

## Náhodná veličina — motivace

Často lze výsledek náhodného pokusu vyjádřit číslem:

- číslo, které padlo na kostce,
- výška náhodně vybraného studenta,
- čas strávený čekáním na metro,
- délka života člověka,
- počet gólů v zápase,
- počet zkoušek, které dopadnou na výborně, ...

## Příklad děti

### Příklad (Děti)

Uvažujme náhodně vybranou rodinu, která má tři děti. Zaved'me náhodné veličiny

- $X$  určuje počet dcer a
- $Y$  je počet starších bratrů nejmladšího dítěte.

Prozkoumejme náhodné veličiny  $X$  a  $Y$ .

Prostor elementárních jevů  $\Omega$  je dán výčtem pohlaví dětí od nejstaršího do nejmladšího (uspořádané trojice).

$$\Omega = \{SSS, SSD, SDS, DSS, DDS, DSD, SDD, DDD\}$$

( $S$  je syn,  $D$  je dcera).

## Náhodná veličina

- číselně vyjádřený výsledek náhodného pokusu
- předem **neznáme** její hodnotu

### Definice

**Náhodná veličina** je funkce, která zobrazuje elementární jevy  $\omega \in \Omega$  na reálná čísla.

- většinou značíme písmenky  $X, Y, Z$  atd.
- každému elementárnímu jevu  $\omega$  přiřadí reálné číslo (převádí elementární jevy (abstraktními objekty) na čísla)
- její hodnota  $X(\omega)$  se liší podle toho, který elementární jev  $\omega \in \Omega$  nastal
- víme-li, který  $\omega$  nastal, známe hodnotu náhodné veličiny  $X(\omega)$

## Příklad děti — pokrač.

$\omega$	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
SSS	0	2
SSD	1	2
SDS	1	1
DSS	1	1
DDS	2	0
DSD	2	1
SDD	2	1
DDD	3	0

Vidíme, jakých hodnot  $X$  a  $Y$  nabývají, a uměli bychom spočítat, s jakými pravděpodobnostmi.

## Rozdělení náhodné veličiny

Rozdělení náhodné veličiny  $X$  charakterizuje

- jakých hodnot může náhodná veličina  $X$  nabývat
- a s jakými pravděpodobnostmi.

Značení

$$P[X = x] \equiv P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R},$$

$$P[X \leq x] \equiv P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R},$$

$$P[X \in B] \equiv P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) \quad \text{pro } B \subseteq \mathbb{R}$$

Předpis, který nám pro každou  $B \subset \mathbb{R}$  udává  $P[X \in B]$ , se nazývá rozdělení náhodné veličiny  $X$ .

## Distribuční funkce

### Definice

Distribuční funkce  $F$  náhodné veličiny  $X$  je funkce  $\mathbb{R} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  definovaná předpisem

$$F(x) = P[X \leq x] \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty).$$

- hodnota  $F(x)$  je pst, že  $X$  nepřekročí  $x$
- distribuční funkce **jednoznačně určuje** rozdělení  $X$  známe-li  $F(x)$  pro každé  $x \rightsquigarrow$  dokážeme spočítat  $P[X \in B]$  pro libovolnou  $B \subset \mathbb{R}$
- někdy značení  $F_X$

## Vlastnosti distribuční funkce

### Věta

Distribuční funkce  $F$  splňuje

- 1 je neklesající; tj.

