Teorie čísel: Cvičení 10

Simona Hlavinková, email: simonkahlavinkova@gmail.com

Definice. Obor R se nazývá *eukleidovský*, pokud na něm existuje *eukleidovská norma*, tj. zobrazení $\nu : R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující:

- $\nu(0) = 0$;
- pokud $a \mid b$ pro $b \neq 0$, pak $\nu(a) \leq \nu(b)$;
- pro všechna $a, b \in R$, $b \neq 0$, existují $q, r \in R$ taková, že $a = qb + r$ a $\nu(r) < \nu(b)$.

Věta. *Eukleidovské obory jsou gaussovské.*

Poznámka. V kvadratických rozšířeních $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ máme v teorii čísel normu $\mathrm{N}(a + b\sqrt{m}) = a^2 - mb^2$. Pokud máme velké štěstí, slouží $|\mathrm{N}(a + b\sqrt{m})|$ jako příslušná eukleidovská norma. (Často se nicméně stává, že tyto obory nejsou ani gaussovské.) Norma v $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ je multiplikativní a prvek je invertibilní právě tehdy, když má normu ± 1. Pro záporné m platí $\mathrm{N}(a + b\sqrt{m}) = |a + b\sqrt{m}|^2$, tj. jde o druhou mocninu komplexní absolutní hodnoty.

-2. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 + 1 = y^5$.

-1. Dokažte, že obor $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ je eukleidovský.

0. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 + y^2 = z^2$.

! 1. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 + 1 = y^3$.

! 2. Dokažte, že obor $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ je eukleidovský.

! 3. Najděte všechny jednotky (čili invertibilní prvky) v oboru:
   (a) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$,
   (b) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

! 4. Rozmyslete si, jak řešení zobecněné Pellovy rovnice $x^2 - Dy^2 = A$ souvisí s normou v okruhu $\mathbb{Z}\big[\sqrt{D}\big]$. Co v tomto kontextu říká multiplikativita normy?

Další příklady:

5. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 + y^2 = z^3$ pro x, y nesoudělná.

∗ 6. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 + 4 = y^3$.

∗ 7. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 - 2 = y^3$.
(Rovnice $1 = a^3 + 3a^2b + 6ab^2 + 2b^3$ má v $\mathbb{Z}$ jediné řešení $(a, b) = (1, 0)$; toto můžete použít bez důkazu.)

∗ 8. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 + 4 = 3y^3$.

∗ 9. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 - 1 = y^3$.

10. Ukažte, že obor $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ není eukleidovský, dokonce ani gaussovský. Najděte ireducibilní prvek, který není prvočinitel.

∗ 11. Buď $R = \mathbb{Z}\big[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\big] = \mathbb{Z}\big[\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3}\big]$.
   (a) Dokažte, že R je eukleidovský s normou $\mathrm{N}(x + y\sqrt{-3}) = x^2 + 3y^2$.
   (b) Určete všechny invertibilní prvky v R.
   (c) V $\mathbb{Z}$ řešte rovnici $x^2 + 3 = y^3$.

Úlohy s nekladným číslem budou předvedeny na cvičení jako vzorové.
Úlohy s ! je doporučeno řešit přednostně.
Úlohy s ∗ jsou náročnější.