíl (2)

- střední chyba relativní četnosti = směrodatná odchylka relativní četnosti = odmocnina z rozptylu je tedy  $\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$
- pravděpodobnost  $\pi$  neznáme, odhadneme ji pomocí relativní četnosti  $\hat{\pi} = \frac{Y}{n}$
- odtud je  $100(1 - \alpha)\%$  interval spolehlivosti pro  $\pi$

$$\left( \hat{\pi} - z(\alpha/2) \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}{n}}; \hat{\pi} + z(\alpha/2) \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}{n}} \right)$$

- existuje přesnější (pracnější) postup

124

### příklad: hody s hrací kostkou

- odhadujeme pravděpodobnost šestky,  $\alpha = 0,05$

- kostka A:  $n = 100, y = 17, \hat{\pi}_A = 0,17$

$$\left( 0,17 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,17 \cdot 0,83}{100}}; 0,17 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,17 \cdot 0,83}{100}} \right) = (0,10; 0,24)$$

- kostka B:  $n = 100, y = 41, \hat{\pi}_B = 0,41$

$$\left( 0,41 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,41 \cdot 0,59}{100}}; 0,41 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,41 \cdot 0,59}{100}} \right) = (0,31; 0,51)$$

- důležitý rozdíl: u kostky A patří  $1/6 = 0,167$  do 95% intervalu spolehlivosti; u kostky B nikoliv

125

### příklad kalous

z 50 případů dal kalous ve 33 případech přednost infikované myši před neinfikovanou

$Y$  – počet „zdarů“,  $n = 50, \pi$  – pst, že zvolí infikovanou  $\Rightarrow Y$  má **binomické rozdělení**

za  $H_0: \pi = 1/2$  (myši se neliší)  $Y \sim \text{bi}(50, 1/2)$

**alternativní hypotéza:**  $H_1: \pi > 1/2$ :

**kritický obor:** velká hodnota  $Y$  (tj. velké  $\hat{\pi}$  resp. velké  $Z$ )

$$z = \frac{33 - 50 \cdot 0,5}{\sqrt{50 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 2,263 \quad p = \text{P}(Z \geq 2,263) = 0,0118$$

s opravou na spojitost (NCSS):

$$z = \frac{33 - 50 \cdot 0,5 - 0,5}{\sqrt{50 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 2,121 \quad p = \text{P}(Z \geq 2,121) = 0,0169$$

127

**pst výskytu jevu** (binomické rozdělení)  $Y \sim \text{bi}(n, \pi)$

- $H_0: \pi = \pi_0: Z = \frac{Y - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)}} = \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\text{S.E.}(\hat{\pi})} \sim \text{N}(0, 1)$

- někdy s opravou na spojitost

$$Z = \frac{|Y - n\pi_0| - 0,5}{\sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)}} \text{sign}(Y - n\pi_0) \sim \text{N}(0, 1)$$

- $H_1: \pi \neq \pi_0$ : zamítnout pokud  $|Z| \geq z(\alpha/2)$

- $H_1: \pi > \pi_0$ : zamítnout pokud  $Z \geq z(\alpha)$

- $H_1: \pi < \pi_0$ : zamítnout pokud  $Z \leq -z(\alpha)$

- existují přesný postup, bez použití aproximace

126

**dosazená hladina:** za  $H_0$  počítaná pst, že dostaneme výsledek aspoň tolik odporující nulové hypotéze, jako ve skutečném pokusu:

$$\begin{aligned} p &= \text{P}(Y \geq 33) \\ &= \sum_{k=33}^{50} \binom{50}{k} 0,5^k (1 - 0,5)^{50-k} \\ &= 0,0164 \\ &= \text{P}(Y > 32) \quad (\text{NCSS, Prob. Calc.}) \end{aligned}$$

128



## dvouvýběrový *t*-test

- $n_X$  nezávislých pozorování  $X$ ,  $n_Y$  nezávislých pozorování  $Y$
- tyto výběry musí být **nezávislé** (musí vyplynout ze způsobu pořizení dat)
- rozptyly  $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$  shodné (odhady  $S_X^2, S_Y^2$  podobné, lze ověřit)
- normální rozdělení v obou výběrech (lze ověřit pro velká  $n_X, n_Y$ , jinak podle zkušenosti)
- společný odhad rozptylu (vážený průměr odhadů z jedn. výběrů)

$$S^2 = \frac{n_X - 1}{n_X + n_Y - 2} S_X^2 + \frac{n_Y - 1}{n_X + n_Y - 2} S_Y^2$$

- statistika (pro test hypotézy, že rozdělení  $X$  a  $Y$  jsou stejná)

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\text{S.E.}(\bar{X} - \bar{Y})} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S} \sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}}$$

129

příklad **výšky** dětí (opět v [cm])

hoši:  $n_X = 15$ ,  $\bar{x} = 139,133$ ,  $s_X^2 = 42,981$   
 dívky:  $n_Y = 12$ ,  $\bar{y} = 140,833$ ,  $s_Y^2 = 33,788$

$H_0$ : shodné populační průměry,  $H_1$ : neshodné

$$s^2 = \frac{14}{25} 42,981 + \frac{11}{25} 33,788 = 38,936$$

odhad S.E.  $(\bar{X} - \bar{Y})$ :  $\sqrt{38,936 \frac{15 + 12}{15 \cdot 12}} = \sqrt{5,8404} = 2,4167$

$$t = \frac{139,133 - 140,833}{\sqrt{38,936}} \sqrt{\frac{15 \cdot 12}{15 + 12}} = \frac{-1,7}{2,4167} = -0,703$$

$|t| < t_{25}(0,05) = 2,0595 \Rightarrow$  na 5% hladině nezamítat ( $p = 48,8$  %)  
 95% int. spol. pro rozdíl popul. průměrů (patří tam nula?):

$$(-1,700 - 2,4167 \cdot 2,0595, -1,700 + 2,4167 \cdot 2,0595) = (-6,7, 3,3)$$

131

- $H_0 : \mu_X = \mu_Y$   
zamítnout ve prospěch alternativy
  - $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$  když  $|T| \geq t_{n_X+n_Y-2}(\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X > \mu_Y$  když  $T > t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X < \mu_Y$  když  $T < -t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$
- při pochybách o shodě rozptylů Welchův test (modifikace  $T$ )
- shodu rozptylů lze ověřit např.  $F$ -testem nebo testem Leveneho

130

- test **Mannův-Whitneyův** (dvouvýběrový Wilcoxonův)

- dva nezávislé výběry rozsahu  $n_X, n_Y$
- spojitá rozdělení
- $H_0$ : rozdělení jsou stejná
- za  $H_0$  jsou výběry „dobře promíchané“
- určí pořadí všech (promíchaných)
- kritický obor: průměrná pořadí se příliš liší
- $W_X$  součet pořadí hodnot  $X$

$$Z = \frac{W_X - n_X(n_X + n_Y + 1)/2}{\sqrt{n_X n_Y (n_X + n_Y + 1)/12}}$$

- shodu zamítni, pokud  $|Z| \geq z(\alpha/2)$  (přibližný test)
- citlivý vůči posunutí, méně vůči nestejně variabilitě

