Spojitý dvourozměrný náhodný vektor (X, Y)

Příklad:
Sdružené rozdělení dáno hustotou $\boldsymbol{f(x,y) = 2e^{-2x-y}, x} > 0, y > 0.$

Integrace sdružené hustoty přes všechna kladná x a y dá výsledek 1.

$$\int_x \int_y f(x,y)dxdy = 2\int_0^\infty e^{-2x}\left(\int_0^\infty e^{-y}\,dy\right)dx = 2\int_0^\infty e^{-2x}\,[-e^{-y}]_0^\infty dx$$
$$= 2[0+1]\int_0^\infty e^{-2x}dx = 2\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^\infty = 2\left[0+\frac{1}{2}\right] = 1.$$

Marginální hustoty dostaneme ze sdružené hustoty integrací podle přebytečné proměnné.

$$h(x) = \int_y f(x,y)dy = 2e^{-2x}\int_0^\infty e^{-y}dy = 2e^{-2x}, x > 0.$$
$$g(y) = \int_x f(x,y)dx = 2e^{-y}\int_0^\infty e^{-2x}dx = 2e^{-y}\frac{1}{2} = e^{-y}, y > 0.$$

Sdružená hustota je součin marginálních hustot <=>X a Y nezávislé.

$$f(x,y) = 2e^{-2x-y} = 2e^{-2x}e^{-y} = h(x)g(y), x > 0, y > 0.$$

Exponenciální rozdělení s parametrem λ má hustotu
$\lambda\, exp(-\lambda z), z > 0, \lambda > 0,$ tedy

X má rozdělení Exp(2), Y má rozdělení Exp(1).

Vztahy mezi sdruženou distribuční funkcí a hustotou vektoru (X,Y)

Sdruženou hustotu spočítáme derivováním sdružené distribuční funkce postupně podle x a y: $f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$.

Sdruženou distribuční funkci spočítáme integrováním sdružené hustoty postupně podle jednotlivých proměnných:
$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dv\right)du.$

Jsou-li *X* a *Y* nezávislé, je sdružená hustota součin marginálních,
a tedy i sdružená distribuční funkce je součin marginálních.

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} h(u)\left(\int_{-\infty}^{y} g(v)\,dv\right)du$$
$$= \int_{0}^{x} h(u)du \int_{0}^{y} g(v)v = H(x)G(y),$$

v rozdělení Exp(2) je $H(x) = 1 - exp(-2x)$,
v rozdělení Exp(1) je G$(y) = 1 - exp(-y)$.

X a *Y* jsou nezávislé =>
střední hodnota součinu se rovná součinu středních hodnot

$$E(XY) = \int_x \int_y xyf(x,y)dxdy$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty xy2e^{-2x-y}dxdy$$
$$= \int_0^\infty x2e^{-2x}dx \int_0^\infty ye^{-y}dy$$
$$= \int_x xf_X(x)dx \int_y yf_Y(y)dy = EXEY,$$

v rozdělení Exp(2) je $EX = 1/2$,
v rozdělení Exp(1) je $EY = 1$.

Dále kovariance $cov(X,Y) = E(XY) - EXEY = 0$,

korelace $\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var\,X\,var\,Y}} = 0$ a *X* a *Y* jsou nekorelované.

Diskrétní náhodný vektor

Multinomické rozdělení

Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_k)$ má

<u>*multinomické rozdělení*</u> s parametry $n \geq 1$ a $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_k)$, jestliže jeho složky nabývají nezáporných celočíselných hodnot a modelují počet výsledků typu i v sérii n nezávislých pokusů.

<u>Příklad</u>:
Vyučující ví, že student udělá zkoušku ze statistiky se známkou i s pravděpodobností p_i, $i = 1, \dots, 4$, $p_1 + \cdots + p_4 = 1$.

Ke zkoušce přijde n studentů, počítáme pravděpodobnost, že x_i studentů dostane známku i, $i = 1, \dots, 4$, $x_1 + \cdots + x_4 = n$.

Obecně:
pro konkrétní nezáporné celočíselné hodnoty x_i, $i = 1, \dots, k$, takové, že $x_1 + \cdots + x_k = n$,
je <u>multinomické rozdělení</u> náhodného vektoru $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_k)$ <u>definováno předpisem</u>

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \, p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}.$$

Pro $k = 2$ dostáváme binomické rozdělení veličiny X_1 s parametry n, p_1.

A tedy <u>i-tá složka multinomického náhodného vektoru</u> $\boldsymbol{X}$ <u>má binomické rozdělení</u> s parametry n, p_i, $i = 1, \dots, k$.

Např.:
v náhodném vektoru počtů studentů se známkou 1, …, 4 u zkoušky $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_4)$ modeluje složka X_4 počet studentů se známkou 4, tj. těch, kteří nemají jiný výsledek než 4, těch, kteří neudělají zkoušku.