11 Normální faktorizační safari

Řešení
Cvičení 2. května, verze ze dne 30. dubna 2024.

Cíle cvičení: Podruhé se vydáme na dobrodružnou faktorizační výpravu, tentokrát budou hlavním cílem naší expedice faktorgrupy. Nejprve ovšem důkladně rozvážíme, jak poznat takzvané normální podgrupy, bez jejichž pomoci se neobejdeme, neboť jako jediné disponují platným povolením k lovu faktorgrup.

Úlohy, které bychom určitě měli umět řešit:

Úloha 11.1. Nechť $M = \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4)\}$ a $\mathbf{K} = \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ jsou podmnožiny grupy $\mathbf{S}_4$. Dokažte, že

(a) M není normální podgrupa grupy $\mathbf{A}_4$ ani $\mathbf{S}_4$,

(b) $\mathbf{K}$ je normální podgrupa grupy $\mathbf{S}_4$ a M je normální podgrupa grupy $\mathbf{K}$,

(c) $\mathbf{K}$ je jediná vlastní normální podgrupa grupy $\mathbf{A}_4$,

(d) relace „býti normální podgrupou“ obecně není tranzitivní.

Řešení. (a) Stačí si všimnout konjugace prvku $(1\ 2)(3\ 4) \in M$ prvkem $(1\ 2\ 3)$

$$(1\ 2\ 3) \circ (1\ 2)(3\ 4) \circ (1\ 2\ 3)^{-1} = (2\ 3)(1\ 4) \notin M,$$

což znamená, že M určitě nemůže být normální podgrupou grupy $\mathbf{A}_4$ a tedy ani $\mathbf{S}_4$.

(b) Vidíme, že neutrální prvek id v M i v $\mathbf{K}$ a všechny neidentické prvky obou podgrup jsou řádu dva, proto jsou samy k sobě inverzní. To znamená, že jsou obě množiny uzavřené na inverzní prvky. Dále snadno ověříme, že součin každých dvou různých neidentických prvků $\mathbf{K}$ nám dává zbylý neidentických prvek, čímž jsme dokončili důkaz, že množiny M a $\mathbf{K}$ představují podgrupy grupy $\mathbf{S}_4$. Nyní přímočaře spočítáme pro všechny čtyři permutace $\sigma \in \mathbf{K}$, že

$$\sigma \circ (1\ 2)(3\ 4) \circ \sigma^{-1} = (1\ 2)(3\ 4) \in M$$

(pro identitu a $(1\ 2)(3\ 4)$ je to navíc bezpracné), což znamená, že M je normální podgrupa grupy $\mathbf{K}$. Konečně neidentické prvky grupy $\mathbf{K}$ jsou právě všechny prvky grupy $\mathbf{S}_4$ sestávající ze dvou nezávislých cyklů, proto je $\mathbf{K}$ normální podgrupa $\mathbf{S}_4$.

(c) Normální podgrupa alternující grupy musí být uzavřená na všechny konjugace a inverzy. Kdyby obsahovala nějaký trojckylus, musela by obsahovat všehny trojcykly, kterých je v $\mathbf{S}_4$ právě 8. Z Lagrangeovy věty plyne, že aspoň osmiprvková podgrupa dvanáctiprvkové grupy $\mathbf{A}_4$ už se nutně rovná $\mathbf{A}_4$. Tedy normální podgrupa $\mathbf{A}_4$ obsahující trojcyklus se rovná $\mathbf{A}_4$ a normální podgrupa $\mathbf{A}_4$, která neobsahuje žádný trojcyklus a obsahuje permutaci složenou ze dvou nezávislých cyklů, už obsahuje všechny takové permutace, tedy se rovná celému $\mathbf{K}$. Nyní již vidíme, že $\mathbf{K}$ je jediná normální podgrupa $\mathbf{A}_4$.

(d) To, že M je normální podgrupa $\mathbf{K}$ a $\mathbf{K}$ je normální podgrupa $\mathbf{S}_4$, plyne z (b) a že M není normální podgrupa grupy $\mathbf{S}_4$ jsme dokázali v (c), což dosvědčuje, že relace „býti normální podgrupou“ není tranzitivní.

Úloha 11.2. Jaké jsou možné faktorgrupy grupy $\mathbf{S}_3$?

