12. Normalitou grup za lepší den

Normální podgrupy

1. Pro grupu $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ ukažte, že její centrum, tj. množina $\mathrm{Z}(G) = \{a \in G \mid (\forall g \in G)\, a \cdot g = g \cdot a\}$, tvoří normální podgrupu.

2. Ukažte, že $\mathbf{M} = \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4)\}$ netvoří normální podgrupu grupy $\mathbf{A}_4$, ovšem platí $\mathbf{M} \lhd \mathbf{K} \lhd \mathbf{A}_4$, kde $\mathbf{K}$ značí Kleinovu grupu $\{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$. (Relace „býti normální podgrupou“ tedy obecně není tranzitivní.)

3. Dokažte, že grupa $\mathbf{A}_4$ obsahuje jedinou vlastní normální podgrupu, Kleinovu (viz předchozí cvičení).

Faktorgrupy

4. Rozmyslete si, jak se počítá v grupě $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (prvky této grupy reprezentujme jako rozkladové třídy čísel z intervalu $[0;1)$):

   (a) $\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right]$ [[0]]

   (b) $5 \cdot \left[\frac{1}{3}\right]$ $[\left[\frac{2}{3}\right]]$

   (c) najděte invers k $\left[\frac{1}{3}\right]$ $[\left[\frac{2}{3}\right]]$

   (d) vyřešte rovnici $3 \cdot x = \left[\frac{1}{2}\right]$ $[\left[\frac{1}{6}\right], \left[\frac{1}{2}\right], \left[\frac{5}{6}\right]]$

   (e) ukažte, že pro každé prvočíslo p a přirozené číslo k existuje v grupě $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ prvek řádu p^k. Existuje jich víc?
   [existuje jich $\varphi(p^k)$, totiž $\left[\frac{a}{p^k}\right]$, kde $a \in \mathbb{Z}$, $0 < a < p^k$ a $p \nmid a$]

5. Určete řád prvku $P = ((1234)\,(56789))\mathbb{A}_9$ v grupě $\mathbb{S}_9/\mathbb{A}_9$. Lze prvky třídy P popsat pomocí znaménka a kolik jich je? Co tvoří třídu P^{-1}?
   [2; $P = \mathbb{S}_9 \setminus \mathbb{A}_9$ tedy liché permutace, $|P| = |\mathbb{A}_9| = \frac{9!}{2}$, $P^{-1} = P$.]

6. V grupě $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ popište prvky konečného řádu a tento určete
   [rozkladové třídy racionálních čísel; prvek $\left[\frac{a}{b}\right]$ pro a, b nesoudělná má řád b]

7. Jaké jsou (až na izomorfismus) možné faktorgrupy grupy $\mathbb{S}_3$? [$\{1\}; \mathbb{Z}_2; \mathbb{S}_3$]

8. Popište všechny homomorfismy $\mathbb{S}_3 \to \mathbb{Z}_n$ v závislosti na $n \in \mathbb{N}$.
   [kromě triviálního existuje pro sudá n složení $\mathbb{S}_3 \to \mathbb{S}_3/\mathbf{A}_3 \to \mathbb{Z}_n$ s $\mathrm{Im}\, f = \left\langle \frac{n}{2} \right\rangle$]

9. Které známé grupě je izomorfní daná faktorgrupa?

   (a) $\mathbf{D}_{12}/\{id, rot_\pi\}$, kde rot_π značí rotaci o úhel π
   [$\mathbb{S}_3$, dosvědčujícím izomorfismem je „symetrie šestiúhelníka $\mapsto$ jí určená permutace úhlopříček šestiúhelníka“]

   (b) $\mathbb{S}_4/\mathbf{K}$, kde $\mathbf{K}$ je Kleinova čtyřprvková podgrupa (viz příklad 2)?
   [$\mathbb{S}_3$; jde o šestiprvkovou nekomutativní grupu (např. $[(1234)]\,[(12)] \neq [(12)]\,[(1234)]$, tedy není izomorfní Z_6]

   (c) $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+$, kde $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R}^*;\ r > 0\}$ (Může se hodit 1. věta o izomorfismu.)
   [$\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}^*$; dosvědčující homomorfismus např. $r \mapsto \mathrm{sgn}(r)$]

   (d) $\mathbb{C}^*/\mathbb{S}^1$, kde $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}^*;\ \|z\| = 1\}$. (Taky se může hodit 1. věta o izomorfismu.)
   [$\mathbb{R}^+$; dosvědčující homomorfismus např. $z \mapsto \|z\|$]

Faktorokruhy

10. Označme $I \subseteq \mathbb{Z}\,[\mathrm{i}]$ ideál generovaný prvkem $1 + 3\mathrm{i}$ a buď $\mathbf{R} := \mathbb{Z}\,[\mathrm{i}]\,/I$. Postupně ukažte, že:

    (a) v $\mathbf{R}$ platí $[\mathrm{i}] = [3]$, $[10] = [0]$

    (b) pro každý okruh $\mathcal{S}$ existuje jediný homomorfismus $\phi : \mathbb{Z} \to \mathcal{S}$ a toto ϕ je pro $\mathcal{R}$ surjektivní

    (c) 2 ani 5 nejsou v $\mathbb{Z}\,[\mathrm{i}]$ dělitelné prvkem $1 + 3\mathrm{i}$

    (d) $\mathbf{R} \simeq \mathbb{Z}_{10}$

    (e) vyvoďte, že I není maximální, najděte nějaký maximální ideál $J \supseteq I$ a popište $\mathbb{Z}\,[\mathrm{i}]\,/J$.

A pro odvážné několik zábavných a zcela dobrovolných příkladů navíc:

11. Rozhodněte, zda množina $\{\pi \in \mathbb{S}_4;\ \pi^3 = \mathrm{id}\}$ tvoří normální podgrupu grupy $\mathbb{S}_4$. [Ne.]

12. Buď $\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$ grupa s operací maticového násobení a $\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$.
    (a) Ukažte, že $\mathbf{H}$ je podgrupa v $\mathbf{G}$.
    (b) Popište levé a pravé rozkladové třídy podgrupy $\mathbf{H}$. (Pro jednodušší popis lze uvažovat geometrickou reprezentaci matice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jako bodu $[a, b]$ v reálné rovině $\mathbb{R}^2$.) Je $\mathbf{H}$ normální podgrupou $\mathbf{G}$? [$\mathbf{H}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ odpovídá polopřímce z počátku se směrnicí $\frac{x}{y}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{H}$ pak vodorovné přímce $y = b$; není, jelikož levé a pravé rozkladové třídy se liší]
    (c) Najděte nějakou levou/pravou transverzálu rozkladu.
    [levá např. $\{\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\}$; pravá např. $\{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})\}$]

13. Dokažte, že grupa $\mathbf{A}_5$ neobsahuje žádné vlastní normální podgrupy.

14. Dokažte, že je $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ izomorfní podgrupě grupy $\mathbb{C}^*$ sestávající z prvků normy 1.
    [dosvědčujícím izomorfismem je $r \mapsto e^{2\pi i r}$]

15. Položme $\mathbf{G} = \mathbb{Z}_{12}$.
    (a) Ukažte, že platí $\mathbf{G}/3\mathbf{G} \simeq \mathbb{Z}_3$. [$3\mathbf{G} = \ker\ (\mathrm{mod}\ 3)$]
    (b) Vysvětlete, proč neplatí $\mathbf{G}/5\mathbf{G} \simeq \mathbb{Z}_5$. [$5\mathbf{G} = \mathbf{G}$, takže $\mathbf{G}/5\mathbf{G} \simeq \{0\}$]