132

hoši	dívky	poř.
127		1
130		2
	131	3
	132	4
133		5
	135	6
136 136		7,5
138		9
139 139 139		11
140		13
141	141 141 141 141	16
142	142	19,5
	143	21
	146 146	22,5
147		24
149		25
151	151	26,5

$$w_X = 1 + 2 + 5 + 2 \cdot 7,5 + 9 + 3 \cdot 11 + 13 + 16 + 19,5 + 24 + 25 + 26,5 = 189$$

$$w_Y = 3 + 4 + 6 + 4 \cdot 7,5 + 16 + 19,5 + 21 + 2 \cdot 22,5 + 26,5 = 189$$

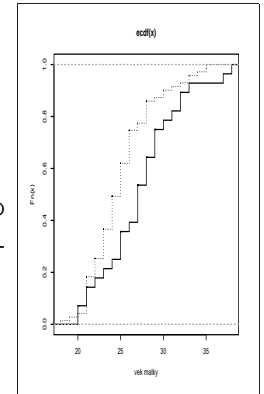
$$z = \frac{189 - 15 \cdot (15 + 12 + 1)/2}{\sqrt{15 \cdot 12(15 + 12 + 1)/12}} = -1,025$$

$$p = 0,3055$$

přesně:  $p = 0,3149$

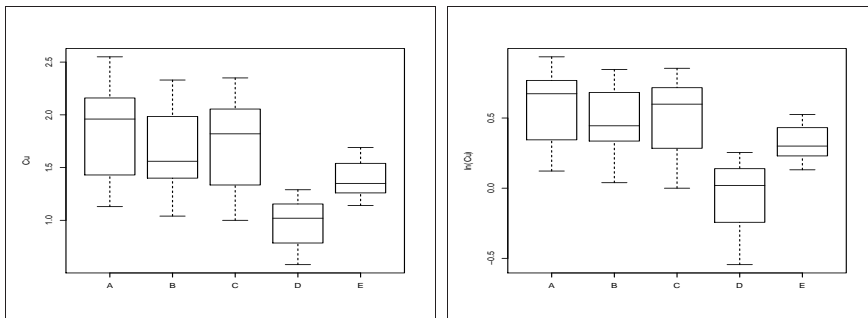
### • test Kolmogorovův-Smirnovův

- porovná empirické distribuční funkce
- citlivý vůči všem neshodám (nejen co do populačního průměru či populačního mediánu)
- věk matky, zda kojí v 24. týdnu
- vpravo kojící matky (jsou spíše starší)
- $D = 0,354$ ,  $p = 0,95 \%$  (NCSS)



### motivační příklad pro analýzu rozptylu játra:

pět míst na řece, vždy vyloveno po 7 rybách, zjišťována koncentrace mědi v játrech; liší se tato místa svým znečištěním? (logaritmování na pravé straně stabilizuje rozptyl)



### analýza rozptylu jednoduchého třídění (ANOVA)

- $Y_{11}, \dots, Y_{1n_1} \sim N(\mu_1, \sigma^2)$  (první výběr, průměr  $\bar{Y}_{1\bullet}$ )
- $Y_{21}, \dots, Y_{2n_2} \sim N(\mu_2, \sigma^2)$  (druhý výběr, průměr  $\bar{Y}_{2\bullet}$ )
- $\dots$
- $Y_{k1}, \dots, Y_{kn_k} \sim N(\mu_k, \sigma^2)$  ( $k$ -tý výběr, průměr  $\bar{Y}_{k\bullet}$ )
- **nezávislé** výběry (shodné rozptyly, normální rozdělení)
- $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_k$  ( $= \mu$ )     $H_1$  : neplatí  $H_0$
- rozklad součtu čtverců (celkový průměr  $\bar{Y}_{\bullet\bullet}$ )

$$\sum \sum (Y_{it} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum n_i (\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2 + \sum \sum (Y_{it} - \bar{Y}_{i\bullet})^2$$

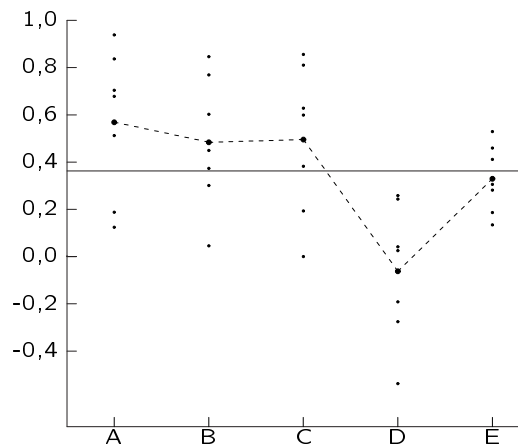
(celková variabilita) = (variabilita mezi) + (variabilita uvnitř)

$$S_T = S_A + S_e$$

$$f_T = f_A + f_e$$

$$(n - 1) = (k - 1) + (n - k)$$

- $H_0$  zamítnout, je-li  $F_A = \frac{S_A/f_A}{S_e/f_e} \geq F_{f_A, f_e}(\alpha)$



137

### tabulka analýzy rozptylu

variabilita	$S$	$f$	$S/f$	$F$	$p$
výběry	$S_A$	$f_A = k - 1$	$S_A/f_A$	$F_A$	$p_A$
reziduální	$S_e$	$f_e = n - k$	$S_e/f_e$		
celková	$S_T$	$f_T = n - 1$			

### příklad játra

variab.	$S$	$f$	$S/f$	$F$	$p$
místa	1,796	4	0,4490	5,862	0,0013
rezid.	2,285	30	0,0762		
celk.	4,081	34			

$F = 5,862 > F_{4,30}(0,05) = 2,690$  na 5% hladině jsme **prokázali** rozdíl

138

- **model** (měření = úroveň + „chyba“)

$$\begin{aligned}
 Y_{it} &= \mu_i + E_{it} & 1 \leq t \leq n_i, & 1 \leq i \leq k \\
 &= \mu + (\mu_i - \mu) + E_{it} & E_{it} & \text{nezávislé} \\
 &= \mu + \alpha_i + E_{it} & E_{it} & \sim N(0, \sigma^2)
 \end{aligned}$$

- **reparametrizace** ( $\alpha_i$  – efekty faktoru A):

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$$

- $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$  (totéž, jako  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ )
- pro  $k = 2$  je  $F = T^2$
- zobecnění úlohy dvouvýběrového  $t$ -testu na několik nezávislých výběrů

139

- **mnohonásobná srovnání** (které dvojice  $\mu_i$  (resp.  $\alpha_i$ ) se liší?) (Tukeyův test, Kramerova verze)

$$|\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet}| \geq q_{k, n-k}(\alpha) \sqrt{\frac{S^2}{2} \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

$$S^2 = \frac{S_e}{f_e} = \frac{\sum \sum (Y_{it} - \bar{Y}_{i\bullet})^2}{n - k}$$

(nutnost zachovat zvolenou hladinu testu)

- **ověření shody rozptylů**
  - Leveneův test (vlastně ANOVA s  $|Y_{it} - \text{med}_t Y_{it}|$ )
  - Bartlettův test (citlivý na splnění předpokladu o normálním rozdělení)

140

místo	počet	průměr	efekt	směr. odchylka
A	7	0,569	0,206	0,312
B	7	0,484	0,121	0,279
C	7	0,496	0,133	0,318
D	7	-0,063	-0,426	0,290
E	7	0,329	-0,034	0,144
celkem	35	0,363	0,000	0,104

$$q_{5,30}(0,05) \sqrt{\frac{0,0762}{2} \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \right)} = 4,10 \cdot 0,104 = 0,428$$

$-0,063 + 0,428 = 0,365 \Rightarrow$  na 5% hladině se místa D s nejmenším průměrem liší všechna místa s průměry aspoň 0,365, tedy místa A, B, C, nikoliv E

141

### Kruskalův-Wallisův test

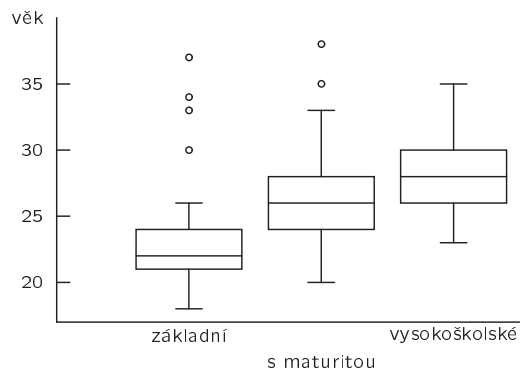
- zobecnění dvouvýběrového Wilcoxonova testu (použijí se opět pořadí místo původních hodnot)
- předpoklady:
  - $k$  nezávislých výběrů
  - spojitá rozdělení
  - $H_0$ : rozdělení jsou stejná
- $T_i$  - součet pořadí v  $i$ -tém výběru

$$Q = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

$H_0$  se zamítá při  $Q \geq \chi_{k-1}^2(\alpha)$   
(velká variabilita průměrných pořadí)

