11 Normální faktorizační safari

Zadání
Cvičení 2. května, verze ze dne 30. dubna 2024.

Cíle cvičení: Podruhé se vydáme na dobrodružnou faktorizační výpravu, tentokrát budou hlavním cílem naší expedice faktorgrupy. Nejprve ovšem důkladně rozvážíme, jak poznat takzvané normální podgrupy, bez jejichž pomoci se neobejdeme, neboť jako jediné disponují platným povolením k lovu faktorgrup.

Úlohy, které bychom určitě měli umět řešit:

Úloha 11.1. Nechť $M = \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4)\}$ a $\mathbf{K} = \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ jsou podmnožiny grupy $\mathbf{S}_4$. Dokažte, že

(a) M není normální podgrupa grupy $\mathbf{A}_4$ ani $\mathbf{S}_4$,

(b) $\mathbf{K}$ je normální podgrupa grupy $\mathbf{S}_4$ a M je normální podgrupa grupy $\mathbf{K}$,

(c) $\mathbf{K}$ je jediná vlastní normální podgrupa grupy $\mathbf{A}_4$,

(d) relace „býti normální podgrupou“ obecně není tranzitivní.

Úloha 11.2. Jaké jsou možné faktorgrupy grupy $\mathbf{S}_3$?

Úloha 11.3. Rozhodněte, které známé grupě je izomorfní daná faktorgrupa.

(a) $\mathbf{S}_n/\mathbf{A}_n$ pro libovolné $n > 2$,

(b) $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+$, kde $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R}^*;\ r > 0\}$,

(c) $\mathbb{C}^*/\mathbf{S}^1$, kde $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}^*;\ \|z\| = 1\}$,

Úloha 11.4. Pro podgrupu $H = 3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z} = \{(3a, 5b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ popište faktorgrupu $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/H$ jako součin aditivních grup $\mathbb{Z}_n$. Je tato faktorgrupa cyklická?

Úloha 11.5. Pro aditivní grupu $\mathbb{Z}_{12}$

(a) dokažte, že platí $\mathbb{Z}_{12}/\langle 3\rangle \cong \mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_{12}/\langle 4\rangle \cong \mathbb{Z}_4$,

(b) vysvětlete, proč $\mathbb{Z}_{12}/\langle 5\rangle \ncong \mathbb{Z}_4$ a ukažte, jaké cyklické grupě $\mathbb{Z}_n$ je $\mathbb{Z}_{12}/\langle 5\rangle$ izomorfní.

Když se člověk rozfaktorizuje, (může, ale) nechce přestat:

Úloha 11.6. Určete řád prvku $P = ((1234)\,(56789))\mathbf{A}_9$ v grupě $\mathbf{S}_9/\mathbf{A}_9$. Lze prvky (levé) rozkladové třídy P popsat pomocí znaménka a kolik jich je? Co tvoří třídu P^{-1}?

Úloha 11.7. Rozmyslete si, jak se počítá v aditivní abelovské grupě $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, jejíž prvky reprezentujme jako rozkladové třídy racionálních čísel z intervalu $[0; 1)$):

(a) Spočítejte $\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right]$, $5 \cdot \left[\frac{1}{3}\right]$ a najděte opačný prvek k $\left[\frac{1}{3}\right]$,

(b) vyřešte rovnici $3 \cdot x = \left[\frac{1}{2}\right]$,

(c) ukažte, že pro každé prvočíslo p a $k \in \mathbb{N}$ existuje v $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ prvek řádu p^k. Kolik jich je?

Úloha 11.8. Dokažte existenci izomorfismu $D_{12}/\left\{\mathrm{id}, rot_\pi\right\} \cong \mathbf{S}_3$ pro dihedrální grupu D_{12}, kde rot_π značí rotaci o úhel π.

Úloha 11.9. Označme $I \subseteq \mathbb{Z}[i]$ ideál generovaný prvkem $1+3i$ a buď $\mathbf{R} = \mathbb{Z}[\mathrm{i}]/I$. Postupně ukažte, že:

(a) v $\mathbf{R}$ platí $[\mathrm{i}] = [3]$, $[10] = [0]$,

(b) pro každý okruh $\mathcal{S}$ existuje jediný homomorfismus $\phi : \mathbb{Z} \to \mathcal{S}$ a toto ϕ je pro $\mathcal{S} = \mathbf{R}$ surjektivní

(c) 2 ani 5 nejsou v $\mathbb{Z}[i]$ dělitelné prvkem $1+3i$,

(d) $\mathbf{R} \simeq \mathbb{Z}_{10}$,

(e) I není maximální, najděte nějaký maximální ideál $J \supseteq I$ a popište $\mathbb{Z}[i]/J$.

Úloha 11.10. Pro grupu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

(a) popište prvky konečného řádu a řád každého takového prvku určete,

(b) dokažte, že je izomorfní podgrupě $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}^*;\ \|z\| = 1\}$ grupy $\mathbb{C}^*$.

Úloha 11.11. Popište všechny homomorfismy $\mathbf{S}_3 \to \mathbb{Z}_n$ v závislosti na $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 11.12. Dokažte, že grupa $\mathbf{A}_5$ neobsahuje žádné vlastní normální podgrupy.

Úloha 11.13. Buď $\mathcal{G} = (\mathbf{G}, \cdot, ^{-1}, I_2)$ grupa s maticovým násobením a invertováním a nosnou množinou $\mathbf{G} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0\right\}$ a nechť $\mathbf{H} = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, a > 0\right\}$.

(a) Ukažte, že $\mathbf{H}$ je podgrupa grupy $\mathcal{G}$.

(b) Popište levé a pravé rozkladové třídy podgrupy $\mathbf{H}$. (Pro jednodušší popis lze uvažovat geometrickou reprezentaci matice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jako bodu (a, b) v reálné rovině $\mathbb{R}^2$.)

(c) Je $\mathbf{H}$ normální podgrupou $\mathbf{G}$?

(d) Najděte nějakou levou a pravou transversálu rozkladu.