Domácí úlohy ze samoopravných kódů

2023/24

Domácích úkolů bude zadáno celkem 8 za celkem 50 bodů a k získání zápočtu z nich bude třeba získat aspoň 35 bodů.

Všechna svá tvrzení zdůvodňujte.

1. (odevzdejte do 31.10.) Nechť $\mathcal{C}$ je 1-perfektní $[7,4]_2$-kód a definujme kód

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^8 \mid \pi_8(\mathbf{v}) \in \mathcal{C}, v_8 = \sum_{i=1}^{7} v_i\}.$$

Dokažte, že je $\mathcal{D}$ lineární a určete jeho dimenzi a vzdálenost (nezapomeňte, že počítáme v tělese F_2).

6 bodů

2. (odevzdejte do 31.10.) Vypište všechny lineární i nelineární binární 1-perfektní MDS kódy (není jich zas tak mnoho).

6 bodů

3. (odevzdejte do 21.11.) Určete kolik existuje všech cyklických $[9,3]_2$-kódů a všech cyklických $[9,3]_4$-kódů a najděte kontrolní matice cyklických binárních $[9,k]_2$-kódů pro $2 < k < 9$.

6 bodů

$$\textit{Připomeňme značení } \mathbf{H}_{r,\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_1^{r-1} & \alpha_2^{r-1} & \dots & \alpha_n^{r-1} \end{pmatrix} \textit{ pro } \underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{F}^*)^n.$$

4. (odevzdejte do 21.11.) Jestliže $0 < k < n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou po dvou různé nenulové prvky tělesa $\mathbb{F}$ a $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dokažte, že pro kód $\mathcal{C}$ s generující maticí $\mathbf{G} = \mathbf{H}_{k,\underline{\alpha}}$ existuje diagonální matice $\mathbf{D}$, pro niž $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{n-k,\underline{\alpha}}\mathbf{D}$ tvoří kontrolní matici kódu $\mathcal{C}$.

(*Návod: pro nalezení hodnot diagonální matice uvažte řešení homogenní soustavu s maticí $\mathbf{H}_{n-2,\underline{\alpha}}$ a podmínku $\mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$.*)

6 bodů

5. (odevzdejte do 5.12.) Určete generující matici binárního Reedova-Mullerova kódu $\mathcal{R}(4,1)$, kde Booleovské funkce $\mathbf{c} \to f(\mathbf{c})$ reprezentujme slovem $f(\mathbf{c}_0)\dots f(\mathbf{c}_{15})$ pro čtveřice cifer $\mathbf{c}_i \in \mathbb{F}_2^4$ představující binární zápis čísla i. Najděte Booleův polynom p, aby $\Phi(p) = 100\dots001$ (tj. hodnota 1 právě jako první a poslední cifra slova, jinde 0).

6 bodů

6. (odevzdejte do 5.12.) Uvažujme ternární lineární kód $\mathcal{T}$ generovaný maticí

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{6\times 12},$$

kde $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$. Dokažte, že je $\mathcal{T}$ samoduální kód a dále za předpokladu, že jde o kód vzdálenosti 6 (to nemusíte dokazovat), dokažte, že je propíchnutí $\mathcal{T}$ v libovolné souřadnici 2-perfektní $[11, 6, 5]_3$-kód (zvaný *Golayův ternární* kód).

7 bodů

7. (odevzdejte do 9.1.) Pro abstraktní konvoluční kódovač (K, δ, λ) nad tělesem $\mathbb{F}_5$ se stavovou a výstupní funkcí $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{u}\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{u}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ najděte fyzickou realizaci (K, G), určete vnější stupeň matice G a nakreslete realizaci kódovače obvodem.

7 bodů

8. (odevzdejte do 9.1.) Pro fyzický konvoluční kódovač (K, G) určený generující maticí $G = \begin{pmatrix} 1+D & \frac{1}{1+D} \\ \frac{D}{1+D+D^2} & \frac{D}{1+D} \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{F}_2$ najděte matice P, Q, R, S určující abstraktní konvoluční kódovač (K, δ, λ), kde $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}P + \mathbf{u}Q$ a $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}R + \mathbf{u}S$. Najděte nějakou polynomiální generující matici s minimálním možným vnějším stupněm téhož konvolučního kódu jako určuje matice G.

6 bodů