142

příklad **kojení** (věk matek podle vzdělání)



vzdělání	$n_i$	průměrný věk	střední chyba	součet pořadí	průměrné pořadí
základní	34	23,412	0,638	1025	30,15
maturita	47	26,278	0,543	2618	55,70
VŠ	18	28,500	0,877	1307	72,61
celk.	99	25,697		4950	50,00

$$Q = \frac{12}{99 \cdot 100} \left( \frac{1025^2}{34} + \frac{2618^2}{47} + \frac{1307^2}{18} \right) - 3 \cdot 100 = 29,25$$

$$\chi_2^2(0,05) = 5,99 \quad p < 0,0001$$

143

144

## náhodné bloky

- zobecnění párových testů na  $r$ -tice
- **náhodný blok**
  - homogenní skupina  $r$  objektů
  - počet objektů ve skupině = počet ošetření (nebo jeho násobek)
  - ošetření se přiřadí uvnitř bloku **náhodně**  
(každému ošetření stejný počet objektů)
- bloky – náhodné efekty  $A_i \sim N(0, \sigma_A^2)$   
ošetření – pevné efekty  $\beta_j$  ( $\sum \beta_j = 0$ )

$$Y_{ij} = \mu + A_i + \beta_j + E_{ij} \quad E_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

předpokládá se **aditivní** vliv, symbolicky zapisovaný  $A + B$

145

## náhodné bloky

- testované hypotézy
  - $H_A : \sigma_A^2 = 0$  (nulová variabilita mezi bloky)
  - $H_B : \beta_1 = \dots = \beta_r = 0$  ( $B$  nemá vliv)

- rozklad variability

$$S_T = S_A + S_B + S_e$$

- vliv dvou **faktorů**  
( $A$  – náhodný,  $B$  – pevný)

146

## příklad diety

- váhové přírůstky za danou dobu
  - $r = 4$  ošetření (pevné efekty, zvolili jsme je sami)
  - $k = 5$  vrhů (náhodné efekty, zvolila je náhodně příroda)

vrh	dieta				průměr
	A	B	C	D	
1	6,6	5,2	7,4	9,1	7,075
2	10,1	11,4	13,0	12,6	11,775
3	5,8	4,2	9,5	8,8	7,075
4	12,1	10,7	11,9	13,0	11,925
5	8,2	8,8	9,6	9,4	9,000
průměr	8,56	8,06	10,28	10,58	9,370

147

- tabulka ANOVA

variabilita	$S$	$f$	$S/f$	$F$	$p$
vrhy	91,932	4	22,983	22,26	<0,0001
dieta	23,332	3	7,774	7,53	0,0043
reziduální	12,388	12	1,032	-	-
celk.	127,642	19	-	-	-

- nesprávně aplikované jednoduché třídění ANOVA:  
kdybychom zapomněli na závislost některých pozorování způsobenou náhodnými bloky (vrhy), dostali bychom:  
 $S_e = 91,932 + 12,388 = 104,320$ ,  $f_e = 4 + 12 = 16$

$$F = \frac{23,332/3}{104,320/16} = 1,193, \quad p = 0,344$$

148

## Friedmanův test

- model  $Y_{ij} = \mu + A_i + \beta_j + E_{ij}$  (náhodný řádkový efekt)  
nebo  $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + E_{ij}$  (pevný řádkový efekt)
- $E_{ij}$  nezávislé, spojitě rozdělení
- $H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_r$  (nezávisí na ošetření)
- určí pořadí v rámci každého bloku (řádku)
- za hypotézy je v každém řádku náhodná permutace čísel  $1, \dots, r$ , tedy součty ve sloupcích (pro ošetření) podobné

$$Q = \frac{12}{kr(r+1)} \sum_{j=1}^r \left( \sum_{i=1}^k R_{ij} \right)^2 - 3k(r+1)$$

- zamítnat  $H_0$  : pro  $Q \geq \chi_{r-1}^2(\alpha)$

149

## příklad diety

vrh	dieta				prům.
	A	B	C	D	
1	6,6	5,2	7,4	9,1	7,075
2	10,1	11,4	13,0	12,6	11,775
3	5,8	4,2	9,5	8,8	7,075
4	12,1	10,7	11,9	13,0	11,925
5	8,2	8,8	9,6	9,4	9,000
prům.	8,56	8,06	10,28	10,58	9,370

vrh	dieta			
	A	B	C	D
1	2	1	3	4
2	1	2	4	3
3	2	1	4	3
4	3	1	2	4
5	1	2	4	3
součet	9	7	17	17

- $k = 5, r = 4$

- $Q = \frac{12}{5 \cdot 4 \cdot 5} (9^2 + 7^2 + 17^2 + 17^2) - 3 \cdot 5 \cdot 6 = 9,96$

- $Q > \chi_3^2(0,05) = 7,8147,$   
 $p = 0,0189$

150

## dvojně třídění s interakcemi

- vliv dvou faktorů nemusí být aditivní

$$Y_{ijt} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + E_{ijt}$$

$$E_{ijt} \sim N(0, \sigma^2)$$

- symbolicky  $A + B + AB$
- $\sum_i \alpha_i = 0$  **efekty** faktoru A odpovídající jeho  $k$  úrovním
- $\sum_j \beta_j = 0$  **efekty** faktoru B odpovídající jeho  $r$  úrovním
- $\sum_i \gamma_{ij} = 0, \sum_j \gamma_{ij} = 0$  **interakce** vyjadřují neaditivitu obou faktorů (vliv A závisí na úrovni B, vliv B závisí na úrovni A)

151

- testy

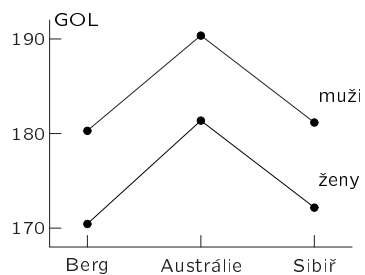
- $H_{AB} : \gamma_{ij} = 0$  (aditivita)
- $H_A : \alpha_i = 0$  (faktor A nemá vliv)
- $H_B : \beta_j = 0$  (faktor B nemá vliv)
- pokud zamítneme  $H_{AB}$ , nemá smysl testovat  $H_A, H_B$ , neboť prostřednictvím interakcí oba faktory vliv mají; pak je lépe přejít k modelu jednoduchého třídění s kombinovanými úrovněmi

152

příklad **Howells**:

lebky exhumované na třech místech (A)  
rozlišované podle pohlaví (B)

- největší délka mozkovny



$$(p_{AB} = 0,8872)$$

153

příklad **Howells** největší délka mozkovny (GOL)

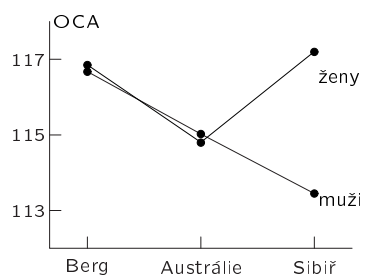
pohlaví	místo	$n_{ij}$	$\bar{y}_{ij}$	$s_{ij}$
M	Berg	40	180,300	7,293
F	Berg	40	170,450	6,641
M	Austrálie	40	190,375	5,555
F	Austrálie	40	181,375	6,632
M	Sibiř	40	181,175	6,468
F	Sibiř	40	172,175	5,228

tabulka ANOVA

var.	$S$	$f$	$S/f$	$F$	$p$
místa	5242,1	2	2621,1	65,2	<0,0001
pohl.	5170,8	1	5170,8	128,6	<0,0001
inter.	9,6	2	4,8	0,1	0,8872
rezid.	9410,6	234	40,2		
celk.	19833,2	239			

154

- týlní úhel



$$(p_{AB} = 0,0222)$$

155

příklad **Howells** týlní úhel (OCA)

pohlaví	místo	$n_{ij}$	$\bar{y}_{ij}$	$s_{ij}$
M	Berg	40	116,675	5,567
F	Berg	40	116,850	5,682
M	Austrálie	40	115,025	4,382
F	Austrálie	40	114,800	4,286
M	Sibiř	40	113,450	4,782
F	Sibiř	40	117,200	4,973

tabulka ANOVA

var.	$S$	$f$	$S/f$	$F$	$p$
místa	150,908	2	75,454	3,05	0,0493
pohl.	91,267	1	91,267	3,69	0,0560
inter.	191,608	2	95,804	3,87	0,0222
rezid.	5789,550	234	24,742		
celk.	6223,333	239			

