Náhodná veličina — motivace

Často lze výsledek náhodného pokusu vyjádřit číslem:

- číslo, které padlo na kostce,
- výška náhodně vybraného studenta,
- čas strávený čekáním na metro,
- délka života člověka,
- počet gólů v zápase,
- počet zkoušek, které dopadnou na výborně, ...

Náhodná veličina

- číselně vyjádřený výsledek náhodného pokusu
- předem neznáme její hodnotu

Definice

Náhodná veličina je funkce, která zobrazuje elementární jevy $\omega \in \Omega$ na reálná čísla.

- většinou značíme písmenky X, Y, Z atd.
- každému elementárnímu jevu ω přiřadí reálné číslo (převádí elementární jevy (abstraktními objekty) na čísla)
- její hodnota $X(\omega)$ se liší podle toho, který elementární jev $\omega \in \Omega$ nastal
- víme-li, který ω nastal, známe hodnotu náhodné veličiny $X(\omega)$

Příklad děti

Příklad (Děti)

Uvažujme náhodně vybranou rodinu, která má tři děti. Zaveďme náhodné veličiny

- X určuje počet dcer a
- Y je počet starších bratrů nejmladšího dítěte.

Prozkoumejme náhodné veličiny X a Y.

Prostor elementárních jevů Ω je dán výčtem pohlaví dětí od nejstaršího do nejmladšího (uspořádané trojice).

$$\Omega = \{SSS, SSD, SDS, DSS, DDS, DSD, SDD, DDD\}$$

(S je syn, D je dcera).

Příklad děti — pokrač.

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
SSS	0	2
SSD	1	2
SDS	1	1
DSS	1	1
DDS	2	0
DSD	2	1
SDD	2	1
DDD	3	0

Vidíme, jakých hodnot X a Y nabývají, a uměli bychom spočítat, s jakými pravděpodobnostmi.

Rozdělení náhodné veličiny

Rozdělení náhodné veličiny X charakterizuje

- jakých hodnot může náhodná veličina X nabývat
- a s jakými pravděpodobnostmi.

Značení

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}[X = x] &\equiv \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}, \\
\mathrm{P}[X \leq x] &\equiv \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}, \\
\mathrm{P}[X \in B] &\equiv \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) \quad \text{pro } B \subseteq \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Předpis, který nám pro každou $B \subset \mathbb{R}$ udává $\mathrm{P}[X \in B]$, se nazývá rozdělení náhodné veličiny X.

Distribuční funkce

Definice

Distribuční funkce F náhodné veličiny X je funkce $\mathbb{R} \to \langle 0, 1\rangle$ definovaná předpisem

$$F(x) = \mathrm{P}[X \leq x] \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty).$$

- hodnota $F(x)$ je pst, že X nepřekročí x
- distribuční funkce jednoznačně určuje rozdělení X
  známe-li $F(x)$ pro každé $x \rightsquigarrow$ dokážeme spočítat $\mathrm{P}[X \in B]$ pro libovolnou $B \subset \mathbb{R}$
- někdy značení F_X

Vlastnosti distribuční funkce

Věta

Distribuční funkce F splňuje

1. je neklesající; tj.

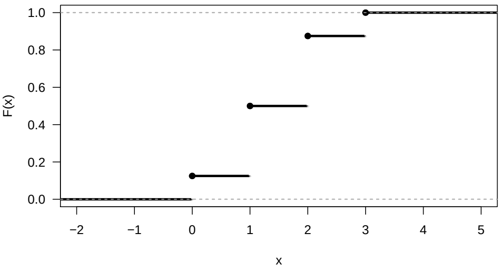
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \; F(x_1) \leq F(x_2),$$

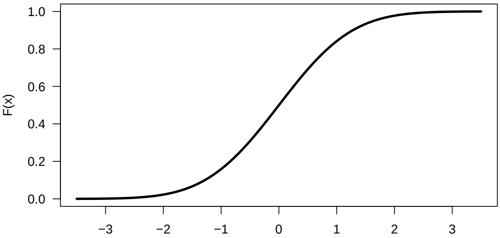
2. je zprava spojitá,
3. $F(x)$ se blíží k 0 pro $x \to -\infty$, tj.

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 0,$$

4. $F(x)$ se blíží k 1 pro $x \to \infty$, tj.