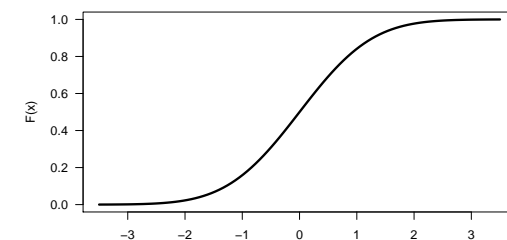
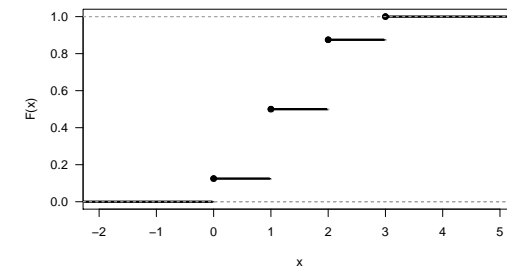
$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2),$$

- 2 je zprava spojitá,
- 3  $F(x)$  se blíží k 0 pro  $x \rightarrow -\infty$ , tj.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0,$$

- 4  $F(x)$  se blíží k 1 pro  $x \rightarrow \infty$ , tj.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

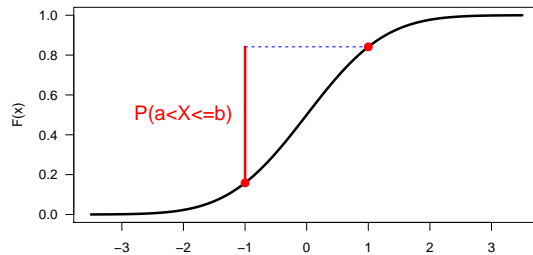


### Věta

- 1 Pro  $a < b$  je

$$P[a < X \leq b] = F(b) - F(a).$$

- 2  $P[X = b]$  rovna velikosti skoku funkce  $F$  v bodě  $b$ .  
Speciálně, je-li  $F$  v bodě  $b$  spojitá, pak  $P[X = b] = 0$ .



### Význam předchozí věty

Ze znalosti distribuční funkce  $F$  jsme schopni okamžitě spočítat

- pravděpodobnost konkrétní hodnoty

$$P[X = a], \quad P[X = b],$$

- pravděpodobnost, že je  $X$  větší (menší, větší rovno, menší rovno) než dané číslo

$$P[X \leq a], \quad P[X < a], \quad P[X > a], \quad P[X \geq a],$$

- pravděpodobnost, s jakou  $X$  leží v nějakém intervalu

$$P[a < X \leq b], \quad P[a < X < b], \quad P[a \leq X \leq b], \quad P[a \leq X < b].$$

### Význam náhodných veličin

#### Náhodné veličiny

- převádějí abstraktní a většinou neznámou  $\Omega$  na čísla  $\rightsquigarrow$  pracuje se s nimi lépe  
ve složitějších situacích je těžké rozumně popsat  $\omega \rightsquigarrow$  nevadí nám to, stačí nám znát rozdělení  $X$  a pracovat na reálných číslech
- slouží jako **model** pro naše empirická pozorování (data)
- v teorii pravděpodobnosti s nimi pracujeme teoreticky  $\rightsquigarrow$  jejich rozdělení považujeme za dané a zkoumáme jejich vlastnosti
- ve statistice se snažíme cosi usoudit o jejich neznámém rozdělení na základě konkrétních realizací

### Různé „druhy“ náhodných veličin

#### Diskrétní náhodná veličina

- může nabývat jen **konečně** nebo **spočetně** mnoha různých hodnot
- počty (četnosti), indikátory jevů apod.
- počet gólů v zápase, počet bodů na testu, ...

#### Spojitá náhodná veličina

- může nabývat **nespočetně mnoha** různých hodnot — hodnoty z nějakého intervalu v  $\mathbb{R}$  nebo celé  $\mathbb{R}$
- každá konkrétní hodnota má nulovou pravděpodobnost (nelze mluvit o pravděpodobnosti konkrétní hodnoty)
- výsledek měření: koncentrace látky ve vzorku, výška náhodně vybraného člověka ...