156

- **pevné efekty**

- úrovně faktoru volí experimentátor
- při opakovaném pokusu je lze zvolit stejně
- vypovídáme o konkrétních úrovních faktoru
- $H_0$ : nulové efekty

- **náhodné efekty**

- úrovně faktoru volí příroda
- při opakovaném pokusu jsou jiné
- vypovídáme o populaci možných úrovní faktoru
- $H_0$ : nulová variabilita efektu

- testy obecně závisí na charakteru efektu

- doporučují se **vyvážené** modely

157

### porovnání populačních měr polohy (přehled)

rozdělení	normální	spojité
populační parametr (o čem je hypotéza)	populační průměr	populační medián (distribuční funkce)
jeden výběr	jednovýběrový $t$ -test	znaménkový Wilcoxon
výběr dvojic	párový $t$ -test	znaménkový Wilcoxon
dva nezávislé výběry	dvouvýběrový $t$ -test	Mann-Whitney (Kolmogorov-Smirnov)
$k$ nezávislých výběrů	analýza rozptylu jedn. třídění	Kruskal-Wallis

158

### vyšetřování závislosti

nezávisle proměnná(é)	závisle proměnná	
	<b>spojitá</b>	<b>nominální</b>
<b>spojitá</b>	regrese korelace	( <i>logistická regrese</i> )
<b>nominální</b>	analýza rozptylu	kontingenční tabulky

příklady:

- hmotnost na výšce
- rakovina plic na počtu vykouřených cigaret
- hmotnost obilky na živném roztoku
- barva očí a barva vlasů

159

### Korelace a regrese

- **korelace**

- měří **sílu** (těsnost) **vzájemné** závislosti **spojitých** veličin
- lze použít k **prokazování** existence **vzájemné** závislosti  $X, Y$
- k **porovnávání síly** (těsnosti) závislosti v několika populacích
- **symetrická** vlastnost v  $X, Y$

- **regrese**

- udává **jak** závisí střední hodnota **spojité** veličiny  $Y$  na nezávisle proměnné (proměnných)  $x$
- **nesymetrická** vlastnost (závislost  $Y$  na  $x \neq$  závislost  $X$  na  $y$ )
- lze použít k **prokazování** existence závislosti **závisle** proměnné  $Y$  na **nezávisle** proměnné  $x$
- umožňuje **předpovídat** hodnotu  $Y$  pro zvolenou hodnotu  $x$

160



## korelační koeficient

- (populační) korelační koeficient  $\rho_{XY}$  (zaveden na obr. 68)
  - $|\rho_{XY}| \leq 1$ ; pro nezávislé  $X, Y$  je  $\rho_{XY} = 0$
  - měří sílu **lineární** závislosti
- (výběrový) korelační koeficient  $r_{xy}$

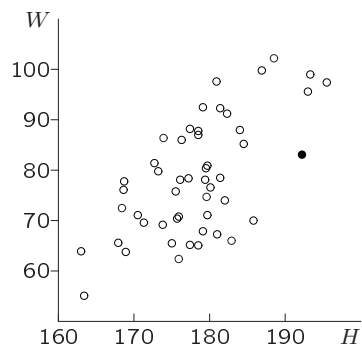
$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_X^2 S_Y^2}} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2 \sum (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{S_X} \right) \left( \frac{Y_i - \bar{Y}}{S_Y} \right) \quad (\text{z-skóry})$$

$$S_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

161

příklad **tuk** (v závorce po vynechání označeného pozorování)



výška vers. hmotnost

$$r = 0,643 \quad (0,654)$$

$$t = 5,814 \quad (5,921)$$

$$p < 0,0001 \quad (p < 0,0001)$$

163

- k prokázání závislosti nutno **normální** rozdělení  $X, Y$
- $H_0 : \rho_{XY} = 0$  se na hladině  $\alpha$  zamítá:

$$T = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2}, \quad |T| \geq t_{n-2}(\alpha)$$

- **Spearmanův** korelační koeficient

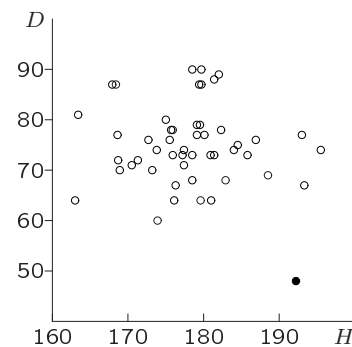
- měří sílu **monotonní** závislosti
- založen na **pořadích**  $R_i, Q_i$  hodnot  $X_i, Y_i$

$$r_{XY}^{(S)} = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^n (R_i - Q_i)^2$$

- k testu nezávislosti nepotřebuje normální rozdělení
- $H_0$ : (nezávislost) se zamítá, je-li  $|r_{XY}^{(S)} \sqrt{n-1}| \geq z(\alpha/2)$

162

příklad **tuk** (v závorce po vynechání označeného pozorování)



výška vers. diast. tlak

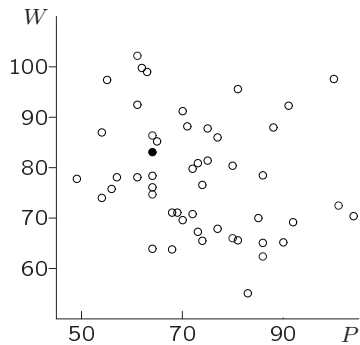
$$r = -0,145 \quad (-0,018)$$

$$t = -1,019 \quad (-0,124)$$

$$p = 0,3135 \quad (0,9017)$$

164

příklad **tuk** (v závorce po vynechání označeného pozorování)



puls vers. hmotnost

$$r = -0,245 \quad (-0,241)$$

$$t = -1,752 \quad (-1,701)$$

$$p = 0,0862 \quad (0,0955)$$

165

Fisherova  $Z$ -transformace (přiblíží chování  $r$  normálnímu rozdělení)

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \sim N\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}, \frac{1}{n-3}\right)$$

• příklad **děti**: porodní délka, hmotnost

– dívky:  $r_1 = 0,5687$ ,  $n_1 = 51$ ,  $z_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0,5687}{1-0,5687} = 0,6456$

– hoši:  $r_2 = 0,5967$ ,  $n_2 = 49$ ,  $z_2 = 0,6880$

– test shody (odhady  $r_1, r_2$  jsou **nezávislé!**)

$$z = \frac{0,6456 - 0,6880}{\sqrt{\frac{1}{51-3} + \frac{1}{49-3}}} = -0,2055.$$

srovnej s kritickou hodnotou  $z(0,05/2) = 1,960$ ,  $p = 83,8 \%$

166

– 95% interval spolehlivosti pro  $\zeta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}$  u dívek

$$\left(0,6456 - \frac{1,960}{\sqrt{51-3}}; 0,6456 + \frac{1,960}{\sqrt{51-3}}\right) = (0,363; 0,929)$$

– 95% interval spolehlivosti pro  $\rho_1$  inverzní transformací

$$\rho = \frac{e^{2\zeta} - 1}{e^{2\zeta} + 1}$$

tedy

$$\left(\frac{e^{2 \cdot 0,363} - 1}{e^{2 \cdot 0,363} + 1}; \frac{e^{2 \cdot 0,929} - 1}{e^{2 \cdot 0,929} + 1}\right) = (0,348; 0,730)$$

167

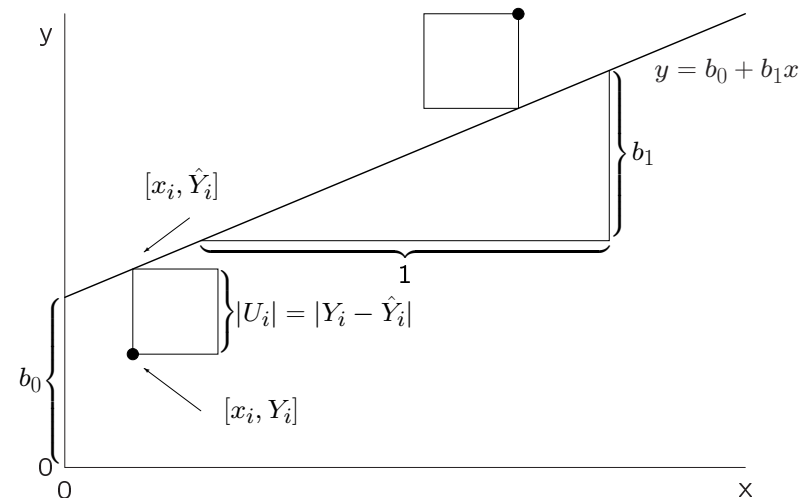
**regrese** (původ pojmu)