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

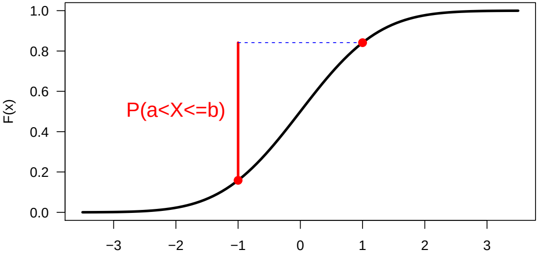

F(x)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−2
−1
0
1
2
3
4
5
x


F(x)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−3
−2
−1
0
1
2
3

Věta

1. Pro $a < b$ je
$$P[a < X \leq b] = F(b) - F(a).$$
2. $P[X = b]$ rovna velikosti skoku funkce F v bodě b.

   Speciálně, je-li F v bodě b spojitá, pak $P[X = b] = 0$.



Význam předchozí věty

Ze znalosti distribuční funkce F jsme schopni okamžitě spočítat

- pravděpodobnost konkrétní hodnoty

$$\mathrm{P}[X = a], \quad \mathrm{P}[X = b],$$

- pravděpodobnost, že je X větší (menší, větší rovno, menší rovno) než dané číslo

$$\mathrm{P}[X \leq a], \quad \mathrm{P}[X < a], \quad \mathrm{P}[X > a], \quad \mathrm{P}[X \geq a],$$

- pravděpodobnost, s jakou X leží v nějakém intervalu

$$\mathrm{P}[a < X \leq b], \quad \mathrm{P}[a < X < b], \quad \mathrm{P}[a \leq X \leq b], \quad \mathrm{P}[a \leq X < b].$$

Význam náhodných veličin

Náhodné veličiny

- převádějí abstraktní a většinou neznámou Ω na čísla $\rightsquigarrow$ pracuje se s nimi lépe

  ve složitějších situacích je těžké rozumně popsat ω $\leftrightsquigarrow$ nevadí nám to, stačí nám znát rozdělení X a pracovat na reálných číslech
- slouží jako model pro naše empirická pozorování (data)
- v teorii pravděpodobnosti s nimi pracujeme teoreticky $\leftrightsquigarrow$ jejich rozdělení považujeme za dané a zkoumáme jejich vlastnosti
- ve statistice se snažíme cosi usoudit o jejich neznámém rozdělení na základě konkrétních realizací

Různé „druhy“ náhodných veličin

Diskrétní náhodná veličina

- může nabývat jen konečně nebo spočetně mnoha různých hodnot
- počty (četnosti), indikátory jevů apod.
- počet gólů v zápase, počet bodů na testu, ...

Spojitá náhodná veličina

- může nabývat nespočetně mnoha různých hodnot — hodnoty z nějakého intervalu v $\mathbb{R}$ nebo celé $\mathbb{R}$
- každá konkrétní hodnota má nulovou pravděpodobnost (nelze mluvit o pravděpodobnosti konkrétní hodnoty)
- výsledek měření: koncentrace látku ve vzorku, výška náhodně vybraného člověka ...

Rozdělení diskrétní náhodné veličiny

- mluvíme o diskrétním rozdělení
- rozdělení charakterizováno výčtem možných hodnot $x_1, x_2, \dots$ a jejich pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \dots,$ kde $p_k = \mathrm{P}[X = x_k] > 0$
- tabulka rozdělení

hodnota	x_1	x_2	$\dots$
pravděpodobnost	p_1	p_2	$\dots$

- musí platit

$$\sum_j p_j = 1, \quad p_j \in (0,1)$$

Distribuční funkce diskrétní veličiny

Distribuční funkce

$$F(x) = \sum_{j:\ x_j \leq x} p_j$$

- je po částech konstantní mezi jednotlivými x_j,
- v každém bodě x_j má skok o velikosti p_j ,
- je nulová pro pro $x < \min_j x_j$.

Příklad děti

Připomenutí: Uvažujeme rodinu se třemi dětmi, X je počet dcer.