## Rozdělení diskrétní náhodné veličiny

- mluvíme o **diskrétním rozdělení**
- rozdělení charakterizováno výčtem možných hodnot  $x_1, x_2, \dots$  a jejich pravděpodobnostmi  $p_1, p_2, \dots$ , kde  $p_k = P[X = x_k] > 0$
- tabulka rozdělení

hodnota	$x_1$	$x_2$	$\dots$
pravděpodobnost	$p_1$	$p_2$	$\dots$

- musí platit

$$\sum_j p_j = 1, \quad p_j \in (0, 1)$$

## Příklad děti

Připomenutí: Uvažujeme rodinu se třemi dětmi,  $X$  je počet dcer.

**Rozdělení  $X$ :** Náhodná veličina  $X$  může nabývat hodnot 0, 1, 2, 3, a to s následujícími pravděpodobnostmi

$x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Výpočet:

$$P[X = 0] = \frac{|\{SSS\}|}{8} = \frac{1}{8}, P[X = 1] = \frac{|\{SSD, SDS, DSS\}|}{8} = \frac{3}{8}$$

atd.

## Distribuční funkce diskrétní veličiny

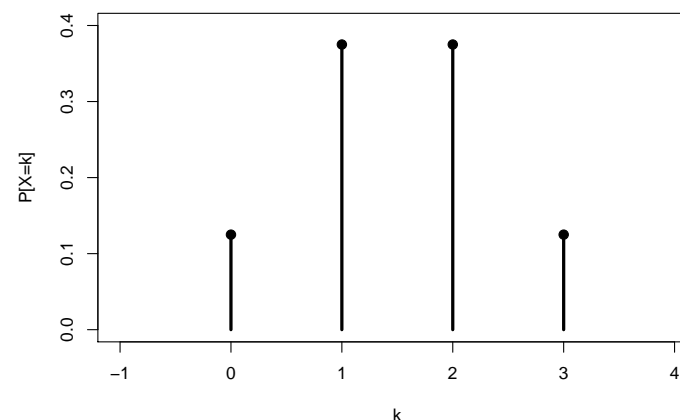
### Distribuční funkce

$$F(x) = \sum_{j: x_j \leq x} p_j$$

- je po částech konstantní mezi jednotlivými  $x_j$ ,
- v každém bodě  $x_j$  má skok o velikosti  $p_j$ ,
- je nulová pro  $x < \min_j x_j$ .

## Příklad děti

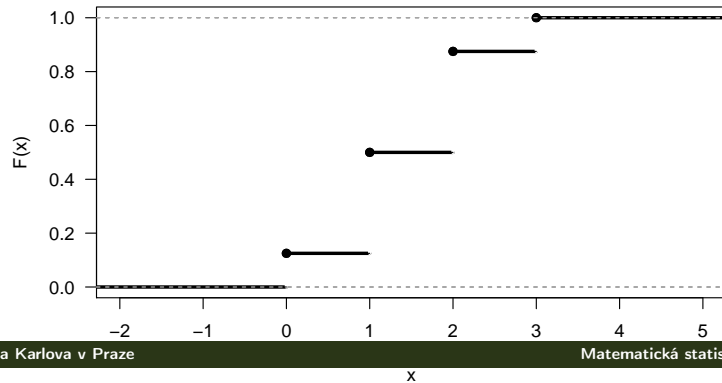
Znázornění pravděpodobností (rozdělení)



## Příklad děti

Distribuční funkce veličiny  $X$ :

- má skoky v bodech 0, 1, 2, 3 o velikostech  $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$
- je nulová pro  $x < 0$  a rovna jedné pro  $x \geq 3$ .



## Hustota

Necheť  $X$  je **spojitá** náhodná veličina. Pak její distribuční funkce  $F$  je **spojitá a také diferencovatelná** (skoro všude).

### Definice

Pro spojitou náhodnou veličinu  $X$  s distribuční funkcí  $F$  existuje funkce  $f$  taková, že

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Funkci  $f$  nazýváme **hustota** náhodné veličiny  $X$ .

Platí

$$f(x) = F'(x),$$

tj. hustota je derivací distribuční funkce (a naopak, distribuční funkce je primitivní funkcí k hustotě).