- tendence (návrát) k průměrnosti (F. Galton (1886) vyšetřoval dědičnost výšky postavy)
- uvažujme otce, jejichž výška je rovna průměrné výšce generace **všech** otců; průměrná výška synů těchto otců bude rovna průměrné výšce **všech** synů
- uvažujme otce o 10 cm **vyšší**, než je průměrná výška generace otců: průměrná výška synů těchto otců bude jen asi o 5 cm **vyšší**, než průměrná výška generace synů
- uvažujme otce o 10 cm **nižší**, než je průměrná výška generace otců: průměrná výška synů těchto otců bude jen o asi 5 cm **nižší**, než průměrná výška generace synů

168

## regresní přímka

- odhadovaná závislost:  $EY = \beta_0 + \beta_1 x$
- k daným  $x_1, \dots, x_n$  zjistíme  $Y_1, \dots, Y_n$
- předpoklady:
  - **nezávislá** pozorování
  - **stejný** rozptyl  $\sigma^2$
  - **normální** rozdělení (potřebné až pro testy)
- $b_0, b_1$  – odhady metodou **nejmenších čtverců**:  
minimalizovat 
$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$



169

170

- odhad závislosti  $EY = \beta_0 + \beta_1 x$

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 x$$

- $b_1$  – odhad směrnice  $\beta_1$
- $b_1$  – odhad změny střední hodnoty závisle proměnné  $Y$  při **jednotkovém změně** nezávisle proměnné  $x$
- reziduum  $U_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (b_0 + b_1 x_i)$

- **reziduální součet čtverců**:

$$S_e = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = \sum_{i=1}^n U_i^2$$

- **reziduální rozptyl**

$$S^2 = \frac{S_e}{n - 2}$$

171

## jiné vyjádření regresní přímky

- uvažovanou závislost lze psát ve tvaru

$$Y_i = \beta_0^* + \beta_1(x_i - \bar{x}) + E_i$$

- $\beta_0^*$  vyjadřuje střední úroveň vysvětlované proměnné  $Y$  při průměrné hodnotě nezávisle proměnné  $x$
- $\beta_1$  vyjadřuje citlivost, s jakou reaguje střední hodnota vysvětlované proměnné  $Y$  na jednotkovou odchylku nezávisle proměnné  $x$  od jejího průměru  $\bar{x}$
- odhadem závislosti je ( $b_1$  je stejné jako při klasickém vyjádření)

$$\hat{Y}_i = \bar{Y} + b_1(x_i - \bar{x})$$

172

- **koeficient determinace**

$$R^2 = 1 - \frac{S_e}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

- podíl variability  $Y$  vysvětlené uvažovanou závislostí (jakou část variability  $Y$  se podařilo závislostí vysvětlit)
- ukazuje, zda má smysl předpovídat pomocí regrese

- nezávislost  $E Y$  na  $x$  znamená  $H_0: \beta_1 = 0$

$$T = \frac{b_1}{S.E.(b_1)} \quad |T| \geq t_{n-2}(\alpha)$$

- pokud  $H_0$  zamítneme, říkáme **závislost je průkazná**

173

### mnohonásobná lineární regrese

- závislost na dvou (nebo více) nezávisle proměnných
- pozorování  $(x_1, v_1, Y_1), \dots, (x_n, v_n, Y_n)$
- představa (model)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 v_i + E_i$$

- střední hodnota  $Y_i$  (tj. systematická, nenáhodná složka  $Y_i$ ) vysvětlena pomocí  $x_i, v_i$  jako  $\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 v_i$
- $E_1, \dots, E_n$  (tedy vlastně  $Y_1, \dots, Y_n$ ) jsou **nezávislé** náhodné veličiny
- $E_i \sim N(0, \sigma^2)$  (normální rozdělení se stejným rozptylem)
- $b_0, b_1, b_2$  – odhady parametrů  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$
- $b_1$  – odhad změny střední hodnoty  $Y$  při **jednotkové** změně  $x$  a **nezměněné** hodnotě  $v$

175

**příklad** závislost procenta tuku FAT na výšce HEIGHT u mladých mužů

regresor	$b_j$	S.E.( $b_j$ )	$t$	$p$
abs. člen	-53,870	24,657	-2,185	0,0338
HEIGHT	0,379	0,138	2,742	0,0086

předpověď:  $\hat{Y}_i = -53,870 + 0,379x_i$ ,

tedy  $\widehat{FAT} = -53,870 + 0,379 \cdot HEIGHT$

(na každý centimetr výšky  $v$  průměru 0,379 procentního bodu)

varia- bilita	součet čtverců	st. vol.	prům. čtverec	$F$	$p$
regrese	362,54	1	362,54	7,519	0,0086
rezid.	2314,41	48	48,22		
celk.	2676,95	49	(54,63)		

$$R^2 = \frac{362,54}{2676,95} = 1 - \frac{2314,41}{2676,95} = 0,135$$

174

- $b_2$  – odhad změny střední hodnoty  $Y$  při **jednotkové** změně  $v$  a **nezměněné** hodnotě  $x$
- $U_i$  – **reziduum**

$$\begin{aligned} U_i &= Y_i - \hat{Y}_i \\ &= Y_i - (b_0 + b_1 x_i + b_2 v_i) \end{aligned}$$

- **rozklad variability**  $S_T = S_R + S_e$

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = S_R + \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

- **koeficient determinace**  $R^2$

podíl celkové variability, který se podařilo vysvětlit závislostí  $Y$  na  $x, v$  (jakou část variability  $Y$  se podařilo vysvětlit)

$$R^2 = \frac{S_R}{S_T} = 1 - \frac{S_e}{S_T}$$

176

uvažujeme závislost  $E Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 v$

- $H_0 : \beta_2 = 0$  (k vysvětlení chování  $Y$  stačí  $x$ )

$$T_2 = \frac{b_2}{\text{S.E.}(b_2)}, \quad \text{zamítat pro } |T_2| \geq t_{n-3}(\alpha)$$

- $H_0 : \beta_1 = 0$  (k vysvětlení chování  $Y$  stačí  $v$ )

$$T_1 = \frac{b_1}{\text{S.E.}(b_1)}, \quad \text{zamítat pro } |T_1| \geq t_{n-3}(\alpha)$$

- $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$  (chování  $Y$  nezávisí ani na  $x$  ani na  $v$ )

$$F = \frac{S_R/2}{S_e/(n-3)} \geq F_{2,n-3}(\alpha)$$

177

## $\chi^2$ -testy

- pro znaky v **nominálním** měřítku
- někdy i v ordinálním měřítku, ale bez ohledu na uspořádání
- postupy pro ordinální znaky existují, ale zde není na ně místo
- **příklady**
  - počty osob s krevními skupinami A, B, AB, 0
  - počty dětí narozených v jednotlivých měsících v Praze
  - počty matek se základním, středním, vysokoškolským vzděláním

179

## příklad závislost FAT na HEIGHT a WEIGHT

regresor	$b_j$	S.E.( $b_j$ )	$t$	$p$
abs. člen	11,327	16,682	0,679	0,5005
HEIGHT	-0,262	0,110	-2,376	0,0216
WEIGHT	0,624	0,0690	9,050	<0,0001

- při **stejně výšce** očekáváme na každý kg hmotnosti o 0,6 proc. bodu více tuku
- u mužů, kteří se liší výškou o 10 cm a **mají stejnou hmotnost** očekáváme, že ti vyšší mají v průměru o 2,6 proc. bodu **méně** tuku
- $R^2 = 1833,11/2676,95 = 1 - 843,85/2676,95 = 0,685$

variabilita	souč. čtv.	st. vol.	prům. čtv.	$F$	$p$
regrese	1833,11	2	916,55	51,050	<0,001
rezid.	843,85	47	17,95		
celk.	2676,95	49	(54,63)		