Rozdělení X: Náhodná veličina X může nabývat hodnot $0, 1, 2, 3$, a to s následujícími pravděpodobnostmi

x	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

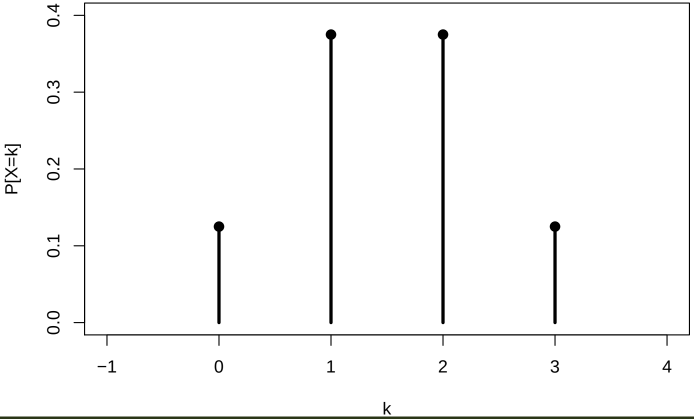
Výpočet:

$$\mathrm{P}[X = 0] = \frac{|\{SSS\}|}{8} = \frac{1}{8}, \mathrm{P}[X = 1] \quad = \frac{|\{SSD, SDS, DSS\}|}{8} = \frac{3}{8}$$

atd.

Příklad děti

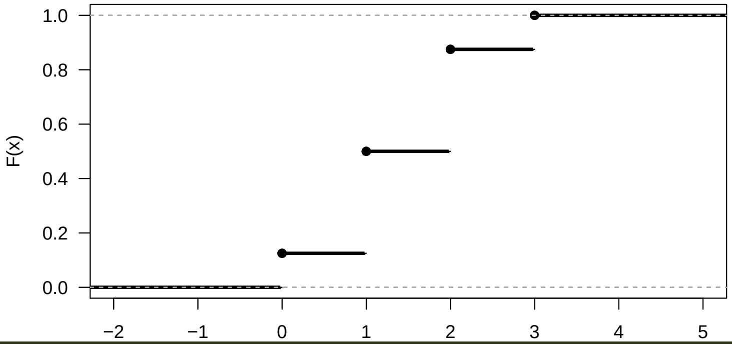
Znázornění pravděpodobností (rozdělení)



Příklad děti

Distribuční funkce veličiny X:

- má skoky v bodech $0, 1, 2, 3$ o velikostech $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$
- je nulová pro $x < 0$ a rovna jedné pro $x \geq 3$.



Spojitá náhodná veličina

Spojitá náhodná veličina může nabývat nespočetně mnoha různých hodnot

$\hookrightarrow$ hodnoty z nějakého intervalu reálných čísel, nebo jakékoli reálné číslo

$\hookrightarrow$ každá konkrétní hodnota má nulovou pravděpodobnost

Příklady

- výsledek nějakého měření, který může nabývat velkého počtu hodnot uvnitř nějakého konečného či nekonečného intervalu
- výška, hladina cholesterolu v krvi, rychlost molekuly plynu
- nelze mluvit o pravděpodobnost jednotlivých hodnot (je jich nespočetně)
- většinou nelze rozumně popsat ω a Ω, stačí nám ale chování X

Hustota

Nechť X je spojitá náhodná veličina. Pak její distribuční funkce F je spojitá a také diferencovatelná (skoro všude).

Definice

Pro spojitou náhodnou veličinu X s distribuční funkcí F existuje funkce f taková, že

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Funkci f nazýváme *hustota* náhodné veličiny X.

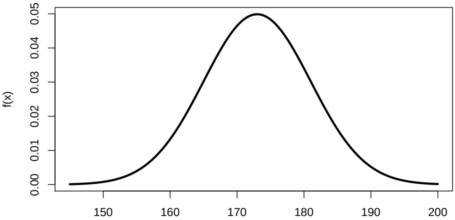
Platí

$$f(x) = F'(x),$$

tj. hustota je derivací distribuční funkce (a naopak, distribuční funkce je primitivní funkcí k hustotě).

Význam hustoty

- hustota popisuje, jakých hodnot X nabývá a s jakými pravděpodobnostmi,
- $f(x)$ ukazuje, jak často padá X do úzkého okolí bodu x



- velké hodnoty v oblastech, kam X padá častěji, malé hodnoty v oblastech, kam X padá méně často, a nulové hodnoty v oblastech, kam X nepadá nikdy.