## Spojitá náhodná veličina

**Spojitá** náhodná veličina může nabývat **nespočetně mnoha různých** hodnot

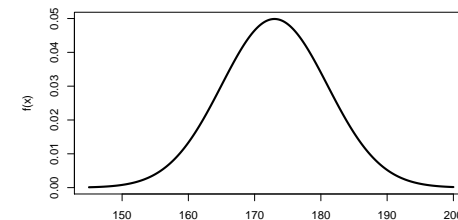
- hodnoty z nějakého intervalu reálných čísel, nebo jakékoli reálné číslo
- každá konkrétní hodnota má nulovou pravděpodobnost

### Příklady

- výsledek nějakého měření, který může nabývat velkého počtu hodnot uvnitř nějakého konečného či nekonečného intervalu
- výška, hladina cholesterolu v krvi, rychlost molekuly plynu
- nelze mluvit o pravděpodobnost jednotlivých hodnot (je jich nespočetně)
- většinou nelze rozumně popsat  $\omega$  a  $\Omega$ , stačí nám ale chování  $X$

## Význam hustoty

- hustota popisuje, jakých hodnot  $X$  nabývá a s jakými pravděpodobnostmi,
- $f(x)$  ukazuje, jak často padá  $X$  do úzkého okolí bodu  $x$



- velké hodnoty v oblastech, kam  $X$  padá častěji, malé hodnoty v oblastech, kam  $X$  padá méně často, a nulové hodnoty v oblastech, kam  $X$  nepadá nikdy.

## Vlastnosti hustoty

Každá hustota  $f$  musí splňovat

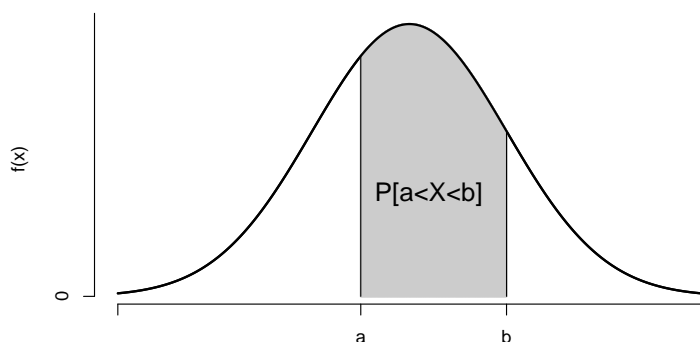
- je nezáporná, tj.

$$f(x) \geq 0 \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

- celková plocha pod hustotou je rovna jedné, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Hustota



## Vlastnosti hustoty

Pro spojitou náhodnou veličinu  $X$  platí:

### Věta

- 1 Pravděpodobnost, že  $X$  nabude konkrétní hodnoty je nulová, tj.  $P[X = a] = 0$  pro všechna  $a \in \mathbb{R}$ .
- 2 Pro  $a < b$  platí

$$P[a < X \leq b] = P[a < X < b] = P[a \leq X \leq b] = P[a \leq X < b]$$

a

$$P[a < X < b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx,$$

tj. pravděpodobnost, že  $X$  padne do nějakého intervalu, je dána plochou pod hustotou mezi krajními body intervalu.

## Vlastnosti hustoty (pokrač.)

### Věta

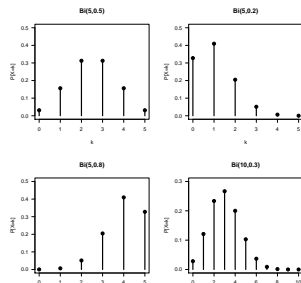
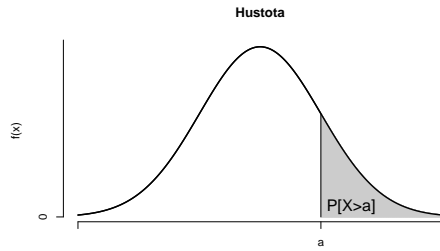
- 3 Podobně,

$$P[X < b] = P[X \leq b] = F(b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx,$$

$$P[X > a] = P[X \geq a] = 1 - F(a) = \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