Řešení. Stejně jako v případě grupy $\mathbf{S}_5$ máme v $\mathbf{S}_3$ právě tři normální podgrupy $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{A}_3$ a $\{\mathrm{id}\}$. Kromě triviálních faktorů $\{1\} \cong \mathbf{S}_3/\mathbf{S}_3$ a $\mathbf{S}_3 \cong \mathbf{S}_3/\{\mathrm{id}\}$, tudíž zbývá už jen dvouprvkový, tedy cyklický faktor podle alternující grupy $\mathbf{S}_3/\mathbf{A}_3 \cong \mathbb{Z}_2$.

Úloha 11.3. Rozhodněte, které známé grupě je izomorfní daná faktorgrupa.

(a) $\mathbf{S}_n/\mathbf{A}_n$ pro libovolné $n > 2$,

(b) $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+$, kde $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R}^*;\ r > 0\}$,

(c) $\mathbb{C}^*/\mathbf{S}^1$, kde $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}^*;\ \|z\| = 1\}$,

Řešení. (a) Stačí si vzpomenout, že zobrazení znaménko $\mathrm{sgn} : \mathbf{S}_n \to \mathbb{Z}^*$ splňuje pomínku $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$, tedy jde o homomorfismus na multiplikativní podgrupu $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$ grupy $\mathbb{Q}^*$. Protože jeho jádro tvoří právě sudé permutace $\mathbf{A}_n$, dostáváme díky první větě o izomorfismu a faktu, že dvouprvková grupa je nutně cyklická izomorfismy

$$\mathbf{S}_n/\mathbf{A}_n = \mathbf{S}_n/\mathrm{Ker}\,(\mathrm{sgn}) \cong \mathbb{Z}^* = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

(b) Uvážíme homomorfismus $r \mapsto \mathrm{sgn}(r)$ multiplikativních grup $\mathbb{R}^* \to \mathbb{Z}^*$. Jeho jádro je rovno $\mathbb{R}^+$, tudíž podle první věty o izomorfismu dostáváme obdobně jako v úloze (a) $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+ \cong \mathbb{Z}^* \cong \mathbb{Z}_2$.

(c) Tentokrát vidíme, že $\mathbb{C}^*/\mathbf{S}^1 \cong \mathbb{R}^+$, jak dosvědčuje homomorfismus $z \mapsto \|z\|$ grupy $\mathbb{C}^*$ na grupu $\mathbb{R}^+$, jehož jádro tvoří právě podgrupa $\mathbf{S}^1$.

Úloha 11.4. Pro podgrupu $H = 3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z} = \{(3a, 5b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ popište faktorgrupu $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/H$ jako součin aditivních grup $\mathbb{Z}_n$. Je tato faktorgrupa cyklická?

Řešení. I tentokrát zkonstruujeme zobrazení

$$\rho : Z \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \quad \text{předpisem} \quad \rho(a, b) = (a \bmod 3, b \bmod 5)$$

Vidíme, že jde o zobrazení na $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$, a díky vlastnostem modulu se jedná o grupový homomorfismus. Než využijeme 1. větu o izomorfismu, spočítáme si jádro

$$\mathrm{Ker}\,(\rho) = \{(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid u \equiv 0 \pmod 3,\ v \equiv 0 \pmod 5\} = \{(3a, 5b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = H.$$

Nyní podle 1. věty o izomorfismu dostaneme

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 = \rho(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\,(\rho) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/H.$$

Protože podle čínské věty o zbytcích $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{15}$, tedy grupy $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/H$ jsou cyklické.

Úloha 11.5. Pro aditivní grupu $\mathbb{Z}_{12}$

(a) dokažte, že platí $\mathbb{Z}_{12}/\langle 3\rangle \cong \mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_{12}/\langle 4\rangle \cong \mathbb{Z}_4$,

(b) vysvětlete, proč $\mathbb{Z}_{12}/\langle 5\rangle \ncong \mathbb{Z}_4$ a ukažte, jaké cyklické grupě $\mathbb{Z}_n$ je $\mathbb{Z}_{12}/\langle 5\rangle$ izomorfní.