Vlastnosti hustoty

Každá hustota f musí splňovat

- je nezáporná, tj.

$$f(x) \geq 0 \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

- celková plocha pod hustotou je rovna jedné, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Vlastnosti hustoty

Pro spojitou náhodnou veličinu X platí:

Věta

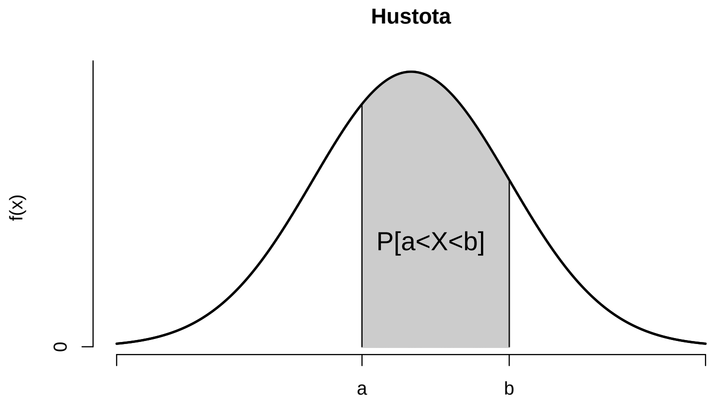
1. Pravděpodobnost, že X nabude konkrétní hodnoty je nulová, tj. $\mathrm{P}[X = a] = 0$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$.
2. Pro I $a < b$ platí

$$\mathrm{P}[a < X \leq b] = \mathrm{P}[a < X < b] = \mathrm{P}[a \leq X \leq b] = \mathrm{P}[a \leq X < b]$$

a

$$\mathrm{P}[a < X < b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

tj. pravděpodobnost, že X padne do nějakého intervalu, je dána plochou pod hustotou mezi krajními body intervalu.


Hustota
f(x)
0
P[a<X<b]
a
b

Vlastnosti hustoty (pokrač.)

Věta

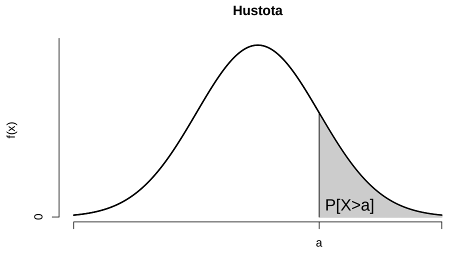
3. Podobně,

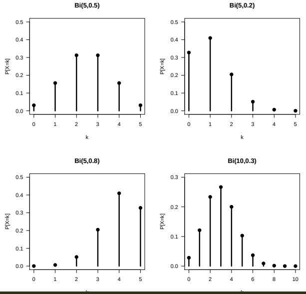
$$P[X < b] = P[X \leq b] = F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx,$$

$$P[X > a] = P[X \geq a] = 1 - F(a) = \int_{a}^{\infty} f(x)dx.$$

4. Hustota je na intervalu (a, b) nulová právě tehdy, když X do tohoto intervalu nemůže padnout, tj.

$$f(x) = 0 \text{ pro všechna } x \in (a, b) \quad \Leftrightarrow \quad P[a < X < b] = 0.$$


Hustota
f(x)
0
P[X>a]
a


Bi(5,0.5)
Bi(5,0.2)
Bi(5,0.8)
Bi(10,0.3)
P[X=k]
k

Příklad – Maxwellovo rozdělení

Maxwellovo rozdělení udává rozdělení rychlosti částic ideálního plynu (rychlost = spojitá náhodná veličina) v trojrozměrném prostoru.

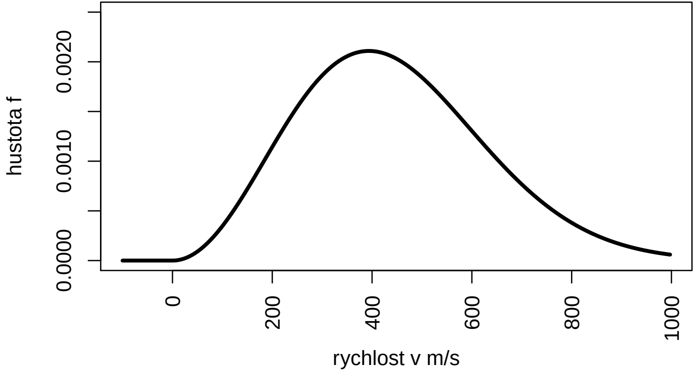
Hustota je dána vzorcem

$$f(x) = \frac{2}{a^3\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

pro $x > 0$ ($f(x) = 0$ pro $x < 0$), kde $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$, k je Boltzmannova konstanta, T je teplota [K] a m je hmotnost molekuly [kg].

Hustota Maxwellova rozdělení

Hustota rychlosti molekuly O_2 při 25°C.

