2. série domácích úloh z Algebry

Řešení odevzdávejte do úterý **19. března 24:00.**

Pokud někde v řešení použijete nějakou větu z přednášky, nezapomeňte to explicitně uvést a ověřit předpoklady!

Úloha 1 (2 body)**.** Buďte $f(x) = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 2x$ a $g(x) = x^2 + 2$ polynomy v $\mathbb{Z}_3[x]$. Najděte polynomy $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ takové, že

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad \text{a} \quad \deg r(x) < \deg g(x).$$

Úloha 2 (3 body)**.** Spočítejte v oborech $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Z}_5[x]$ ireducibilní rozklad polynomu $x^4 - 4$. Stručně zdůvodněte, proč jsou výsledné rozklady opravdu ireducibilní.

Úloha 3 (2 body)**.** Nechť $R = \mathbb{Z}[i]$. Najděte $a, b \in R$ taková, že

$$aR = (1 + 3i)R \cap 10R \quad \text{a} \quad bR = (1 + 3i)R + 10R.$$

Úloha 4 (3 body)**.** Najděte $\mathrm{NSD}(6\sqrt{2}i, 4 - 6\sqrt{2}i)$ v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}i]$ (můžete, ale nemusíte bez důkazu použít fakt, že je $\mathbb{Z}[\sqrt{2}i]$ eukleidovský).