- 4 Hustota je na intervalu  $(a, b)$  nulová právě tehdy, když  $X$  do tohoto intervalu nemůže padnout, tj.

$$f(x) = 0 \text{ pro všechna } x \in (a, b) \Leftrightarrow P[a < X < b] = 0.$$



## Příklad – Maxwellovo rozdělení

Maxwellovo rozdělení udává rozdělení rychlosti částic ideálního plynu (rychlost = spojitá náhodná veličina) v trojrozměrném prostoru.

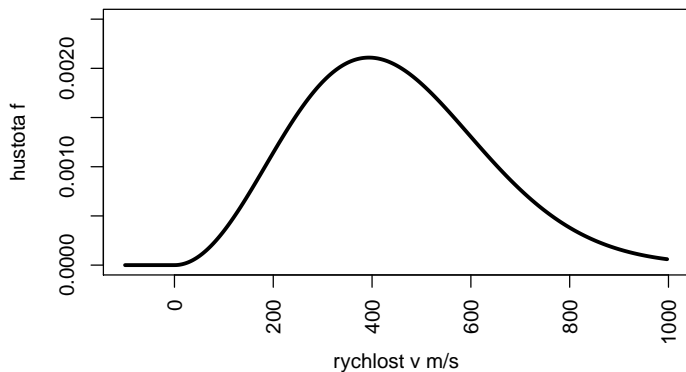
Hustota je dána vzorcem

$$f(x) = \frac{2}{a^3\sqrt{2\pi}}x^2e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

pro  $x > 0$  ( $f(x) = 0$  pro  $x < 0$ ), kde  $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$ ,  $k$  je Boltzmannova konstanta,  $T$  je teplota [K] a  $m$  je hmotnost molekuly [kg].

## Hustota Maxwellova rozdělení

Hustota rychlosti molekuly O<sub>2</sub> při 25°C.

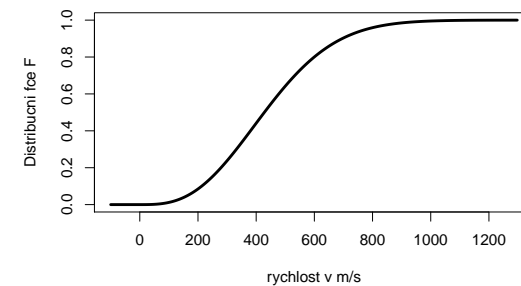


## Distribuční funkce

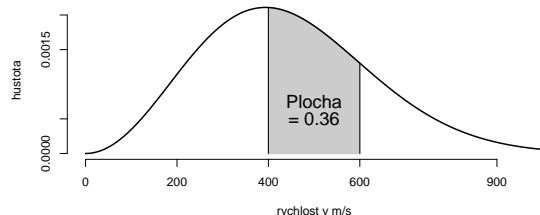
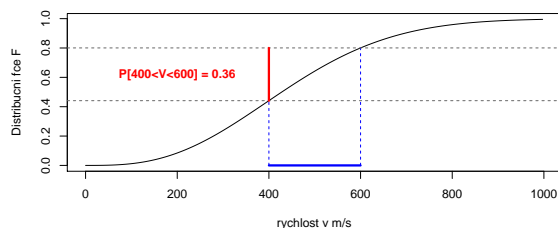
Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{a^3\sqrt{2\pi}} \int_0^x z^2 e^{-z^2/2a^2} dz,$$

(počítá se numericky)