178

- **multinomické** rozdělení (zobecnění binomického rozdělení)

- v dílčím pokusu  $k$  možných výsledků  $A_1, \dots, A_k$  (neslučitelné, sjednocení všech je jev jistý)
- $\pi_j$  je pst, že vyjde  $A_j$  ( $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_k = 1$ )
- $n$  **nezávislých** dílčích pokusů
- $N_j$  – počet dílčích pokusů, kdy nastalo  $A_j$
- $(N_1, \dots, N_k)$  má multinomické rozdělení s parametry  $n, \pi_1, \dots, \pi_k$
- samotné  $N_j$  má binomické rozdělení, tj.  $N_j \sim \text{bi}(n, \pi_j)$

- **pravděpodobnost** toho, že  $N_1 = n_1, \dots, N_k = n_k$

$$P(N_1 = n_1, \dots, N_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \pi_1^{n_1} \dots \pi_k^{n_k}$$

180

- hlavní vlastnost (platí pro velká  $n$ , např. pokud  $n\pi_j \geq 5$  pro  $\forall j$ )

$$X^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(N_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j} \text{ má přibližně rozdělení } \chi_{k-1}^2$$

- **test shody**  $H_0: \pi_1 = \pi_1^0, \dots, \pi_k = \pi_k^0$   
(pravděpodobnosti hypotézou dány **jednoznačně**)

– platí-li  $H_0$ , očekáváme četnosti blízké hodnotám  $E N_j = n\pi_j^0$ :

$$X^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(N_j - n\pi_j^0)^2}{n\pi_j^0}$$

- $H_0$  zamítáme, je-li  $X^2 \geq \chi_{k-1}^2(\alpha)$
- $N_j$  – **experimentální** četnosti
- $n\pi_j^0$  – **teoretické** četnosti

181

příklad **měsíce**:  
počty studentů biologie narozených v jednotlivých měsících  
**hypotéza**: děti se rodí během roku **rovnoměrně**

měsíc	$n_j$	$n\pi_j^0$	přínos
1	11	9,43	0,2623
2	9	8,52	0,0276
3	13	9,43	1,3539
4	11	9,12	0,3861
5	8	9,43	0,2161
6	5	9,12	1,8635
7	10	9,43	0,0348
8	6	9,43	1,2461
9	13	9,12	1,6473
10	8	9,43	0,2161
11	8	9,12	0,1383
12	9	9,43	0,0194
celkem	111	111,00	7,4115

$$X^2 = 7,4115 < \chi_{12-1}^2(0,05) = 19,675 \quad p = 0,765$$

182

### složená nulová hypotéza (hypotéza o struktuře)

- hypotéza, která určuje vztahy mezi pravděpodobnostmi, některé parametry zůstávají volné, je třeba je odhadnout
- příklad antigen: předpokladem je model pro fenotypy AA, Aa, aa (neurčený parametr  $\theta$ )

$$P(AA) \equiv \pi_1(\theta) = \theta^2$$

$$P(Aa) \equiv \pi_2(\theta) = 2\theta(1 - \theta)$$

$$P(aa) \equiv \pi_3(\theta) = (1 - \theta)^2$$

- jsou zjištěné četnosti fenotypů  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 17$ ,  $n_3 = 6$  v souladu s modelem?

183

- odhad  $\theta$  maximalizací *logaritmické věrohodnostní funkce*

$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= \ln(P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, N_3 = n_3)) \\ &= \ln(c_1 (\theta^2)^{n_1} (2\theta(1 - \theta))^{n_2} ((1 - \theta)^2)^{n_3}) \\ &= c_2 + (2n_1 + n_2) \ln \theta + (n_2 + 2n_3) \ln(1 - \theta) \\ \hat{\theta} &= \frac{1}{2} + \frac{N_1 - N_3}{2n} \quad \left( = 0,5 + \frac{18 - 6}{82} = 0,646 \right) \end{aligned}$$

- obecně se  $H_0$  zamítá, pokud ( $\theta$  má  $q$  počet složek)

$$X^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(N_j - n\pi_j(\hat{\theta}))^2}{n\pi_j(\hat{\theta})} \geq \chi_{k-1-q}^2(\alpha)$$

- antigen:  $\chi^2 = 0,355 < \chi_{3-1-1}^2(0,05) = 3,84$ ,  $p = 0,551$   
hypotézu na 5% hladině nezamítáme

184

## kontingenční tabulka

- nominální znak s hodnotami  $A_1, \dots, A_r$
- nominální znak s hodnotami  $B_1, \dots, B_c$
- $N_{ij}$  kolikrát současně  $A_i$  a  $B_j$  (**sdružené četnosti**)
- **marginální četnosti**

$$N_{i\bullet} = \sum_{j=1}^c N_{ij} \quad N_{\bullet j} = \sum_{i=1}^r N_{ij}$$

- **nezávislost** znaků: pro všechny dvojice  $i, j$  platí

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j)$$

185

### příklad kouření u mužů

#### empirické sdružené a marg. četnosti

vzdělání	zákl.	odb.	mat.	VŠ	celk.
nekuřák	14	55	55	73	197
bývalý kuřák	11	28	44	42	125
kuřák	14	24	24	17	79
silný kuřák	78	189	175	106	548
celkem	117	296	298	238	949

#### očekávané sdružené a marg. četnosti

vzdělání	zákl.	odb.	mat.	VŠ	celk.
nekuřák	24,3	61,4	61,9	49,4	197
bývalý kuřák	15,4	39,0	39,3	31,3	125
kuřák	9,7	24,6	24,8	19,8	79
silný kuřák	67,6	170,9	172,1	137,4	548
celkem	117	296	298	238	949

závislost jsme na 5% hladině prokázali

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(14 - 24,3)^2}{24,3} \\ &+ \frac{(55 - 61,4)^2}{61,4} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{(106 - 137,4)^2}{137,4} \\ &= 38,68 \\ f &= (4 - 1)(4 - 1) = 9 \\ p &< 0,0001 \end{aligned}$$

187

- teoretické četnosti (protějšek  $N_{ij}$ )

$$o_{ij} = n \cdot P(\widehat{A}_i) \cdot P(\widehat{B}_j) = n \cdot \frac{N_{i\bullet}}{n} \cdot \frac{N_{\bullet j}}{n} = \frac{N_{i\bullet} \cdot N_{\bullet j}}{n}$$

- $H_0$ : znaky jsou **nezávislé**

$$X^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(N_{ij} - o_{ij})^2}{o_{ij}}$$

- nezávislost se zamítá pokud  $X^2 \geq \chi_{(r-1)(c-1)}^2(\alpha)$
- musí být  $o_{ij} \geq 5 \forall (i, j)$  (tj. pro všechny dvojice)

186

### příklad Baden

barva očí	barva vlasů				celkem
	světlá	hnědá	černá	ryšavá	
modrá	1 768	807	189	47	2 811
šedá/zelená	946	1 387	746	53	3 132
hnědá	115	438	288	16	857
celkem	2 829	2 632	1 223	116	6 800

- barva očí  $r = 3$ , barva vlasů  $c = 4$ ,  $n = 6800$
- $o_{11} = 2811 \cdot 2829/6800 = 1169$ ,  $o_{12} = 2811 \cdot 2632/6800 = 1088 \dots$
- $o_{34} = 116 \cdot 857/6800 = 14,62 \geq 5$

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(1768 - 1169)^2}{1169} + \frac{(807 - 1088)^2}{1088} + \dots = 1073,5 \\ &> \chi_6^2(0,05) = 12,5916 \\ p &< 0,0001 \end{aligned}$$

závislost je na každé rozumné hladině **prokázána**

188

• **test homogenity**

- hodnoty znaku  $B_1, \dots, B_c$
- $r$  **nezávislých** výběrů z různých populací
- $H_0$ : populace se **neliší**
- dál stejně jako pro nezávislost

populace	skupina				celkem
	0	A	B	AB	
C	121	120	79	33	353
D	118	95	121	30	364
celkem	239	215	200	63	717