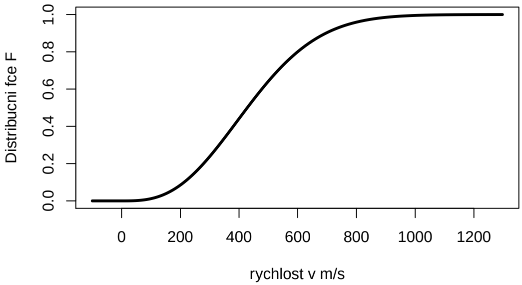


Distribuční funkce

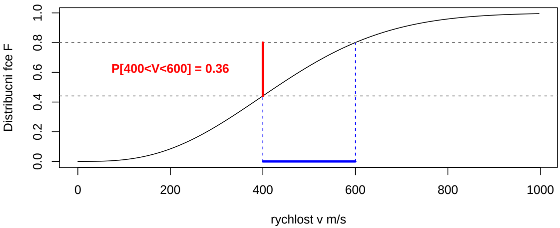
Distribuční funkce má tvar

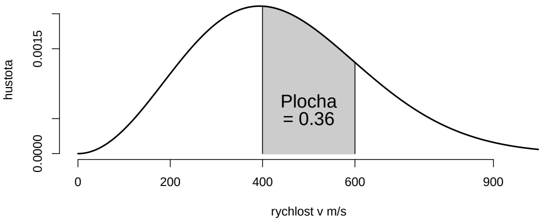
$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{a^3\sqrt{2\pi}} \int_0^x z^2 \, e^{-z^2/2a^2} \, dz,$$

(počítá se numericky)



Určení pravděpodobnosti daného rozmezí





Shrnutí

Náhodná veličina je důležitý pojem, se kterým se budeme ve zbytku přednášky často setkávat.

Každá náhodná veličina má **distribuční funkci**, která umožňuje spočítat pravděpodobnost, s jakou náhodná veličina padne do libovolného zadaného intervalu (případně nějaké složitější oblasti).

Náhodné veličiny (zjednodušeně) dělíme na:

- **diskrétní:** pravděpodobnosti jednotlivých hodnot udává **pravděpodobnostní funkce**,
- **spojité:** pravděpodobnosti jednotlivých hodnot jsou nulové, ale pravděpodobnost intervalu snadno spočítáme jako integrál **hustoty**.

Charakteristiky náhodných veličin

- Hustota a distribuční funkce popisují celé rozdělení náhodné veličiny se vším všudy. $\leftrightsquigarrow$ To je často příliš mnoho podrobností
- Někdy nás zajímá jen nějaký aspekt rozdělení náhodné veličiny, který se dá popsat jedním číslem
  - $\hookrightarrow$ očekávaná hodnota
  - $\hookrightarrow$ variabilita možných hodnot,
  - $\hookrightarrow$ hodnota, nad níž leží jen malé procento možných hodnot apod.
- číselné charakteristiky rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny

Definice

1. *Střední hodnotou* diskrétní náhodné veličiny X, která nabývá hodnot $x_1, x_2, \ldots$ s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots$, rozumíme součet
$$\mathrm{E}X = \sum_i p_i\, x_i,$$
2. *Střední hodnotou* spojité náhodné veličiny X s hustotou $f(x)$ rozumíme integrál
$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx,$$

Střední hodnota

Střední hodnotu EX lze chápat

- jako „průměrnou" (očekávanou) hodnotu veličiny X, kolem níž náhodná veličina náhodně kolísá,
- míru polohy, populační průměr,
- vážený průměr všech možných hodnot
- jako těžiště možných hodnot

Poznámka:

- střední hodnota existuje, je-li příslušný integrál (součet) konečný
- budeme pracovat jen s náhodnými veličinami, pro které střední hodnota existuje

Příklad – děti

Příklad: Připomenutí: Uvažujeme rodinu s třemi dětmi a náhodnou veličinu X (počet dcer). Spočítejme střední počet dcer $\mathrm{E}X$.

Měli jsme: X je diskrétní, nabývá hodnot $0, 1, 2, 3$ (to jsou x_i) s pstmi po řadě $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$ (to jsou p_i).

$$\mathrm{E}X = \sum_{i=1}^{K} p_i x_i = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3+6+3}{8} = 1.5$$

Střední počet dcer v rodině se třemi dětmi je 1.5.
Očekávaný počet dcer v rodině je 1.5.