## Určení pravděpodobnosti daného rozmezí



## Charakteristiky náhodných veličin

- Hustota a distribuční funkce popisují celé rozdělení náhodné veličiny se vším všudy. ↔ To je často příliš mnoho podrobností
- Někdy nás zajímá jen nějaký aspekt rozdělení náhodné veličiny, který se dá popsat jedním číslem
  - ↳ očekávaná hodnota
  - ↳ variabilita možných hodnot,
  - ↳ hodnota, nad níž leží jen malé procento možných hodnot apod.
- **číselné charakteristiky** rozdělení

## Shrnutí

**Náhodná veličina** je důležitý pojem, se kterým se budeme ve zbytku přednášky často setkávat.

Každá náhodná veličina má **distribuční funkci**, která umožňuje spočítat pravděpodobnost, s jakou náhodná veličina padne do libovolného zadaného intervalu (případně nějaké složitější oblasti).

Náhodné veličiny (zjednodušeně) dělíme na:

**diskrétní:** pravděpodobnosti jednotlivých hodnot udává **pravděpodobnostní funkce**,

**spojité:** pravděpodobnosti jednotlivých hodnot jsou nulové, ale pravděpodobnost intervalu snadno spočítáme jako integrál **hustoty**.

### Střední hodnota

## Střední hodnota náhodné veličiny

### Definice

- 1 **Střední hodnotou** diskrétní náhodné veličiny  $X$ , která nabývá hodnot  $x_1, x_2, \dots$  s pravděpodobnostmi  $p_1, p_2, \dots$ , rozumíme součet

$$EX = \sum_i p_i x_i,$$

- 2 **Střední hodnotou** spojité náhodné veličiny  $X$  s hustotou  $f(x)$  rozumíme integrál

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$



## Střední hodnota

Střední hodnotu  $EX$  lze chápat

- jako „průměrnou“ (očekávanou) hodnotu veličiny  $X$ , kolem níž náhodná veličina náhodně kolísá,
- míru polohy, populační průměr,
- vážený průměr všech možných hodnot
- jako těžiště možných hodnot

**Poznámka:**

- střední hodnota existuje, je-li příslušný integrál (součet) konečný
- budeme pracovat jen s náhodnými veličinami, pro které střední hodnota existuje

## Příklad — Maxwelllovo rozdělení

Střední rychlost molekuly

$$EX = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{2}{a^3 \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dv = \sqrt{\frac{8}{\pi}} a.$$

Pro  $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$  dostaneme

$$EV = \sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \frac{kT}{m}},$$

tedy střední rychlost molekul je přímo úměrná odmocnině z teploty a nepřímo úměrná odmocnině z hmotnosti molekul.

## Příklad – děti

**Příklad:** Připomenutí: Uvažujeme rodinu s třemi dětmi a náhodnou veličinu  $X$  (počet dcer). Spočítejme střední počet dcer  $EX$ .

Měli jsme:  $X$  je diskrétní, nabývá hodnot 0, 1, 2, 3 (to jsou  $x_i$ ) s psmi po řadě  $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$  (to jsou  $p_i$ ).

$$EX = \sum_{i=1}^K p_i x_i = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3+6+3}{8} = 1.5$$

Střední počet dcer v rodině se třemi dětmi je 1.5.

Očekávaný počet dcer v rodině je 1.5.

## Střední hodnota – poznámky

**Poznámky:**

- Náhodná veličina nemusí nikdy nabývat své střední hodnoty.

**Příklad:** příklad děti ( $EX = 1.5$  dcer), hod kostkou ...

- Podobně lze počítat  $Eg(X)$ , kde  $g$  je nějaká funkce (tj. např.  $EX^2, E\sqrt{X}$  apod.).

$$Eg(X) = \begin{cases} \sum_i g(x_i) p_i & \text{pro diskrétní n.v.}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx & \text{pro spojitou n.v.} \end{cases}$$

