Rovnoměrné rozdělení na intervalu (a,b)

Hustota je konstantní: $f(x) = \frac{1}{b-a},\ a < x < b.$

Distribuční funkce je $F(x) = \frac{x-a}{b-a}, a < x < b$
(integrujeme hustotu $f(u)$ přes interval (a,x)).

Střední hodnota:
$EX = \frac{a+b}{2}$ (integrujeme $x\,f(x)$ přes interval (a, b)),
$EX^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$ (integrujeme $x^2 f(x)$ přes interval (a, b)).

Rozptyl je $var\,X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Výpočet mediánu M = med X :
$P(X < M) = F(M) = \frac{M-a}{b-a} = 0{,}5.$
odtud máme $M = 0{,}5(b-a) + a = \frac{a+b}{2}$.
Analogicky pro obecný α-kvantil, pro medián je $\alpha = 0{,}5$.

Poznámka: graf hustoty je symetrický podle osy v bodě $\frac{a+b}{2}$, který je střední hodnotou a zároveň mediánem.

Použití: náhodná veličina modeluje dobu nastání události, která může nastat kdykoli v časovém intervalu (a,b), nebo ekvivalentně dobu čekání na tuto událost od začátku intervalu.

Příklad: Podle meteorologické předpovědi může začít pršet kdykoli mezi 7. a 9. hodinou. S jakou pravděpodobností začne pršet až po půl deváté?

Náhodný čas X začátku deště mezi 7:00 a 9:00 má rovnoměrné rozdělení na intervalu délky 2 hodiny. Lze položit $a = 0$, $b=2$.
Hustota je 1/2 a
$P(X > 3/2) = 1 - P(X < 1{,}5) = 1 - \mathrm{F}(1{,}5) = 1 - \frac{1{,}5}{2} = 0{,}25.$

Exponenciální rozdělení s parametrem λ= 1/*a*

Je dáno hustotou $f(x) = \lambda\, exp(-\lambda x), x > 0, \lambda > 0$.

Někdy se položí $a = \frac{1}{\lambda}$.
V tom případě je **hustota** $f(x) = \frac{1}{a} exp(-\frac{x}{a}), x > 0, a > 0$.

Distribuční funkce je $F(x) = 1 - exp(-\frac{x}{a}), x > 0$
(integrujeme hustotu $f(u)$ přes interval $(0,x)$).

Střední hodnota:
$EX = a$ (integrujeme $x\, f(x)$ přes interval $(0, \infty)$),
$EX^2 = 2a^2$ (integrujeme $x^2 f(x)$ přes interval $(0, \infty)$).

Rozptyl je $var\, X = EX^2 - (EX)^2 = a^2$.

Výpočet mediánu M = med X :
$P(X < M) = F(M) = 1 - exp(-\frac{M}{a}) = 0{,}5$.
Odtud máme $0{,}5 = exp(-\frac{M}{a})$, $log\, 0{,}5 = -\frac{M}{a}$.
Z vlastností logaritmu $-log\, 0{,}5 = log\, 2 = \frac{M}{a} \Rightarrow M = a\, log\, 2$.

Použití: náhodná veličina modeluje dobu mezi 2 událostmi v posloupnosti událostí stejného typu neboli dobu čekání na událost od nastání minulé události.

<u>Příklad:</u> Lékař ví, že průměrná doba mezi příchody 2 pacientů je 15 minut. Chce si udělat dvacetiminutovou přestávku na svačinu. S jakou pravděpodobností během přestávky nepřijde žádný pacient?

Doba mezi příchody je náhodná veličina X s exponenciálním rozdělením s parametrem a = 15.
Pravděpodobnost, že během 20 minut nepřijde žádný pacient, je
$P(X > 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - F(20)$
$= exp(-\frac{20}{15}) = exp(-\frac{4}{3}) = 0{,}26$.

Poznámka: počet událostí za daný časový úsek v posloupnosti událostí stejného typu modeluje náhodná veličina s Poissonovým rozdělením. V příkladu má počet pacientů za 15 minut Poissonovo rozdělení s parametrem (střední hodnotou) 1, počet pacientů za 20 minut má Poissonovo rozdělení s parametrem 4/3.