Příklad — Maxwellovo rozdělení

Střední rychlost molekuly

$$EX = \int_0^\infty x\, f(x)\, dx = \frac{2}{a^3\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^3 e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\, dv = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\, a.$$

Pro $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$ dostaneme

$$EV = \sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \frac{kT}{m}},$$

tedy střední rychlost molekul je přímo úměrná odmocnině z teploty a nepřímo úměrná odmocnině z hmotnosti molekul.

Střední hodnota – poznámky

Poznámky:

- Náhodná veličina nemusí nikdy nabývat své střední hodnoty.

  Příklad: příklad děti (EX = 1.5 dcer), hod kostkou ...

- Podobně lze počítat E$g(X)$, kde g je nějaká funkce (tj. např. EX^2, E$\sqrt{X}$ apod.).

$$\mathrm{E}g(X) = \begin{cases} \sum_i g(x_i)p_i & \text{pro diskrétní n.v.,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx & \text{pro spojitou n.v.} \end{cases}$$

Rozptyl náhodné veličiny

Definice

Rozptylem náhodné veličiny X rozumíme hodnotu výrazu

$$\operatorname{var} X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2.$$

- míra variability
- střední kvadratická odchylka X od $\mathrm{E}X$
- udává velikost kolísání (variabilitu) kolem střední hodnoty
  - rozptyl je malý $\leftrightsquigarrow$ X padá s velkou pravděpodobností blízko své střední hodnoty
  - rozptyl je velký $\leftrightsquigarrow$ X často padá daleko od své střední hodnoty

Výpočet rozptylu

Platí

$$\operatorname{var} X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2$$

- pro diskrétní veličinu X

$$\operatorname{var} X = \sum_i x_i^2 p_i - \left(\sum_i x_i p_i \right)^2,$$

- pro spojitou veličinu X

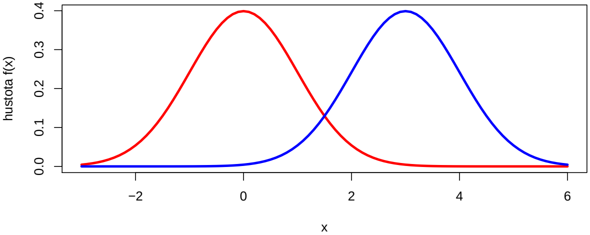
$$\operatorname{var} X = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \right)^2.$$

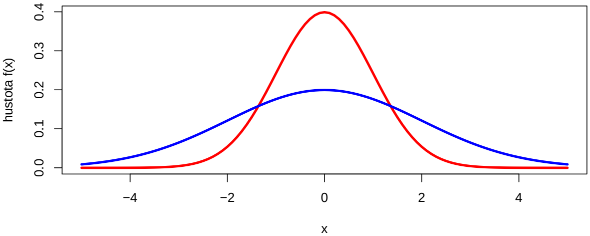
Směrodatná odchylka náhodné veličiny

Definice

Směrodatnou odchylkou σ_X náhodné veličiny X rozumíme odmocninu z rozptylu, t.j. $\sqrt{\operatorname{var} X}$.

- směrodatná odchylka má stejný fyzikální rozměr jako veličina X
- rozptyl je vyjádřen v jednotkách^2


hustota f(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−2
0
2
4
6
x


hustota f(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4
x

Vlastnosti střední hodnoty a rozptylu

Pro náhodnou veličinu X a $a, b \in \mathbb{R}$ platí

1. Je-li $X = a$, pak $\mathrm{E}X = a$ a $\operatorname{var} X = 0$.
2. Platí
$$\mathrm{E}(a + bX) = a + b\mathrm{E}X, \quad \operatorname{var}(a + bX) = b^2 \operatorname{var} X.$$
3. $\operatorname{var} X \geq 0$ a rovnost nastane pouze, je-li X konstatní.