## Rozptyl náhodné veličiny

### Definice

*Rozptylem* náhodné veličiny  $X$  rozumíme hodnotu výrazu

$$\text{var } X = E(X - EX)^2.$$

- míra variability
- střední kvadratická odchylka  $X$  od  $EX$
- udává velikost kolísání (variabilitu) kolem střední hodnoty
  - rozptyl je malý  $\iff X$  padá s velkou pravděpodobností blízko své střední hodnoty
  - rozptyl je velký  $\iff X$  často padá daleko od své střední hodnoty

## Směrodatná odchylka náhodné veličiny

### Definice

*Směrodatnou odchylkou*  $\sigma_X$  náhodné veličiny  $X$  rozumíme odmocninu z rozptylu, t.j.  $\sqrt{\text{var } X}$ .

- směrodatná odchylka má stejný fyzikální rozměr jako veličina  $X$
- rozptyl je vyjádřen v jednotkách<sup>2</sup>

## Výpočet rozptylu

Platí

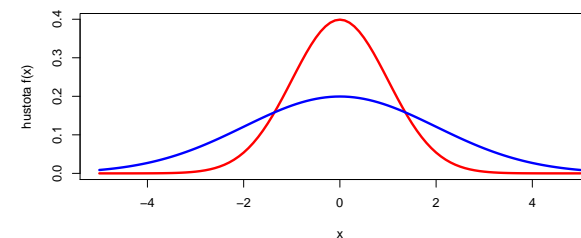
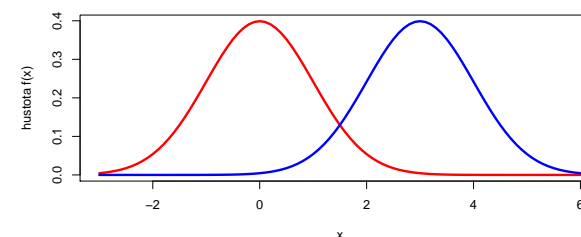
$$\text{var } X = EX^2 - (EX)^2$$

- pro diskrétní veličinu  $X$

$$\text{var } X = \sum_i x_i^2 p_i - \left( \sum_i x_i p_i \right)^2,$$

- pro spojitou veličinu  $X$

$$\text{var } X = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \right)^2.$$



## Vlastnosti střední hodnoty a rozptylu

Pro náhodnou veličinu  $X$  a  $a, b \in \mathbb{R}$  platí

- 1 Je-li  $X = a$ , pak  $EX = a$  a  $\text{var } X = 0$ .
- 2 Platí

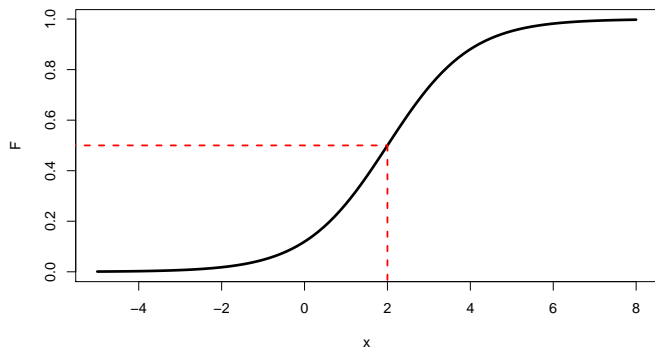
$$E(a + bX) = a + bEX, \quad \text{var}(a + bX) = b^2 \text{var } X.$$

- 3  $\text{var } X \geq 0$  a rovnost nastane pouze, je-li  $X$  konstantní.