• **příklad krevní skupiny**

$$\chi^2 = \frac{(121 - 353 \cdot 239/717)^2}{353 \cdot 239/717} + \dots = 11,742 > \chi_3^2(0,05) = 7,815, \quad p = 0,008$$

nejmenší teoretická četnost:  $353 \cdot 63/717 = 31,02 > 5$

**McNemarův test** (test symetrie)

- **párový** test pro nominální veličinu s hodnotami  $B_1, \dots, B_k$
- zjišťujeme hodnoty nominálního znaku na **stejných** objektech za **dvojích** okolností (před ošetřením, po ošetření)
- $N_{ij}$  počet objektů, u nichž první měření  $B_i$  a druhé měření  $B_j$
- **hypotéza**: pravděpodobnosti možných hodnot znaku jsou **stejně** za obojích okolností (před ošetřením i po něm)

$$X^2 = \sum_{i < j} \sum \frac{(N_{ij} - N_{ji})^2}{N_{ij} + N_{ji}}$$

- hypotézu zamítneme při  $X^2 \geq \chi_{k(k-1)/2}^2(\alpha)$
- výrazy ve jmenovateli musí být kladné!
- nezávisí na počtu objektů, kdy vyšly oba výsledky stejně

**příklad stromy**

1994	1995			celkem
	1	2	3	
1	4	3	3	10
2	7	21	11	39
3	1	15	35	51
celkem	12	39	49	100

- stav týchž stromů ve dvou sezónách
- celkem 100 stromů

$$\chi^2 = \frac{(3 - 7)^2}{3 + 7} + \frac{(3 - 1)^2}{3 + 1} + \frac{(11 - 15)^2}{11 + 15} = 3,215$$

- $\chi_3^2(0,05) = 7,8147, \quad p = 0,3597$
- rozdíl mezi sezónami jsme neprokázali

**čtyřpolní tabulka**

$a$	$b$	$a + b$
$c$	$d$	$c + d$
$a + c$	$b + d$	$n$

- speciální případ kontingenční tabulky pro  $r = c = 2$
- test nezávislosti/homogenity

$$X^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + c)(b + d)(a + b)(c + d)}$$

zamítá se pro  $X^2 \geq \chi_1^2(\alpha) = z(\alpha/2)^2$

- **Yatesova korekce**  $X_Y^2 = \frac{n(|ad - bc| - n/2)^2}{(a + c)(b + d)(a + b)(c + d)}$
- **Fisherův faktoriálový (exaktní) test**
  - počítá přímo dosaženou hladinu  $p$
  - malé četnosti nevdají



## příklad hraboš

<i>Frenkelia</i> <i>spp.</i>	<i>Sarcocystis spp.</i>		celkem
	+	-	
+	4	27	31
-	11	473	484
celkem	15	500	515

- souvisí spolu nákazy dvěma cizopasníky?
- nulová hypotéza: **nezávislost**

$$\chi^2 = \frac{515(4 \cdot 473 - 11 \cdot 27)^2}{15 \cdot 500 \cdot 31 \cdot 484} = 11,643, \quad p = 0,0006$$

- **ale:**  $15 \cdot 31 / 515 = 0,9 < 5$
- **Yates:**  $\chi^2 = 8,187 \quad p = 0,0042$

193

## jak použijeme statistiku

- co o problému zjistili jiní? (přečti, sepiš)
- co chceš zjistit?
  - zformuluj otázku (to určí možné statistické metody)
  - zformuluj nulovou a alternativní hypotézu
- zvol hladinu testu  $\alpha$
- zvol rozsah výběru (přesnost, délka int. spolehlivosti, síla testu)
- poříd data
  - proved' měření (podrobné záznamy!)
  - převed' do elektronické formy (kódování)
  - vyčisti data (grafy, popisné statistiky, ...)
- proved' výpočty, kresli grafy
- použij výsledky a grafy, interpretuj

195

- **Fisherův test:**  $p = 0,0092$
- na 5% hladině závislost **prokázána**
- (zcela jiná otázka) **vyskytují se dvojí cizopasníci se stejnou pstí?** McNemarův test:

$$\chi^2 = \frac{(11 - 27)^2}{11 + 27} = 6,7368, \quad p = 0,0094$$

194

## dvojí původ dat

- **plánovaný** (organizovaný) **pokus**
  - aktivně zasahujeme
  - fixujeme okolnosti (stálá teplota, světelný režim)
  - nastavujeme úrovně zvoleného faktoru (dva živné roztoky)
  - jedincům náhodně přiřazujeme ošetření
  - zjistíme-li rozdíl, známe jeho příčinu
- **šetření** (sledování dění)
  - pouze sledujeme, nezasahujeme
  - rozdělení do skupin nemůžeme ovlivnit
  - rozdíl mezi skupinami může být způsoben matoucí (**confounding**) veličinou, která souvisí s rozdělením do skupin i s měřeným znakem (příklad: plánované těhotenství na vzdělání matky, matoucí je věk matky)

196

## jaké úlohy řešíme

- **popsat stav**
  - poloha (průměr, medián, kvartily, . . .)
  - variabilita (směr. odchylka, rozptyl, kvartilové rozpětí)
  - závislost (korelační koeficient, Spearmanův korel. koeficient)
  - tvar rozdělení (šikmost, špičatost)
- **prokázat vliv ošetření**
  - změna polohy ( $t$ -testy, analýza rozptylu)
  - změna variability (Levene,  $F$ -test, Bartlettův test)
  - jiná změna (Kolmogorov-Smirnov)

197

## výběr metody

- jakou úlohu řešíme?
- jsou výběry nezávislé?
  - z organizace pokusu
- lze předpokládat normální rozdělení?
  - ze zkušenosti
  - lze ověřovat (ve skupinách pozorování, z reziduí)
  - lze soudit z grafu (normální diagram)
- je rozptyl stálý?
  - lze ověřovat (ve skupinách pozorování, z reziduí)
  - lze soudit z grafu (rozptylový diagram)

199

## jaké úlohy řešíme

- **prokázat závislost**
  - obě spojitě (korelační koeficient)
  - spojitá na kvalitativními (ANOVA)
  - obě kvalitativní (kontingenční tabulka)
- **popsat závislost**
  - spojité veličiny na spojitých či kvalitativních – regrese

198

## volba nulové a alternativní hypotézy

- $H_0$  zjednodušuje model
  - populace se neliší (výběry se liší jen náhodně)
  - veličiny jsou nezávislé
  - $H_0$  zpravidla chceme vyvrátit abychom prokázali svoji vědeckou hypotézu
- $H_1$  je opak nulové hypotézy
  - zpravidla obsahuje tvrzení, které chceme dokázat
  - pokud existuje jednostranná alternativní hypotéza, musíme ji zvolit **před pokusem** na základě úvah, které **nejsou** založeny na použitých datech
- pouze zamítnutím  $H_0$  něco dokazujeme

200

### permutační testy - dva výběry

- $H_0$  : identické rozdělení v obou populacích
- příklad **hnojení** (porovnání dvou hnojiv)
  - $x$ : 50,45,42,54 (klasické hnojivo)
  - $y$ : 59,56,58,51,52 (nové hnojivo)
  - $H_0$  stejné výnosy;  $H_1$  výnosy jsou nestejně
- porovnejme průměry:  $\bar{x} - \bar{y} = 47,75 - 55,2 = -7,45$
- celkem 9 hodnot, pro ně  $\binom{9}{4} = 126$  permutací – možností, kolikrát vybrat 4 hodnoty  $x$  z 9 hodnot
- mezi nimi 4 takové, že rozdíl průměrů až do  $-7,45$  ( $p = 3,17\%$ )
- při oboustranné alternativě další dvě kombinace, kdy rozdíl aspoň 7,45, což je 1,59 % permutací
- celkem  $p = \frac{4+2}{126} = \frac{6}{126} = 0,0476$        $p = 4,76\%$