Medián náhodné veličiny

Definice

Mediánem náhodné veličiny X rozumíme kterékoli reálné číslo m_X, které splňuje

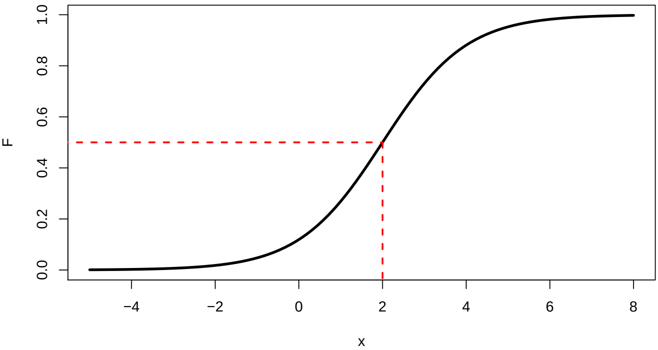
$$P[X \leq m_X] \geq \frac{1}{2} \quad \text{a zároveň} \quad P[X \geq m_X] \geq \frac{1}{2}.$$

- míra polohy podobně jako střední hodnota
- medián je bod, který náhodná veličina v polovině případů nedosáhne a v polovině případů přesáhne

Výpočet mediánu spojitého rozdělení

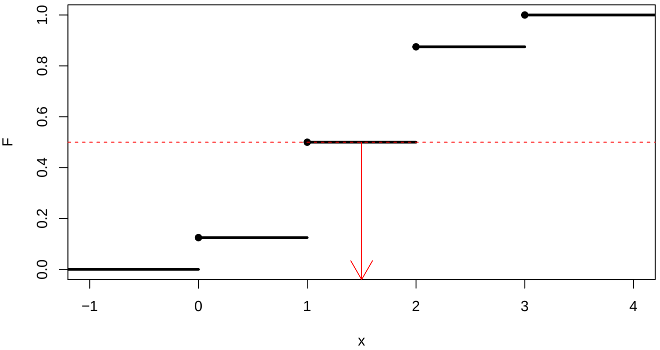
Je-li distribuční funkce F rostoucí a spojitá, pak

$$m_X = \mathrm{med} X = F^{-1}(1/2)$$



Obecná situace

Jestliže není F rostoucí, pak může definici mediánu vyhovovat celý interval čísel $\rightsquigarrow$ vezmeme jeho střed



Vlastnosti mediánu

Pro náhodnou veličinu X a $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

1. Platí
$$\mathrm{med}(a + bX) = a + b \cdot \mathrm{med}X$$
2. Je-li g rostoucí nebo klesající funkce, pak
$$\mathrm{med}\, g(X) = g(\mathrm{med}X).$$
3. Má-li náhodná veličina X symetrické rozdělení (hustota je symetrická kolem nějakého bodu $a \in \mathbb{R}$), pak
$$\mathrm{E}X = a = \mathrm{med}X$$

Kvantil náhodné veličiny

Kvantil je zobecnění mediánu.

Definice

Nechť je dáno číslo $\alpha \in (0, 1)$. *α-kvantilem* náhodné veličiny X rozumíme kterékoli reálné číslo $q_X(\alpha)$, které splňuje

$$P[X \leq q_X(\alpha)] \geq \alpha \quad \text{a zároveň} \quad P[X \geq q_X(\alpha)] \geq 1 - \alpha.$$

- pro $\alpha = 1/2$ dostaneme medián
- α-kvantil je bod, který náhodná veličina ve 100α % případů nedosáhne a v $100(1-\alpha)$ % případů přesáhne
- je to hodnota, pod kterou je 100α % pravděpodobnosti
- je-li distr. fce F rostoucí a spojitá, pak existuje právě jeden α-kvantil

$$q_X(\alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$$

Kvantily — příklad

Příklad (Výška chlapců)

Předpokládejme, že výška desetiletých chlapců v cm je náhodná veličina X s normálním rozdělením $\mathrm{N}(136.1, 6.4^2)$. Jakou výšku by musel mít Váš desetiletý syn, aby patřil k 5 % nejvyšších v populaci?

Zajímá nás q takové, že $\mathrm{P}(X > q) = 0.05$. Odtud

$$0.95 = \mathrm{P}(X < q) = \mathrm{P}\left(\frac{X - 136.1}{6.4} < \frac{q - 136.1}{6.4}\right).$$

Proto

$$1.645 = \frac{q - 136.1}{6.4}$$

a odtud $q = 146.6$ cm.

Shrnutí: charakteristiky náh. vel.

Charakteristiky náhodných veličin obvykle dělíme na:

míry polohy: průměr, medián, modus, kvantily, . . . ,

míry variability (měřítka): rozptyl, směrodatná odchylka, rozdíly mezi kvartily, ...

Míry polohy obvykle „následují“ posunutí i vynásobení konstantou.

Míry variability obvykle reagují pouze na vynásobení konstantou (změnu měřítka) a při posunutí se obvykle nezmění.