Teorie čísel: Cvičení 2

Simona Hlavinková, email: simonkahlavinkova@gmail.com

Konečné řetězové zlomky

Definice. Pro nezáporná reálná čísla $a_0, \dots, a_n$, kde $a_n \neq 0$, označme $[a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$.

Takovýmto výrazům říkáme *konečné řetězové zlomky.* Většinou požadujeme $a_i \in \mathbb{N}$.

0. Určete hodnotu řetězového zlomku $[6, 9, 2]$. Spočtěte řetězový zlomek pro číslo $\frac{8}{5}$.

! 1. Vyjádřete následující konečné řetězové zlomky jako racionální čísla:
   (a) $[3, 5, 8]$;
   (b) $[1, 2, 3, 4]$;
   (c) $[2, 5, 1, 7]$.

! 2. Spočtěte řetězové zlomky pro následující racionální čísla: (a) $\frac{4}{3}$; (b) $\frac{25}{7}$; (c) $\frac{415}{93}$.

3. V závislosti na n určete, jakému racionálnímu číslu se rovná zlomek $[0, \overbrace{1, 1, ..., 1}^{n}]$.

4. Rozmyslete si následující rekurentní vztahy pro konečné řetězové zlomky:
   (a) $[a_0, a_1, ..., a_n] = a_0 + [a_1, ..., a_n]^{-1}$;
   (b) $[a_0, a_1, ..., a_n] = \left[a_0, ..., a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right]$;
   (c) $[a_0, a_1, ..., a_n] = \big[a_0, ..., a_{k-1}, [a_k, ..., a_n]\big]$ pro každé $0 < k \leq n$.

5. Uvědomte si, že každé kladné racionální číslo se dá zapsat jako řetězový zlomek právě dvěma způsoby.

Fareyho zlomky

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme všechny zlomky $\frac{p}{q} \in [0, 1]$ takové, že $\mathrm{NSD}(p, q) = 1$ a $q \leq n$. Jako F_n označme konečnou posloupnost tvořenou těmito zlomky uspořádanými podle velikosti (takže její první člen je $0 = \frac{0}{1}$ a poslední $1 = \frac{1}{1}$). Tyto zlomky budeme nazývat *Fareyho zlomky řádu n.*

Věta (Cauchy)**.** *Nechť $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ jsou sousední položky seznamu F_n. Pak $bc - ad = 1$.*

! 6. Najděte posloupnost Fareyho zlomků řádu 6. Jaké vlastnosti má posloupnost jejich jmenovatelů?

! 7. Určete počet Fareyho zlomků řádu n.

! 8. Dokažte, že pro libovolné dva zlomky $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ je $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{bd}$. Ukažte, že pro sousední Fareyho zlomky nastává rovnost. * Platí opačná implikace, tedy pokud nastává rovnost, tak jsou to sousední zlomky v F_n pro nějaké n?

9. Ukažte, že posloupnost jmenovatelů prvků F_n tvoří palindrom.

! 10. Pomocí Fareyho zlomků dokažte **Dirichletovu větu**: Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pak existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ takových, že $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.

$*$ 11. Předpokládejte, že znáte řetězový zlomek pro prvek $\frac{p}{q}$ Fareyho posloupnosti F_q. Vyjádřete pomocí něj řetězové zlomky sousedních prvků.

$**$ 12. Podle Wikipedie délka posloupnosti F_n splňuje

$$|F_n| = \frac{1}{2} \cdot \left(3 + \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2\right) = \frac{1}{2}(n+3)n - \sum_{d=2}^{n} |F_{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}|,$$

kde $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ je Möbiova funkce. Ta je definovaná následovně: $\mu(n) = 0$, pokud n není bezčtvercové, a $\mu(n) = (-1)^k$ pro bezčtvercové n, přičemž k je počet prvočíselných dělitelů n.

Úlohy s ! je doporučeno řešit přednostně.
Úlohy s $*$ jsou náročnější.