

Testování hypotéz o střední hodnotě
ve výběrech z normálního rozdělení

Jednovýběrový t-test:

Data:

realizace náh. výběru X_1, \dots, X_n , t. j. **n nezávislých pozorování**
náhodné veličiny $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Hypotéza: $H_0: \mu = \mu_0$.

Oboustranná alternativa: $H_1: \mu \neq \mu_0$.

Bodový odhad pro μ : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Idea testu: **\bar{X} daleko od $\mu_0 \Rightarrow$ zamítáme H_0** ve prospěch H_1 .

Intervalový odhad pro μ : $I_\mu = [\bar{X} - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}); \bar{X} + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2})]$,

kde $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ je bodový odhad rozptylu σ^2 ,

$t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ je $(1 - \frac{\alpha}{2})$ 100% - ní kvantil Studentova rozdělení t_{n-1}

a platí $P(I_\mu \text{ pokryje } \mu) = 1 - \alpha$.

Nejčastěji volíme hladinu testu $\alpha = 0.05 = P(\text{zamítneme } H_0, \text{ když platí})$.

Za platnosti H_0 máme: $P(\mu_0 \in I_\mu) = 1 - \alpha$, a tedy $P(\mu_0 \text{ neleží v } I_\mu) = \alpha$, odtud dostaneme

kritický obor testu: $\mu_0 \text{ neleží v } I_\mu \Rightarrow$ zamítáme H_0 ve prospěch H_1 na hladině α .

Lze upravit na tvar: $|T_n| > t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \Rightarrow$ zamítáme H_0 ve prospěch H_1 na hladině α ,

kde $T_n = \sqrt{n} \frac{1}{S_n} (\bar{X} - \mu_0)$ je testová statistika mající Studentovo rozdělení t_{n-1} .

Ověření předpokladů: nezávislost: intuitivně podle povahy dat,

normalita: histogram dat, test na normalitu dat (např. Shapiro-Wilk).

Nesplnění normality: 1-výběrový Wilcoxonův test.

Párový t-test:

Data:

nezávislá párová pozorování $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$,

taková, že $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \dots, n$ tvoří výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = \mu_X - \mu_Y$.

Hypotéza: **$H_0 : \mu_X = \mu_Y$** , t.zn. $\mu = 0$.

Oboustranná alternativa: $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$, t.zn. $\mu \neq 0$.

Provedení testu: **aplikujeme jednovýběrový t-test na rozdíly v párech** Z_1, \dots, Z_n .

Dvouvýběrový t-test:

Data:

realizace 2 nezávislých náhodných výběrů

X_1, \dots, X_m z rozdělení $N(\mu_X, \sigma^2)$ a Y_1, \dots, Y_n z rozdělení $N(\mu_Y, \sigma^2)$.

Hypotéza: **$H_0 : \mu_X = \mu_Y$** , t.zn. $\mu_X - \mu_Y = 0$.

Oboustranná alternativa: $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$.

Idea testu: **\bar{X} daleko od $\bar{Y} \Rightarrow$ zamítáme H_0** ve prospěch H_1 .

Intervalový odhad pro $\mu_X - \mu_Y$: **$I = [\bar{X} - \bar{Y} - \frac{S}{\sqrt{\frac{mn}{m+n}}} t_{m+n-2}(1 - \frac{\alpha}{2}); \bar{X} - \bar{Y} + \frac{S}{\sqrt{\frac{mn}{m+n}}} t_{m+n-2}(1 - \frac{\alpha}{2})]$** ,

kde $S^2 = \frac{1}{m+n-2} [(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2]$ je vážený průměr odhadů rozptylu

v 1. a v 2. výběru.

Kritický obor testu: **0 neleží v $I \Rightarrow$ zamítáme H_0** ve prospěch H_1 na hladině α .

Lze upravit na tvar: $|T| > t_{m+n-2}(1 - \frac{\alpha}{2}) \Rightarrow$ zamítáme H_0 ve prospěch H_1 na hladině α ,

kde $T = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \frac{1}{S} (\bar{X} - \bar{Y})$ je testová statistika mající Studentovo rozdělení t_{m+n-2} .

Ověření předpokladů: nezávislost mezi výběry a uvnitř výběrů: intuitivně podle povahy dat,

shoda rozptylů: F-test (zamítá $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, je li $\frac{S_X^2}{S_Y^2}$ daleko od 1),

normalita: histogramy nebo testy na normalitu v obou výběrech.

Nesplnění předpokladů:

normalita ANO → shoda rozptylů ANO → dvouvýběrový t- test,

normalita ANO → shoda rozptylů NE → Welchův test,

normalita NE → dvouvýběrový Wilcoxonův test.

Poznámky k normalitě:

1) Centrovaný a normovaný průměr $\sqrt{n} \frac{1}{\sigma} (\bar{X} - \mu)$ veličin s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$ má $N(0,1)$, nahradíme-li směrodatnou odchylku σ jejím odhadem S_n , dostaneme $T_n \sim t_{n-1}$.

Proto se v kritických oborech t-testů používají kvantily rozdělení t_{n-1} .

Pro $n \rightarrow \infty$ je Studentovo rozdělení o $n-1$ stupních volnosti t_{n-1} přibližně stejné jako $N(0,1)$.

2) CLV => centrovaný a normovaný průměr $\sqrt{n} \frac{1}{\sigma} (\bar{X} - \mu)$ má přibližně rozdělení $N(0,1)$.

Proto **při velkém n nemá porušení normality dat zásadní vliv na fungování testu,**

testujeme pak na hladině přibližně rovné α . To platí pro jednovýběrový i dvouvýběrový t-test.

Poznámky k nezávislosti:

1) **Předpoklad nezávislosti** pozorování, tj., že data jsou realizací náhodného výběru, je **podstatný**. Při podezření na jeho nesplnění bychom neměli výše zmíněné testy používat.

2) Předpoklad nezávislosti zpravidla nesplňují data ve formě časové řady (měření náhodné veličiny v pravidelných časových intervalech, např. teplota ovzduší na meteorologické stanici v Klementinu každý den v poledne).

Podklady ze statistického softwaru k testování hypotéz :

Statistické softwarové produkty (R, Statistica, NCSS, SPSS ...) umožňují testovat

hypotézy o střední hodnotě i jiné - např. hypotézu, že

- data jsou realizací náhodného výběru z normálního rozdělení,
- dvě spojité veličiny jsou nekorelované,
- dvě diskrétní veličiny jsou nezávislé,
- střední hodnoty v $k > 2$ výběrech jsou stejné,
- chování náhodné veličiny ovlivňuje jeden nebo více faktorů.

Na výstupu ke každému testu je softwarem uvedena tzv.

p -hodnota, což je

nejmenší hladina, na které zamítáme testovanou hypotézu.

Provedení testu na hladině α pomocí p -hodnoty:

$p \leq \alpha$ => zamítáme H_0 na hladině p a každé vyšší

=> zamítáme H_0 na hladině α ,

$p > \alpha$ => zamítáme H_0 až od hladiny p

=> nezamítáme H_0 na hladině α .