Řešení. (a) Jako obvykle zkonstruujeme homomorfismy $f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3$ a $g : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_4$ podmínkami $f(a) = (a) \mod 3$ a $g(a) = (a) \mod 4$, o nichž přímočaře ověříme, že jde o surjektivní homomorfismy. Poté spočítáme jádra

$$\ker(f) = \{a \in \mathbb{Z}_{12} \mid f(a) = 0\} = \{a \in \mathbb{Z}_{12} \mid a \equiv 0 \pmod 3\} = \langle 3\rangle,$$

$$\ker(f) = \{a \in \mathbb{Z}_{12} \mid f(a) = 0\} = \{a \in \mathbb{Z}_{12} \mid a \equiv 0 \pmod 4\} = \langle 4\rangle.$$

Nyní nám 1. věta o homomorfismu říká, že

$$\mathbb{Z}_{12}/\langle 3\rangle = \mathbb{Z}_{12}/\ker(f) \cong \mathbb{Z}_3 \quad \text{a} \quad \mathbb{Z}_{12}/\langle 4\rangle = \mathbb{Z}_{12}/\ker(f) \cong \mathbb{Z}_4.$$

(b) Prvek 5 nedělí řád grupy, dokonce $\mathrm{NSD}(5, 12) = 1$ a je tedy generátorem celé cyklické grupy $\mathbb{Z}_{12}$. To znamená, že $\mathbb{Z}_{12}/\langle 5\rangle = \mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_{12} \cong \{0\}$.

Když se člověk rozfaktorizuje, (může, ale) nechce přestat:

Úloha 11.6. Určete řád prvku $P = ((1234)\,(56789))\mathbf{A}_9$ v grupě $\mathbf{S}_9/\mathbf{A}_9$. Lze prvky (levé) rozkladové třídy P popsat pomocí znaménka a kolik jich je? Co tvoří třídu P^{-1}?

Řešení. Protože je grupa $\mathbf{S}_9/\mathbf{A}_9$ podle Lagrangeovy věty řádu $\frac{|\mathbf{S}_9|}{|\mathbf{A}_9|} = [\mathbf{S}_9 : \mathbf{A}_9] = 2$ a prvek $P \neq \mathbf{A}_9$, tedy není jednotkou faktorové grupy, nutně musí jít o prvek řádu 2 a $P = \mathbf{S}_9 \setminus \mathbf{A}_9$, tedy ho tvoří všechny liché permutace. Vidíme, že $|P| = |\mathbf{A}_9| = \frac{9!}{2}$ a $P^{-1} = P$, neboť každý prvek řádu dva je sám k sobě inverzní.

Úloha 11.7. Rozmyslete si, jak se počítá v aditivní abelovské grupě $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, jejíž prvky reprezentujme jako rozkladové třídy racionálních čísel z intervalu $[0; 1)$):

(a) Spočítejte $\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right]$, $5 \cdot \left[\frac{1}{3}\right]$ a najděte opačný prvek k $\left[\frac{1}{3}\right]$,

(b) vyřešte rovnici $3 \cdot x = \left[\frac{1}{2}\right]$,

(c) ukažte, že pro každé prvočíslo p a $k \in \mathbb{N}$ existuje v $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ prvek řádu p^k. Kolik jich je?

Řešení. Nejprve uvážíme, že čitatel výsledného zlomku každého výpočtu je třeba upravit modulo jmenovatel, tedy $[\frac{a}{b}] = [\frac{a \mod b}{b}]$.

(a) Nyní už snadno spočítáme

$$\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{2}{2}\right] = [0]\,, \quad 5 \cdot \left[\frac{1}{3}\right] = \left[\frac{5}{3}\right] = \left[\frac{2}{3}\right], \quad -\left[\frac{1}{3}\right] = \left[\frac{-1}{3}\right]\left[\frac{2}{3}\right]$$

(b) Hledáme $3 \cdot \left[\frac{a}{b}\right] = \cdot \left[\frac{3a}{b}\right] = \left[\frac{1}{2}\right]$, kde předpokládáme, že jsou a a b nesoudělné a $0 \leq a < b$. Potom nutně $b \in \{2, 6\}$. Pokud $b = 2$, pak $3a \equiv 1 \mod 2$, tedy $a = 1$ a pokud $b = 6$, pak $3a \equiv 3$ mod 6, tedy opět $3a \equiv 1 \mod 2$, tedy $a = 1, 3$. Dostáváme 3 řešení $\left[\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{6}\right]$ a $\left[\frac{5}{6}\right]$.

(c) Snadno uvážíme, že prvek tvaru $\left[\frac{a}{p^k}\right]$ pro celé a je řádu p^k, právě když $p \nmid a$. Různá řešení úlohy potom reprezentují prvky $\frac{a}{p^k}$ z intervalu $\langle 0, 1)$, tedy a splňující podmínku $0 \leq a < p^k$. Vidíme tudíž, že máme v $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ právě $\varphi(p^k)$ prvků řádu p^k.