## Výpočet mediánu spojitého rozdělení

Je-li distribuční funkce  $F$  rostoucí a spojitá, pak

$$m_X = \text{med}X = F^{-1}(1/2)$$



## Medián náhodné veličiny

### Definice

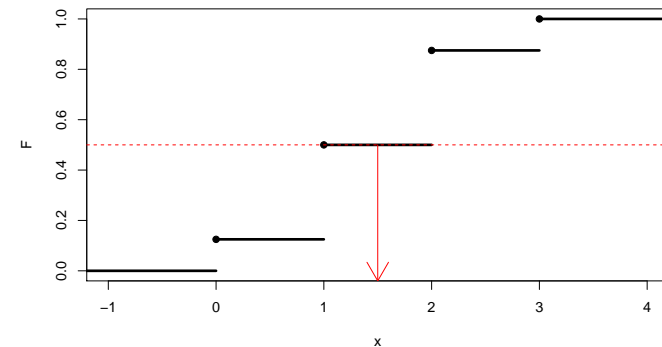
**Mediánem** náhodné veličiny  $X$  rozumíme kterékoli reálné číslo  $m_X$ , které splňuje

$$P[X \leq m_X] \geq \frac{1}{2} \quad \text{a zároveň} \quad P[X \geq m_X] \geq \frac{1}{2}.$$

- míra polohy podobně jako střední hodnota
- medián je bod, který náhodná veličina **v polovině případů nedosáhne** a **v polovině případů přesáhne**

## Obecná situace

Jestliže není  $F$  rostoucí, pak může definici mediánu vyhovovat celý interval čísel  $\rightsquigarrow$  vezmeme jeho střed



## Vlastnosti mediánu

Pro náhodnou veličinu  $X$  a  $a, b \in \mathbb{R}$  platí:

1 Platí

$$\text{med}(a + bX) = a + b \cdot \text{med}X$$

2 Je-li  $g$  rostoucí nebo klesající funkce, pak

$$\text{med } g(X) = g(\text{med}X).$$

3 Má-li náhodná veličina  $X$  symetrické rozdělení (hustota je symetrická kolem nějakého bodu  $a \in \mathbb{R}$ ), pak

$$EX = a = \text{med}X$$

## Kvantily — příklad

### Příklad (Výška chlapců)

Předpokládejme, že výška desetiletých chlapců v cm je náhodná veličina  $X$  s normálním rozdělením  $N(136.1, 6.4^2)$ . Jakou výšku by musel mít Váš desetiletý syn, aby patřil k 5 % nejvyšších v populaci?

Zajímá nás  $q$  takové, že  $P(X > q) = 0.05$ . Odtud

$$0.95 = P(X < q) = P\left(\frac{X - 136.1}{6.4} < \frac{q - 136.1}{6.4}\right).$$

Proto

$$1.645 = \frac{q - 136.1}{6.4}$$

a odtud  $q = 146.6$  cm.

## Kvantil náhodné veličiny

Kvantil je zobecnění mediánu.

### Definice

Nechť je dáno číslo  $\alpha \in (0, 1)$ .  $\alpha$ -kvantilem náhodné veličiny  $X$  rozumíme kterékoli reálné číslo  $q_X(\alpha)$ , které splňuje

$$P[X \leq q_X(\alpha)] \geq \alpha \quad \text{a zároveň} \quad P[X \geq q_X(\alpha)] \geq 1 - \alpha.$$

- pro  $\alpha = 1/2$  dostaneme medián
- $\alpha$ -kvantil je bod, který náhodná veličina ve  $100\alpha$  % případů nedosáhne a v  $100(1 - \alpha)$  % případů přesáhne
- je to hodnota, pod kterou je  $100\alpha$  % pravděpodobnosti
- je-li distr. fce  $F$  rostoucí a spojitá, pak existuje právě jeden  $\alpha$ -kvantil

$$q_X(\alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$$

## Shrnutí: charakteristiky náh. vel.

Charakteristiky náhodných veličin obvykle dělíme na:

**míry polohy:** průměr, medián, modus, kvantily, ... ,

**míry variability (měřítka):** rozptyl, směrodatná odchylka, rozdíly mezi kvantily, ... .

Míry polohy obvykle „následují“ posunutí i vynásobení konstantou.

Míry variability obvykle reagují pouze na vynásobení konstantou (změnu měřítka) a při posunutí se obvykle nezmění.