201

$x$				$y$					$\bar{x} - \bar{y}$	$w_X$
50	45	42	54	59	56	58	51	52	-7,45	10
3	2	1	6	9	7	8	4	5		
*	*	*					*		-8,80	10
*	*	*						*	-8,35	11
	*	*					*	*	-7,90	12
*	*	*	*						-7,45	12
	*	*	*				*		-7,00	13
	*	*	*					*	-6,55	14
	...					...				
	*			*			*	*	-0,25	20
	...					...				
			*	*		*	*		6,50	27
			*	*		*	*	*	6,95	28
*				*	*	*	*		6,95	27
				*	*	*	*		7,40	28
				*	*	*	*	*	7,85	29
			*	*	*	*	*		8,75	30

$$p_{\text{perm}} = \frac{4+2}{126} = 0,0476$$

$$t = -2,5238$$

$$p_W = \frac{4+4}{126} = 0,0635$$

$$p = 0,0396$$

202

### permutační testy - jeden výběr (příklad učení nazpaměť)

- $H_0$  : střed symetrie rozdělení je v nule
- rozdíly dvou metod učení nazpaměť:
  - 5, -1, 2, 3, -1, 4, 3, -3      průměr = 1,5
- pokud jsou obě metody ekvivalentní, pak mají rozdíly náhodná znaménka; případnou nulu nutno předem vyloučit
- pro posloupnost 8 znamének celkem  $2^8 = 256$  možností
- ideál pro průměr 0
- v 27 případech průměr aspoň 1,5, v 27 případech nejvýše -1,5
- 

$$p_{\text{perm}} = \frac{27+27}{256} = \frac{54}{256} = 0,2109 \quad (21,09\%)$$

203

$x$	data								$\bar{x}$	$w$
	5	-1	2	3	-1	4	3	-3		
$r$	8	1,5	3	5	1,5	7	5	5		
1	-5	-1	-2	-3	-1	-4	-3	-3	-2,75	0
2	-5	-1	-2	-3	1	-4	-3	-3	-2,50	1,5
3	-5	1	-2	-3	-1	-4	-3	-3	-2,50	1,5
4	-5	-1	2	-3	-1	-4	-3	-3	-2,25	3
5	-5	1	-2	-3	1	-4	-3	-3	-2,25	3
				...						
18	-5	1	-2	-3	-1	-4	-3	3	-1,75	6,5
19	5	-1	-2	-3	-1	-4	-3	-3	-1,50	8
				...						
23	-5	-1	-2	-3	1	4	-3	-3	-1,50	8,5
24	-5	1	-2	3	1	-4	-3	-3	-1,50	8
25	-5	1	-2	-3	-1	4	-3	-3	-1,50	8,5
26	-5	1	-2	-3	1	-4	3	-3	-1,50	8
27	-5	1	-2	-3	1	-4	-3	3	-1,50	8
28	5	-1	-2	-3	1	-4	-3	-3	-1,25	9,5
				...						
229	-5	1	2	3	-1	4	3	3	1,25	26,5
230	5	-1	2	3	-1	4	3	-3	1,50	28
231	5	-1	2	3	-1	4	-3	3	1,50	28
232	5	-1	2	3	1	-4	3	3	1,50	27,5
233	5	-1	2	-3	-1	4	3	3	1,50	28
234	5	1	2	3	-1	-4	3	3	1,50	27,5
235	5	1	-2	3	1	4	3	-3	1,50	28
236	5	1	-2	3	1	4	-3	3	1,50	28
237	5	1	-2	-3	1	4	3	3	1,50	28
238	-5	1	2	3	1	4	3	3	1,50	28
239	5	-1	2	3	1	4	3	-3	1,75	29,5
				...						
255	5	1	2	3	-1	4	3	3	2,50	34,5
256	5	1	2	3	1	4	3	3	2,75	36

$$p_{\text{perm}} = \frac{27+27}{256} = 0,2109$$

$$p_W = \frac{25+25}{256} = 0,1953$$

$$t = 1,5$$

$$p = 0,1773$$

204

## některé další modely a metody

### • diskriminační analýza

- na každém objektu měříme několik spojitých veličin
- známe příslušnost objektů ke skupinám
- DA dá rozhodovací pravidlo pro přiřazování dalších objektů do skupin
- například podle kosterních nálezů určovat pohlaví

### • shluková analýza

- na každém objektu měříme několik spojitých veličin
- konstruujeme skupiny navzájem blízkých (podobných) objektů
- vzniklé skupiny se snažíme interpretovat

205

## příklad z archeologie (Thurzo 1979)

- trojí pohřebiště (avarsko-slovanská, slovanská, maďarská)
- měříme šířku tváře (zy-zy) a míru 8a (sagitální průměr středu diafýzy tibie), uvažujeme ženy

### • průměry:

pohřebiště	rozsah	šířka	míra 8a
slovanské	39	122,410	25,615
maďarské	27	127,963	30,471

- odhad varianční matice (společná pro obě populace)

$$S = \begin{pmatrix} 25,631 & -0,724 \\ -0,724 & 6,937 \end{pmatrix}$$

- korelační koeficient  $r = -0,054$
- $t$ -testy:  $t_1 = -4,381$ ,  $t_2 = -7,380$

206

## rozhodovací pravidlo (DA)

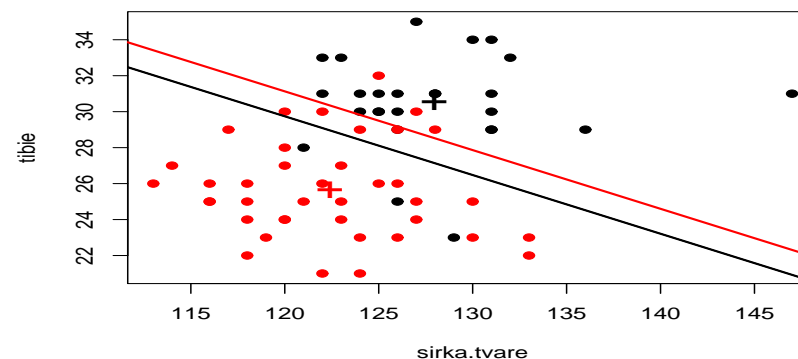
- rozhodujeme mezi dvěma pohřebišti
- stejné psti obou populací
- ke slovanským přiřaď, když  $0,237 \text{ šířka} + 0,726 \text{ míra } 8a < 50,060$
- k maďarským když  $0,237 \text{ šířka} + 0,726 \text{ míra } 8a > 50,060$
- špatně zařazeno:
  - pouze 7 z 39 slovanských (17,9 %)
  - pouze 3 z 27 maďarských (11,1 %)
- při očekávaném poměru 4:1 ve prospěch slovanské populace bude ke slovanským pohřebišťům přiřazena žena, když

$$0,237 \text{ šířka} + 0,726 \text{ míra } 8a < 50,060 + \ln\left(\frac{4}{1}\right) = 51,446$$

207

slov, mad, + značí těžiště

poměr 1:1, poměr 4:1



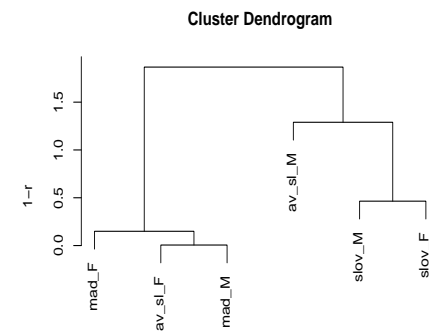
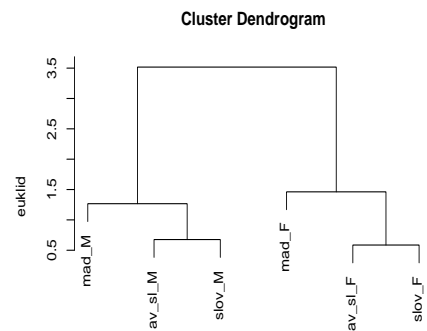
208

## rozlišení pohřebišť (shluky)

- každé pohřebiště a pohlaví charakterizujeme průměrnou hodnotou čtyř veličin (ještě výška a délka lebky (g-op))
- pro těchto šest čtveřic se spočítá **vzdálenost**
- postupně se vytvářejí skupinky nejbližších, pak jejich vzdálenost
- grafické znázornění – **dendrogram**
- vzdálenost (nepodobnost)
  - euklidovská
  - Mahalanobisova (uváží závislosti)
  - 1-korelační koeficient
- vzdálenost skupin: těžiště / nejbližší prvky / nejvzdálenější prvky

209

vzdálenost skupin = vzdálenost nejvzdálenějších prvků



210