Úloha 11.8. Dokažte existenci izomorfismu $D_{12}/\left\{\mathrm{id}, rot_\pi\right\} \cong \mathbf{S}_3$ pro dihedrální grupu D_{12}, kde rot_π značí rotaci o úhel π.

Řešení. Opět zkonstruujeme grupový homomorfismus, které symetrii šestiúhelníku $\mapsto$ přiřadí permutace úhlopříček šestiúhelníka, které můžeme reprezentovat jako grupu $\mathbf{S}_3$. Vidíme, že jádro je právě $\{\mathrm{id}, rot_\pi\}$ a obraz celé $\mathbf{S}_3$, proto díky první větě o izomorfismu máme izomorfismus $D_{12}/\left\{\mathrm{id}, rot_\pi\right\} \cong \mathbf{S}_3$.

Úloha 11.9. Označme $I \subseteq \mathbb{Z}[i]$ ideál generovaný prvkem $1 + 3i$ a buď $\mathbf{R} = \mathbb{Z}[\mathrm{i}]/I$. Postupně ukažte, že:

(a) v $\mathbf{R}$ platí $[\mathrm{i}] = [3]$, $[10] = [0]$,

(b) pro každý okruh $\mathcal{S}$ existuje jediný homomorfismus $\phi : \mathbb{Z} \to \mathcal{S}$ a toto ϕ je pro $\mathcal{S} = \mathbf{R}$ surjektivní

(c) 2 ani 5 nejsou v $\mathbb{Z}[i]$ dělitelné prvkem $1 + 3i$,

(d) $\mathbf{R} \simeq \mathbb{Z}_{10}$,

(e) I není maximální, najděte nějaký maximální ideál $J \supseteq I$ a popište $\mathbb{Z}[i]/J$.

Řešení. (a) Spočítáme, že $[i] = [3]$, protože $i - 3 = i(1 + 3i) \in I$ a $[10] = [0]$, neboť $10 = (1 + 3i)(1 - 3i) \in I$.

(b) Tento homomorfismus je určen jednoznačně právě obrazem prvku 1, který se musí zobrazit na jednotkový prvek okruhu $\mathcal{S}$, potom $\phi(z) = z \cdot 1$.

V případě homomorfismu si úvahou z (a) uvědomíme, že pro každý prvek $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ máme

$$[a + bi] = [a + 3b] = \phi(a + 3b) \in \phi(\mathbb{Z}).$$

(c) Plyne z pozorování, že normy $4 = \|2\|^2$ ani $25 = \|5\|^2$ nejsou dělitelné normou $\|1 + 3i\| = 10$.

(d) Stačí spočítat pro homomorfismus ϕ z úlohy (a) jádro $\ker(\phi) = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3 + i \mid n\} = 10\mathbb{Z}$ a využít 1. věty o izomorfismu (věta 20.7):

$$\mathbf{R} = \phi(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\ker(\phi) = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{10}.$$

(e) Podle (d) máme $\mathbb{Z}[i]/I = \mathbf{R} \cong \mathbb{Z}_{10}$, což není těleso. Věta 20.10 potom říká, že I není maximální ideál. Pro nalezení maximálních ideálů si stačí vzít ireducibilní rozklad generátoru

$$1 + 3i = (1 + i)(2 + i)$$

Potom oba ideály $J = (1 + i)\mathbb{Z}[i]$ a $K = (2 + i)\mathbb{Z}[i]$ obsahují ideál I, a protože

$$\mathbb{Z}[i]/J \cong \mathbb{Z}[i]/(1 + i) \cong \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}[i]/K \cong \mathbb{Z}[i]/(2 + i) \cong \mathbb{Z}_5$$

faktory představují dvouprvkové a pětiprvkové těleso, tudíž jsou ideály J a K opět díky větě 20.10 maximální.

Úloha 11.10. Pro grupu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

(a) popište prvky konečného řádu a řád každého takového prvku určete,

(b) dokažte, že je izomorfní podgrupě $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}^*; \|z\| = 1\}$ grupy $\mathbb{C}^*$.

Řešení. (a) Protože prvek $[r] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ je konečného řádu, právě když existuje přirozené číslo n, pro něž $nr \in \mathbb{Z}$, jde právě o rozkladové třídy racionálních čísel. Prvek $\left[\frac{a}{b}\right]$ má pro a, b nesoudělná řád roven b.

