Rovnoměrné diskrétní rozdělení

Náhodná veličina *X* nabývá *n* hodnot s pravděpodobnostmi $\frac{1}{n}$.

Jsou-li hodnoty $1,2,\dots,n$, je

$$P(X=k)=\frac{1}{n}\,,k=1,\dots,n, EX=\frac{n+1}{2}\,,var\,X=\frac{n^2-1}{12}\,.$$

Například: pro *n* = 6 modeluje *X* počet ok při hodu kostkou.

Poznámka: <u>Výpočet střední hodnoty a rozptylu</u>

$$EX=\ \frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}\,,$$

(vzorec pro součet konečného počtu členů aritmetické posloupnosti).

$$EX^2=\ \frac{1}{n}(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n^2+3n+1}{6}\,,$$

(vzorec pro součet posloupnosti kvadrátů).

$$var\,X=EX^2-(EX)^2=\ \frac{2n^2+3n+1}{6}-\ \frac{n^2+2n+1}{4}=\frac{n^2-1}{12}\,.$$

Alternativní a binomické rozdělení

Uvažujme sérii *n* nezávislých pokusů s možnými výsledky

úspěch (1) s pravděpodobností p, neúspěch (0) s pravd. $1-p$.

i-tý pokus modeluje náh. veličina X_i, která má

<u>*alternativní rozdělení*</u> s parametrem 0 < p < 1,

$$P(X_i=1)=p,\qquad P(X_i=0)=1-p,$$

$$EX_i=p,\qquad var\,X_i=p(1-p), i=1,\dots,n.$$

Počet úspěchů v *n* pokusech modeluje náhodná veličina $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, která má

<u>*binomické rozdělení*</u> s parametry $n \geq 1$ a $0 < p < 1$,

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1, \dots, n,$

$EX = np$, $var\ X = np(1-p)$.

Kombinační číslo vyjadřuje, kolika způsoby lze rozmístit *k* úspěchů do *n* pokusů.

Poznámka: <u>Výpočet střední hodnoty a rozptylu:</u>

<u>v alternativním rozdělení</u>:

$EX = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p, EX^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p,$

$var\ X = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p).$

<u>v binomickém rozdělení</u>: pro nezávislé veličiny $X_1, \dots, X_n$ platí:

střední hodnota součtu = součet středních hodnot, proto $EX = np$,

rozptyl součtu = součet rozptylů, proto $var\ X = np(1-p)$.

<u>Příklad:</u> Je známo, že na daném testovacím místě je v průměru každý 10. test na Covid 19 pozitivní. S jakou pravděpodobností bude mezi 10 testovanými lidmi nejvýše 1 pozitivní?

Počet úspěchů (pozitivní test) *X* modelujeme binomickým rozdělením s parametry $n = 10$, $p = 0{,}1$.

Tedy $P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{10} + \binom{10}{1} 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^9$.

Po úpravě $0{,}9^9 (0{,}9 + 10 \cdot 0{,}1) = 0{,}9^9 \cdot 1{,}9 = 0{,}74$.

Negativně binomické rozdělení

Náhodná veličina X má *negativně binomické rozdělení* s parametry

$r \geq 1$ a $0 < p < 1$, nabývá-li hodnot 0, 1, 2, ... s pravděpodobnostmi

$$P(X = k) = \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k .$$

X modeluje počet neúspěchů před dosažením r-tého úspěchu v sérii nezávislých pokusů s možnými výsledky úspěch s pravděpodobností p, neúspěch s pravděpodobností $1 - p$.

Kombinační číslo vyjadřuje, kolika způsoby lze rozmístit k neúspěchů do $r + k - 1$ pokusů. V posledním $(r + k)$-tém pokusu je r-tý úspěch, kterým sérii pokusů ukončíme.

Platí: $EX = r\,\frac{1-p}{p}$, $var\ X = r\,\frac{1-p}{p^2}$.

Pro $r = 1$ dostáváme

geometrické rozdělení s parametrem $0 < p < 1$,

které modeluje počet neúspěchů před 1. úspěchem,

$$P(X = k) = p(1-p)^k,\ EX = \frac{1-p}{p}\ , var\ X = \frac{1-p}{p^2} .$$

Příklad: Je známo, že v testovacím místě je během dne v průměru každý 10. test na Covid 19 pozitivní. S jakou pravděpodobností bude hned druhý testovaný člověk pozitivní?