(b) Stačí uvážit zobrazení $\rho : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ dané předpisem $\rho([r]) = e^{2\pi i r}$, které je korektně definované a prosté, neboť $[r] = [s]$ právě když $r - s \in \mathbb{Z}$, a to nastává právě tehdy, když $e^{2\pi i r} = e^{2\pi i s}$. Z vlastností exponenciály vidíme, že se jedná o homomorfismus, a zřejmě jde i o zobrazení na $\mathbf{S}^1$, tedy je to izomorfismus $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbf{S}^1$.

Úloha 11.11. Popište všechny homomorfismy $\mathbf{S}_3 \to \mathbb{Z}_n$ v závislosti na $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Podle 1. věty o izomorfismu představuje homomorfní obraz $\mathbf{S}_3$ vždy podgrupou komutativní grupy $\mathbb{Z}_n$, který je izomorfní faktoru podle jádra. Protože je jádro vždy normální podgrupa, připadají v úvahu pouze jádra $\mathbf{S}_3$ a $\mathbf{A}_3$. Pro jádro $\mathbf{S}_3$ dostáváme triviální homomorfismus $\mathbf{S}_3 \to 0$ a pro sudá n ještě existuje homomorfismus, který obdržíme složením přirozené projekce a vnoření $\mathbf{S}_3 \to \mathbf{S}_3/\mathbf{A}_3 \to \mathbb{Z}_n$ daný podmínkou $(12)\mathbf{A}_3 \to \frac{n}{2}$ s jádrem $\mathbf{A}_3$ a obrazem $\operatorname{Im} f = \left\langle \frac{n}{2} \right\rangle$.

Úloha 11.12. Dokažte, že grupa $\mathbf{A}_5$ neobsahuje žádné vlastní normální podgrupy.

Řešení. Nechť $N \neq \{\mathrm{id}\}$ je normální podgrupa $\mathbf{A}_5$. Pokud N obsahuje jeden trojcyklus díky konjugování a uzavřenosti na inverzy obsahuje i všechny ostatní trojcykly, které už generujíc celé $\mathbf{A}_5$. Obsahuje-li permutaci tvaru $(ab)(cd)$, obsahuje i trojcyklus

$$(cde) = (ab)(cd) \circ (ab)(ce) = (ab)(cd) \circ ((cde) \circ (ab)(cd) \circ (cde)^{-1}),$$

proto podle předchozí úvahy opět $N = \mathbf{A}_5$. Konečně pokud $(abcde) \in N$, pak

$$(aec) = (abcde) \circ (badce) = (abcde) \circ ((ab)(cd) \circ (abcde) \circ ((ab)(cd))^{-1}),$$

tedy znovu $N = \mathbf{A}_5$.

Úloha 11.13. Buď $\mathcal{G} = (\mathbf{G}, \cdot, ^{-1}, I_2)$ grupa s maticovým násobením a invertováním a nosnou množinou $\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$ a nechť $\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$.

(a) Ukažte, že $\mathbf{H}$ je podgrupa grupy $\mathcal{G}$.

(b) Popište levé a pravé rozkladové třídy podgrupy $\mathbf{H}$. (Pro jednodušší popis lze uvažovat geometrickou reprezentaci matice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jako bodu (a, b) v reálné rovině $\mathbb{R}^2$.)

(c) Je $\mathbf{H}$ normální podgrupou $\mathbf{G}$?

(d) Najděte nějakou levou a pravou transversálu rozkladu.

Řešení. (a) Vidíme, že jednotková matice, která je neutrálním prvkem maticové grupy leží v H, tedy $I_2 \in H$, a pokud $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, pak

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H,$$

což znamená, že $\mathbf{H}$ je opravdu podgrupa grupy $\mathcal{G}$.

(b) Dostáváme, že

$$\mathbf{H}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} ac & bc \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R}^+\}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{H} = \{\begin{pmatrix} ac & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R}^+\},$$

tedy pravá rozkladová třída odpovídá polopřímce z počátku se směrnicí $\frac{a}{b}$ ležící vpravo od osy y a levá rozkladová třída odpovídá vodorovné přímce $y = b$.

(c) Jelikož jsme v (b) nahlédli, že levé a pravé rozkladové třídy se liší, $\mathbf{H}$ není normální podgrupou grupy $\mathcal{G}$ podle tvrzení 19.1 z přednášky.

(d) Díky (b) vidíme, že pravou transversálu tvoří například $\{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})\}$, neboť nám určuje všechny polopřímky z počátku ležící vpravo od osy y. Levou transversálu představuje například $\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\}$, odpovídající levé rozkladové třídy nám jednoznačně určují všechny přímky $y = b$.