Počet neúspěchů (negativní test) X před 1. úspěchem (odhalení pozitivního člověka) modelujeme geometrickým rozdělením s parametrem $p = 0{,}1$.

Tedy $P(X = 1) = 0{,}1 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}09$.

Poissonovo rozdělení

vznikne limitním přechodem z binomického rozdělení,

když $n \to \infty, p \to 0$ a to tak, že součin $np = \lambda$ je konstatní. Pak

$\lim \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0,1,2, \ldots$, kde e je Eulerovo číslo, $EX = \lambda, var\ X = \lambda$.

Náhodná veličina *X* modeluje počet událostí stejného typu v daném časovém, délkovém aj. intervalu.

<u>Příklad:</u> Lékař ví, že průměrná doba mezi příchody 2 pacientů je 15 minut. Chce si udělat dvacetiminutovou přestávku na svačinu. S jakou pravděpodobností během přestávky nepřijde žádný pacient?

Střední počet příchodů za 15 minut je 1, střední počet příchodů za 20 minut je $\frac{4}{3}$.

Počet příchozích pacientů *X* během 20 minut má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = \frac{4}{3}$ a pravděpodobnost, že během 20 minut nepřijde žádný pacient je $P(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\frac{4}{3}} = 0{,}26.$

Hypergeometrické rozdělení

Náhodná veličina *X* má <u>*hypergeometrické rozdělení*</u>, jestliže nabývá celočíselných hodnot s pravděpodobnostmi

$$P(X=k) = \frac{\binom{A}{k}\binom{N-A}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \max(0, A+n-N) \leqq k \leqq \min(A, n).$$

X modeluje počet předmětů typu 0 ve vzorku o rozsahu n, který náhodně vybereme ze sady *N* předmětů typu 0 a 1. V sadě je A předmětů typu 0.

Platí: $EX = \frac{nA}{N}$, $var\ X = \frac{nA(N-A)}{N^2}(1 - \frac{n-1}{N-1})$.

Příklad: Výrobky jsou exportovány v bednách po 100 kusech. Jsou nekvalitní, v průměru jsou v 1 bedně 2 vadné výrobky. Při kontrole kvality se náhodně odebírá z každé bedny vzorek 10 kusů. S jakou pravděpodobností budou ve vzorku právě 2 vadné kusy?

N =100 výrobků v bedně, 0 ... zmetek, 1... dobrý výrobek,

průměrně v bedně *A* = 2 zmetky.

Při kontrole kvality náhodně vybíráme z každé bedny *n* = 10 výrobků.

Počet zmetků *X* v kontrolním vzorku má hypergeometrické rozdělení.

$$P(X = 2) = \frac{\frac{98!}{8! \cdot 90!}}{\frac{100!}{10! \cdot 90!}} = \frac{98! \cdot 10!}{100! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9}{100 \cdot 99} = \frac{1}{10 \cdot 11} = \frac{1}{110} = 0{,}009.$$

Poznámka: Výpočet podle vzorce pro hypergeometrické rozdělení je cvičením na klasickou definici pravděpodobnosti a kombinatoriku.

Náhodný pokus: výběr kontrolního vzorku *n* = 10 výrobků z bedny obsahující *N* =100 výrobků.

Počet všech možných výsledků pokusu, bez ohledu na dobré a vadné výrobky ve vzorku, je $\binom{100}{10}$,

kombinační číslo je rozepsáno ve jmenovateli zlomku $P(X = 2)$.

Příznivé výsledky jsou 2 zmetky a 8 dobrých výrobků ve vzorku.

Zřejmě $k = 2$ zmetky z $A = 2$ lze vybrat $\binom{2}{2} = 1$ způsobem.

K tomu vybíráme $n - k = 8$ dobrých z $N - A = 98$ dobrých výrobků, což lze učinit $\binom{98}{8}$ způsoby.

Kombinační číslo je rozepsáno v čitateli zlomku $P(X = 2)$.